13. *Пшихопов В.Х., Медведев М.Ю.* Синтез адаптивных систем управления летательными аппаратами // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 3 (104). – С. 187-196.
14. *Пшихопов В.Х., Медведев М.Ю.* Блочный синтез робастных систем при ограничениях на управления и координаты состояния // Мехатроника, автоматизация и управление. – 2011. – № 1. – С. 2-8.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Р.А. Нейдорф.

**Пшихопов Вячеслав Хасанович** – Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге; e-mail: pshichop@rambler.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 88634371694; кафедра электротехники и мехатроники; зав. кафедрой; д.т.н.

**Медведев Михаил Юрьевич** – e-mail: medv_mihal@rambler.ru. Кафедра электротехники и мехатроники; к.т.н., доцент.

**Гуренко Борис Викторович** – e-mail: boris.gurenko@gmail.com; кафедра электротехники и мехатроники; аспирант.

**Мазалов Андрей Андреевич** – e-mail: anmaz8@list.ru; кафедра электротехники и мехатроники; аспирант.

**Pshixopov Vyacheslav Xasanovich** – Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: pshichop@rambler.ru; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634371694; the department of electrical engineering and mechatronics; department head; dr. of eng. sc.

**Medvedev Mixail Yur’evich** – e-mail: medv_mihal@rambler.ru; the department of electrical engineering and mechatronics; cand. of eng. sc.; associate professor.

**Gurenko Boris Victorovich** – e-mail: boris.gurenko@gmail.com; the department of electrical engineering and mechatronics; postgraduate student.

**Mazalov Andrey Andreevich** – e-mail: anmaz8@list.ru; the department of electrical engineering and mechatronics; postgraduate student.

УДК 681.51(06)

**А.Р. Гайдук, Е.А. Плаксиенко**

# АСТАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ*

*Предложен метод синтеза астатического управления нелинейными объектами. Метод позволяет обеспечить астатизм заданного порядка к неизмеряемым возмущениям. Управление, компенсирующее влияние внешних неизмеряемых возмущений, строится на основе оценок возмущений и их производных по времени. Эти оценки формируются на основе переменных состояния реального объекта управления и дополнительных интеграторов, вводимых в устройство управления, а также на основе оценок переменных состояния некоторой эквивалентной системы. Нелинейное устройство управления включает также наблюдатель состояния указанной эквивалентной системы. Число интеграторов, вводимых в устройство управления, определяется точкой приложения воздействия к объекту и заданным порядком астатизма. Приводится численный пример синтеза.*

*Нелинейный объект; астатизм; эквивалентная система; наблюдатель состояния.*

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-08-01196-а).

**A.R. Gaiduk, E.A. Plaksienko**

## A STATIC CONTROL OF NONLINEAR PLANTS

*The design method of astatic control for nonlinear objects is offered. The method allows to provide the set order of a static to not measured disturbances. The control, compensating influence of external not measured disturbances, is under construction on the basis of disturbances estimations and their derivatives on time. These estimations are formed on the basis of state variables of real control object and the additional integrators entered into the control device, and also on the basis of variables estimations of some specified equivalent system. The nonlinear control device is included also the state observer of the specified equivalent system. The number of the integrators, entered into the control device, is defined by a point of the appendix of disturbances to object and the set order of a static. The numerical example of design is given.*

*Nonlinear plant; a static; equivalent system; the state observer.*

**Введение**. Во многих практических случаях при управлении нелинейными объектами требуется обеспечить некоторый порядок астатизма к внешним неизмеряемым возмущениям. При этом обеспечивается нулевое значение ошибки системы, либо ошибка не превышает заданного значения.

Методы синтеза астатических управлений линейными объектами, обеспечивающих заданный порядок астатизма, хорошо известны [1, 2, 3]. Проблеме синтеза астатических систем управления нелинейными объектами посвящены, в частности, работы [4, 5] и ряд других.

В линейном случае условия астатизма могут быть обеспечены как структурным, так и параметрическим методом. В первом случае в структуре устройства управления системы формируется так называемая спектральная модель внешнего возмущения в виде цепочки интеграторов [2, 3]. Эта модель при наличии возмущения генерирует сигнал, форма которого аналогична форме возмущения и который компенсирует в установившемся режиме влияние как самого возмущения, так и всех его производных. При прекращении возмущения указанный сигнал затухает в силу асимптотической устойчивости замкнутой системы. В этом случае свойство астатизма системы оказывается параметрически грубым [2].

