УДК 681.327

А.В. Боженюк, Е.М. Герасименко, И.Н. Розенберг

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ НЕЧЕТКОГО ПОТОКА В ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ С НЕЧЕТКИМИ СТОИМОСТЯМИ И ПРОПУСКНЫМИ СПОСОБНОСТЯМИ*

Описан метод нахождения потока минимальной стоимости в нечеткой транспортной сети с учетом нижних и верхних границ пропускных способностей дуг графа и стоимостей прохождения единиц потока, представленных нечеткими треугольными числами. Нечеткий характер параметров транспортной сети обеспечивает принятие более чувствительных к изменениям окружающей среды решений. Предложена методика сложения, вычитания, сравнения нечетких треугольных чисел, согласно которой центры складываются (вычитаются) традиционным способом, а границы отклонений рассчитываются с помощью линейных комбинаций границ соседних значений. Рассматриваемый алгоритм предлагает искать поток минимальной стоимости по кратчайшим цепям, которые находятся согласно модифицированному правилу построения инкрементальных графов в остаточной сети.

Нечеткий поток минимальной стоимости; верхние и нижние границы нечеткой пропускной способности; линейные комбинации границ.

A.V. Bozhenyuk, E.M. Gerasimenko, I.N. Rosenberg

ALGORITHM OF MINIMUM COST FUZZY FLOW FINDING IN A NETWORK WITH FUZZY ARC CAPACITIES AND TRANSMISSION COSTS

This article describes a method for minimum cost flow finding in a fuzzy network, taking into account lower and upper bounds of arc capacities and transmission costs of flow units as fuzzy triangular numbers. The fuzzy nature of network parameters provides making decisions more sensitive to changes in environment. Method for adding, subtracting and comparison of fuzzy triangular numbers is proposed: the centers of triangular numbers are added (subtracted) by conventional way and deviation borders are found by linear combinations of adjacent value borders. Considered algorithm proposes to search minimum cost flow along the arcs of minimum costs found by modified rule of incremental graph building in residual network.

Minimum cost fuzzy flow; lower and upper bounds of arc capacity; linear combinations of borders.

Задача нахождения потока минимальной стоимости в транспортной сети с заданными на дугах нижними и верхними границами пропускных способностей является одной из фундаментальных задач, возникающих при исследовании потоков. Постановка данной задачи может быть представлена следующим образом: пусть имеется транспортная сеть, представленная ориентированным графом $G=(X,A)$, где X – множество вершин графа, A – множество дуг графа [1]. При этом каждой дуге $(i,j)\in A$ поставлены в соответствие три числа: нижняя граница пропускной способности дуги (l_{ij}), верхняя граница пропускной способности (u_{ij}), определяющая максимальное число единиц потока, которое может протекать по дуге, а также стоимость прохождения единицы потока по дуге (c_{ij}). Возникает следующая постановка задачи: найти поток, не превышающий максимально допустимый поток в графе, протекающий из источника в сток, стоимость прохождения которого по дугам графа минимальна.

* Работа поддержана РФФИ (проект № 11-01-00011а).

В реальной жизни рассматривать данную задачу без учета изменений в окружающей среде и человеческой деятельности невозможно, так как такие параметры транспортной сети, как пропускные способности дуг и стоимости прохождения единиц потока по дугам, не могут быть точно известны или измерены. Следовательно, данные параметры следует представлять в нечетком виде, например в виде нечетких треугольных чисел [2]. Тогда мы приходим к решению задачи нахождения потока минимальной стоимости в нечеткой транспортной сети, представляемой в виде нечеткого графа [3].

В математическом выражении задача может быть представлена, как

$$\sum_{(x_i, x_j)\in A} \tilde{c}_{ij} \cdot \tilde{\tilde{\xi}}_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{x_j \in \Gamma(x_i)} \tilde{\tilde{\xi}}_{ij} - \sum_{x_k \in \Gamma^{-1}(x_i)} \tilde{\tilde{\xi}}_{ki} = \begin{cases} \tilde{v}, & x_i = s, \\ -\tilde{v}, & x_i = t, \\ 0, & x_i \neq s,t, \end{cases} \qquad (1)$$

$$\tilde{l}_{ij} \le \tilde{\tilde{\xi}}_{ij} \le \tilde{u}_{ij}, \ \forall (x_i, x_j) \in A.$$

В формуле (1) $\tilde{c}_{ij}$ – нечеткая стоимость прохождения единицы потока по дуге; $\tilde{\tilde{\xi}}_{ij}$ – нечеткая величина потока, протекающего по дуге; $\tilde{v}$ – заданная величина потока, не превышающая максимально допустимый поток в графе; s – начальная вершина графа (источник); t – конечная вершина графа (сток); $\tilde{l}_{ij}$ – неотрицательная нижняя нечеткая граница пропускной способности дуг графа; $\tilde{u}_{ij}$ – верхняя нечеткая граница пропускной способности дуг графа.