В данной работе рассматриваются нелинейные объекты, для которых применение структурного метода, предусматривающего реализацию спектральной модели возмущения в устройстве управления, затруднительно. Поэтому для компенсации влияния неизмеряемого возмущения используются оценки возмущения и его производных, которые формируются на основе переменных состояния реального объекта и наблюдателя состояния некоторой эквивалентной системы. Таким образом, представленный ниже метод синтеза, фактически является параметрическим. В его основе лежат уравнения объекта управления, представленные в канонической управляемой форме Жордана, и свойства описываемых полиномиальными функциями времени возмущений [2, 3].

**Постановка задачи**. Предположим, нелинейный объект управления (ОУ) с одним возмущением задан своими уравнениями в переменных состояния. Так как в общем случае возмущение может быть приложено в произвольной точке ОУ, то уравнения последнего в отклонениях запишутся следующим образом:

$$\dot{x}_i = \phi_i(\overline{x}_{i+1}), \quad i = \overline{1, i_f - 1},$$
$$\dot{x}_i = \phi_i(\overline{x}_{i+1}, f) = \varphi_i(\overline{x}_{i+1}) + h_i(\overline{x}_{i+1}) f, \quad i = \overline{i_f, n-1},$$
$$\dot{x}_n = \phi_n(x, f) + u, \tag{1}$$

где $x_i$ – доступные измерению переменные состояния ОУ, $i = \overline{1, n}$; $\overline{x}_\nu = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_\nu\ ]^T$ – подвектор размерности $\nu$, составленный из переменных состояния, $\nu = \overline{2, n}$; очевидно, $\overline{x}_n = x$ – вектор состояния ОУ (1); $f = f(t)$ – неизмеряемое ограниченное полиномиальное возмущение, $u$ – управление; $\phi_i(\overline{x}_{i+1})$, $\phi_i(\overline{x}_{i+1}, f)$, $\varphi_i(\overline{x}_{i+1})$, $h_i(\overline{x}_{i+1})$ – нелинейные дифференцируемые скалярные функции, удовлетворяющие в некоторой области $\Omega_x \in R^n$ условиям:

$$\frac{\partial \phi_i(\overline{\boldsymbol{x}}_{i+1})}{\partial x_{i+1}} \neq 0, \quad i = \overline{1, i_f - 1};$$

$$\frac{\partial \varphi_i(\overline{\boldsymbol{x}}_{i+1})}{\partial x_{i+1}} + \frac{\partial h_i(\overline{\boldsymbol{x}}_{i+1})}{\partial x_{i+1}} f \neq 0, \quad i = \overline{i_f, n-1}, \tag{2}$$

$$h_{i_f}(\overline{\boldsymbol{x}}_{i_f+1}) \neq 0. \tag{3}$$

В (1)–(3) $i_f$ – минимальный номер переменных $x_i$, на производные которых возмущение $f = f(t)$ влияет непосредственно.

Задача синтеза заключается в определении управления $u$ объектом (1) таким образом, чтобы положение равновесия $\boldsymbol{x} = 0$ объекта являлось асимптотически устойчивым, т.е. при $f = f(t) \equiv 0$

$$\lim_{t \to \infty} \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0, 0) = 0 \text{ при } \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0, 0) \in \Omega_x \text{ и всех } t \geq 0. \tag{4}$$

При этом должно выполняться условие астатизма порядка $\nu_f$ к неизмеряемому возмущению $f = f(t)$, т.е. если степень полиномиального возмущения $f = f(t)$ равна $\nu_f - 1$, то ошибка системы – переменная $x_1$ – должна удовлетворять условию

$$\lim_{t \to \infty} x_1(t, x_0, f) = 0 \quad \text{при} \quad x(t, x_0, f) \in \Omega_x, \ t \geq 0 \tag{5}$$

и являться постоянной, если степень возмущения $f = f(t)$ равна $\nu_f$. В равенствах (4) и (5) $x_0$ – вектор начальных условий. При этом предполагается, что условия (2) и (3) выполняются при некоторых ограниченных вариациях $\Delta_f(t)$ возмущения $f(t)$ как по форме, так по интенсивности.

**Решение задачи**. Так как по условиям задачи неравенства (2) выполнены, то в соответствии с определением управляемой формы Жордана (УФЖ) уравнения (1) представлены в этой форме [2, 3]. Поэтому с помощью соотношений, приведенных в [3. С. 386-387], можно построить стабилизирующее управление $u = u(x, f, \dot{f}, \ldots)$, при котором выполняются условия (4) и (5) при любом ограниченном и измеряемом $f = f(t)$. Как нетрудно установить, это управление будет зависеть от возмущения $f = f(t)$ и ряда его производных по времени.

Так как по условиям рассматриваемой задачи возмущение $f(t)$ не измеряется, то для реализации указанного управления необходимо найти оценки как самого возмущения, так и $\nu_f - 1$ его производных по времени.

Известно, что если возмущение $f(t)$ описывается полиномиальной функцией времени степени $\nu_f - 1$, то его $K(p)$-изображением является полином $F(p) = p^{\nu_f}$, где $p = d/dt$, поэтому примем, что выполняется условие

$$n = \nu_f + i_f. \tag{6}$$

При невыполнении условия (6) для заданного ОУ порядка $\tilde{n}$ уравнение $\dot{x}_{\tilde{n}} = \phi_{\tilde{n}}(\overline{x}_{\tilde{n}}, f) + \tilde{u}$ его модели (1) заменяется уравнением $\dot{x}_{\tilde{n}} = \phi_{\tilde{n}}(\overline{x}_{\tilde{n}}, f) + x_{\tilde{n}+1}$, а модель дополняется интегрирующими звеньями: $\dot{x}_{\tilde{n}+1} = x_{\tilde{n}+2}$, $\ldots, \dot{x}_n = u$ так, чтобы условие (6) выполнялось. В результате этого образуется расширенный управляемый ОУ порядка $n$. Подчеркнем, что если исходный ОУ порядка $\tilde{n}$ удовлетворяет условиям (2), (3), то расширенный указанным образом ОУ также будет удовлетворять этим условиям.

Для получения оценок возмущения $f(t)$ и его производных по времени, а также для построения искомого стабилизирующего управления, в данной работе, как и в работах [2, 3], вводятся новые переменные состояния $w_i$, но более простым, чем в указанных работах способом, а именно: $w_1 = x_1$,

$$w_i = \dot{w}_{i-1},\ i = \overline{2, n};\ \text{причем}\ \dot{w}_n = u_1,\ \text{а}\ w_{i_f} = \begin{cases} x_1, & \text{если}\ i_f = 1, \\ \dot{w}_{i_f - 1}, & \text{если}\ i_f > 1, \end{cases} \tag{7}$$

где $u_1$ – вспомогательное управление; $w$ – вектор переменных $w_i$, $i = \overline{1, n}$. В векторно-матричной форме система (7), очевидно, имеет вид

$$\dot{w} = \Lambda w + e^n u_1, \quad x_1 = e_1 w, \tag{8}$$

где $\Lambda = [\lambda_{ij}]$, причем $\lambda_{i,i+1} = 1$, $i = \overline{1, n-1}$, а все остальные $\lambda_{ij}$ равны нулю; $e^n$ – $n$-й столбец, а $e_1$ – 1-я строка единичной $n \times n$-матрицы. Фактически, матрица $\Lambda = [\lambda_{ij}]$ является клеткой Жордана с нулевыми собственными числами. Подчеркнем, что по существу задача синтеза заключается в отыскании такого управления $u$, при котором система (8) будет эквивалентной замкнутой системе управления объектом (1).

С помощью уравнений (1) и (7) несложно установить, что если $i_f > 1$, то выражения для переменных $w_i = \dot{w}_{i-1} = w_i(\overline{x}_i)$, $i = \overline{1, i_f}$ не зависят от возмущения $f$, а выражения для переменной $w_{i_f+1}$ и всех последующих зависят от $f$, причем

$$w_{i_f+1} = \dot{w}_{i_f}(\overline{x}_{i_f}) = \psi_{i_f+1}(\overline{x}_{i_f+1}) + \xi(\overline{x}_{i_f+1}) f = w_{i_f+1}(\overline{x}_{i_f+1}, f), \tag{9}$$