Задача нахождения потока минимальной стоимости в транспортной сети с учетом нижних и верхних границ пропускных способностей была рассмотрена в [4]. Методы решения задачи нахождения потока минимальной стоимости с учетом нижних и верхних границ пропускных способностей в транспортной сети в нечетких условиях практически не освещались в литературе. Поэтому возникла необходимость разработки алгоритма, реализующего данную задачу в нечетких условиях.

При решении поставленной задачи необходимо производить арифметические операции сложения, вычитания треугольных нечетких чисел, а также осуществлять их сравнение. Недостатком классической методики сложения и вычитания треугольных нечетких чисел является большое «размытие» результирующего числа и, как следствие, потеря его информативности. Также при задании нечетких треугольных чисел обычно не учитывается тот факт, что степень размытости границ числа зависит от величины его центра, т.е. чем больше центр, тем более «размыты» должны быть границы (измеряя 1 кг материала, мы говорим «около 1 кг», имея в виду от 900 до 1100 г, а измеряя 1 т материала, подразумеваем, что «около 1т» – это от 990 до 1110 кг). Перед вычитанием нечетких треугольных чисел необходимо определить большее. Даны два числа $A_1 = (a_1, b_1, c_1)$ и $A_2 = (a_2, b_2, c_2)$, где a_1 и a_2 – центры, b_1 и b_2 – отклонения влево, c_1 и c_2 – отклонения вправо треугольных нечетких чисел. При сравнении чисел $\tilde{A}_1$ = (10, 2, 2) и $\tilde{A}_2$ = (9, 2, 6), мы не можем однозначно определить большее, так как $a_1 > a_2$, $a_1 - b_1 > a_2 - b_2$, $a_1 + c_1 < a_2 + c_2$, следовательно, сравнивая их по центру тяжести, получаем, что центр тяжести второго числа оказался больше, значит, оно оценивается выше. Поэтому операция вычитания может быть записана следующим образом: (9, 2, 6) – (10, 2, 2) = (–1, 4, 8), т.е. получаем нечеткое треугольное число с отрицательным центром и, соответственно, отрицательной левой границей, что противоречит условию положительности значений потоков. Следовательно, необходим иной подход к оперированию нечеткими треугольными числами. Представим его следующим образом: пусть на числовой оси заданы пропускные способности дуг транспортной сети в виде нечетких треугольных чисел. Тогда при сложении двух исходных треугольных нечетких чисел $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ их центры будут складываться: $a_1 + a_2$, а вычитаться: $a_1 - a_2$, при этом $a_1 > a_2$. При этом будет учитываться факт, что число с большим центром имеет большие границы отклонений. Для вычисления отклонений необходимо по числовой оси определить, между какими числами находится искомое. Если нечеткое расстояние «около $\tilde{x}'$» находится между соседними базовыми значениями «около $\tilde{x}_1$» и «около $\tilde{x}_2$» ($\tilde{x}_1 \le \tilde{x}' \le \tilde{x}_2$), функции принадлежности которых $\mu_{\tilde{x}_1}(x_1)$ и $\mu_{\tilde{x}_2}(x_2)$ имеют треугольный вид, то границы функции принадлежности $\mu_{\tilde{x}'}(x)$ нечеткого расстояния «около $\tilde{x}'$» можно задать линейной комбинацией параметров левой и правой границ базовых значений согласно методике, описанной в [5–6].

В случае, когда полученное в результате сложения (вычитания) центральное значение треугольного числа повторяет уже отмеченное на числовой оси значение, его границы отклонений совпадают с уже отмеченными. Если же искомое центральное значение находится не между двумя значениями, а предшествует первому отмеченному на числовой оси значению, его границы отклонений также совпадают с границами отклонений первого числа на оси. То же самое относится и к случаю, когда вычисляемое центральное значение следует за последним, отмеченным на оси, значением.

С учетом вышеизложенного рассмотрим модифицированный потоковый алгоритм для решения задачи определения потока минимальной стоимости в транспортной сети с учетом нижних и верхних границ нечетких пропускных способностей, а также нечетких стоимостей прохождения потока по дугам.

Этап 1. Определяем, имеет ли исходный граф $\tilde{G}$ допустимый поток. Для этого строим граф $\tilde{G}^*$, который не имеет нижних границ пропускных способностей, согласно методике, описанной в [1]. Находим максимальный поток, имеющий минимальную стоимость согласно алгоритму Басакера–Гоуэна [7], в графе G^* между искусственными вершинами. Для этого полагаем стоимости всех искусственных дуг, ведущих из искусственного источника в искусственный сток, а также фиктивной дуги (t, s) равными нулю. Начиная с нулевых потоков, строим инкрементальный граф по правилу: для всех дуг, если $\tilde{\xi}_{ij} < \tilde{u}_{ij}$, то $\tilde{q}^{\mu}{}_{ij} = \tilde{u}_{ij} - \tilde{\xi}_{ij}$, модифицированная стоимость $\tilde{c}^{\mu}{}_{ij} = \tilde{c}_{ij}$. Для дуг только с верхней границей пропускной способности истинно, если $\tilde{\xi}_{ij} > 0$, то $\tilde{q}^{\mu}{}_{ji} = \tilde{\xi}_{ij}$, модифицированная стоимость $\tilde{c}^{\mu}{}_{ji} = -\tilde{c}_{ij}$. Для дуг с заданной нижней границей истинно, если $\tilde{\xi}_{ij} \ge \tilde{l}_{ij}$, то $\tilde{q}^{\mu}{}_{ji} = \tilde{\xi}_{ij} - \tilde{l}_{ij}$, модифицированная стоимость $\tilde{c}^{\mu}{}_{ji} = -\tilde{c}_{ij}$.

Передаем по цепям наименьшей стоимости $\widetilde{P}^*$, которые находим согласно алгоритму Форда [1], величину потока $\widetilde{\delta} = \min\ [\widetilde{q}^{\mu}{}_{ij}]$ до тех пор, пока либо не получим максимальный поток равным $\sum\limits_{\widetilde{l}_{ij} \neq 0} \widetilde{l}_{ij}$, либо подтвердим, что его нельзя передать. В первом случае, если значение максимального потока минимальной стоимости представляет собой $\sum\limits_{\widetilde{l}_{ij} \neq 0} \widetilde{l}_{ij}$, т.е. все дуги, выходящие из искусственного источника и входящие в искусственный сток, становятся насыщенными, и поток по фиктивной дуге (t,s) равен $\widetilde{\xi}_{ts}$, то в исходном графе G есть допустимый поток, принимающий значение $\widetilde{\xi}_{ts}$. Во втором случае, если значение максимального потока в графе G^* не равно $\sum\limits_{\widetilde{l}_{ij} \neq 0} \widetilde{l}_{ij}$, т.е. не все дуги, ведущие из искусственного источника в искусственный сток, насыщены, то в исходном графе G не существует допустимого потока. Допустимый вектор потоков, имеющий значение $\widetilde{v}_0$, $\widetilde{\xi}_0 = (\widetilde{\xi}_{0ij})$ определяется как $\widetilde{\xi}_{0ij} = \widetilde{\xi}_{0ij}{}^* + \widetilde{l}_{ij}$. Пусть допустимый вектор потоков существует и найден, тогда переходим к этапу 2.

Этап 2. Строим остаточную сеть $A(\widetilde{\xi})$ для графа $G\ (\widetilde{\xi}_0)$ по правилам, описанным на этапе 1, добавляя пометку «+» для дуг с положительной модифицированной стоимостью и пометкой «–» для дуг с отрицательной $\widetilde{c}^{\mu}{}_{ij}$. Определяем максимальный поток минимальной стоимости. В построенной остаточной сети передаем по цепям наименьшей стоимости значение потока $\widetilde{\delta} = \min[\widetilde{q}^{\mu}{}_{ij}]$, пока не достигнем заданного значения $\widetilde{v}$, не превышающего максимальной поток. Обозначим максимальный поток в сети $G\ (\widetilde{\xi}_0)$ как $\widetilde{g} = (\widetilde{g}_{ij})$ со значением $\widetilde{\omega}$. Определяем максимальный поток в исходном графе G следующим образом: $\widetilde{\xi}_{ij} = \widetilde{\xi}_{0ij}{}^* + \widetilde{g}_{ij}$, если в $G\ (\widetilde{\xi}_0)$ есть дуга $(i,j) \in A$ с пометкой «+» с $\widetilde{g}_{ij} > 0$. $\widetilde{\xi}_{ij} = \widetilde{\xi}_{0ij}{}^* - \widetilde{g}_{ji}$ для всех $(j,i) \in A$ с пометкой «–» в $G\ (\widetilde{\xi}_0)$ с $\widetilde{g}_{ji} > 0$. Полагаем $\widetilde{\xi}_{ij} = \widetilde{\xi}_{0ij}{}^*$ в противном случае. Следовательно, максимальный допустимый вектор потоков $\widetilde{\xi}_{ij}$ в исходном графе G принимает значение $\widetilde{v} = \widetilde{v}_0 + \widetilde{\omega}$ и обладает минимальной стоимостью.

Алгоритм обладает двумя свойствами:

1. Полученный после выполнения этапа 1 алгоритма максимальный поток в расширенном графе, соответствующий допустимому потоку в исходном графе, является потоком минимальной стоимости.

2. Полученный на этапе 2 поток, не превышающий максимального, является потоком минимальной стоимости.

Доказательство данных свойств вытекает из доказательства отсутствия в конечном инкрементальном графе циклов отрицательной стоимости [1, 7].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978. – 432 с.
2. *Zimmermann H.J. Fuzzy* Set Theory and Its Applications, (2th edition). – Boston/Dordrecht/London: Kluwer Academia Publishers, 1991. – 435 p.
3. *Bershtein L.S., Bozhenuk A.V.*: Fuzzy graphs and fuzzy hypergraphs. In: Dopico, J., de la Calle, J., Sierra, A. (eds.) Encyclopedia of Artificial Intelligence, Information SCI, Hershey, New York (2008). – P. 704-709.
4. *Murty K.G.* Network programming, Prentice Hall, 1992.
5. *Малышев Н.Г., Берштейн Л.С., Боженюк А.В.* Нечеткие модели для экспертных систем в САПР. – М.: Энергоатомиздат, 1991.
6. *Боженюк А.В., Рогушина Е.М., Розенберг И.Н.* Подход к нахождению максимального потока в нечеткой транспортной сети // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 5 (118). – С. 83-88.
7. *Ху Т.* Целочисленное программирование и потоки в сетях. – М.: Мир, 1974. – 520 с.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор В.А. Петраков.

Боженюк Александр Витальевич – Научно-технический центр «Информационные технологии» федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»; e-mail: avb002@yandex.ru; 347922, г. Таганрог, Октябрьская пл., 4; тел.: 88634681937; зав. отделом; д.т.н.; профессор.

Герасименко Евгения Михайловна – инженер.

Розенберг Игорь Наумович – ОАО «Научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт инженеров железнодорожного транспорта» (НИИАС); e-mail: I.kudreyko@gismps.ru; 109029, г. Москва, ул. Нижегородская, 27, стр. 1; тел.: 84959677701; зам. генерального директора; д.т.н.

Bozhenyuk Alexander Vitalievich – Scientific and Technical Center "*INTECH*" of Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education «Southern Federal University»; e-mail: avb002@yandex.ru; 4, Oktyabrskaya square, Taganrog, 347922, Russia; phone: +78634310866; head of department; dr. of eng. sc.; professor.

Gerasimenko Eugenia Michailovna – engineer.

Rozenberg Igor Naymovich – Public corporation “Research and development institute of railway engineers”; e-mail: I.kudreyko@gismps.ru; 27/1, Nizhegorodskaya, Moscow, 109029, Russia; deputy director; dr. of eng. sc.

УДК 658.51

В.А. Петраков, А.С. Сомов

МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УПРАВЛЕНИИ ПРОЕКТОМ

Приведена процедура синтеза и оптимальная стратегия построения социотехнической системы управления проектом из условия достижения ею заданных свойств. Для выполнения проекта это соответствует выбору ресурса, который необходимо направить на проектирование с тем, чтобы достичь эффективных решений по совокупности основных свойств: качество, стоимость, время исполнения и сложность. Приведена постановка задачи многокритериальной оптимизации и пример ее решения для проекта небольшой сложности. Построена математическая модель, определяющая связь времени выполнения работ с затратами. Такая модель позволила найти эффективное управление ресурсами, направленное на достижение минимальных затрат при определенной продолжительности проекта.

Социотехническая система; эффективное решение; управление проектом; процедура синтеза; многокритериальная оптимизация.