где

$$\psi_{i_f+1}(\overline{x}_{i_f+1}) = \sum_{\mu=1}^{i_f-1} \frac{\partial w_{i_f}(\overline{x}_{i_f})}{\partial x_\mu} \phi_\mu(\overline{x}_{\mu+1}) + \frac{\partial w_{i_f}(\overline{x}_{i_f})}{\partial x_{i_f}} \varphi_{i_f}(\overline{x}_{i_f+1}), \tag{10}$$

$$\xi(\overline{x}_{i_f+1}) = \prod_{\mu=1}^{i_f-1} \frac{\partial \phi_\mu(\overline{x}_{\mu+1})}{\partial x_{\mu+1}} h_{i_f}(\overline{x}_{i_f+1}). \tag{11}$$

Повторяя эти действия при $i > i_f + 1$, получим

$$w_i = \psi_i(\overline{x}_i, \overline{f}_{i-i_f-2}) + \xi(\overline{x}_{i_f+1}) f_{(i-i_f-1)} = w_i(\overline{x}_i, \overline{f}_{i-i_f-1}), \quad i = \overline{i_f+1, n}, \tag{12}$$

где $f_{(i)}$ – обозначение $i$-й производной по времени воздействия $f(t)$; $\overline{f}_i = [f_{(0)}, f_{(1)}, ..., f_{(i)}]^T$ – подвектор производных, причем $\overline{f}_0 = f(t)$. Если же $i_f = 1$, то функции $\psi_{i_f+1}(\overline{x}_i, \overline{f}_{i_f+1})$ и $\xi(\overline{x}_{i_f+1})$ определяются непосредственно по первому уравнению (1).

Переменная $x_1$ по условиям задачи синтеза доступна измерению, поэтому эквивалентная система уравнений (8) является вполне наблюдаемой, что позволяет синтезировать для неё наблюдатель Калмана, который описывается уравнением

$$\dot{\hat{w}} = \tilde{\Lambda}\hat{w} + e^n u_1 + l x_1, \tag{13}$$

где $\hat{w} = [\hat{w}_1 \ \hat{w}_2 \ \dots \ \hat{w}_n]^T$ – вектор оценок $\hat{w}_i$ переменных $w_i$; $l$ – вектор, выбираемый по условиям устойчивости матрицы $\tilde{\Lambda} = \Lambda - l e_1$ и желаемой скорости сходимости вектора $\hat{w}$ к вектору $w$. Методы определения этого вектора хорошо известны. Один из них приведен, например, в [3. С. 339].

Так как по условиям рассматриваемой задачи синтеза неравенство (3) выполняется, то из соотношений (9)–(12) с учетом оценок $\hat{w}_i$, формируемых наблюдателем (13), можно вывести следующие оценки возмущения и его производных:

$$\hat{f} = [\hat{w}_{i_f+1} - \psi_{i_f+1}(\overline{\boldsymbol{x}}_{i_f+1})] / \xi(\overline{\boldsymbol{x}}_{i_f+1}), \ \dots,$$

$$\hat{f}_{(i)} = [\hat{w}_{i+i_f+1} - \psi_{i+i_f+1}(\overline{\boldsymbol{x}}_{i+i_f+1}, \hat{\overline{\boldsymbol{f}}}_{i-1})] / \xi(\overline{\boldsymbol{x}}_{i_f+1}), \ \dots.$$

$$\hat{f}_{(n-i_f-1)} = [\hat{w}_n - \psi_n(\overline{\boldsymbol{x}}_n, \hat{\overline{\boldsymbol{f}}}_{n-i_f-2})] / \xi(\overline{\boldsymbol{x}}_{i_f+1}), \tag{14}$$

где $\hat{f}_{(i)}$ и $\hat{\overline{f}}_i$ – обозначение оценок $i$-й производной $f_{(i)}$ и подвектора $\overline{f}_i$ производных $f_{(0)}, f_{(1)}, ..., f_{(i)}$.

В соответствии с работой [3. С. 387] вводятся также функции:

$$\gamma_1(x, \hat{f}) = \prod_{\mu=1}^{i_f-1} \frac{\partial \phi_\mu(\overline{x}_{\mu+1})}{\partial x_{\mu+1}} \prod_{\mu=i_f}^{n-1} \frac{\partial \phi_\mu(\overline{x}_{\mu+1}, \hat{f})}{\partial x_{\mu+1}} \Big|_{f=\hat{f}}, \tag{15}$$

$$\gamma_2(x, \hat{\overline{f}}_{n-i_f}) = \left[ \sum_{\mu=1}^{n-1} \frac{\partial w_n(x, \overline{f}_{n-i_f-1})}{\partial x_\mu} \tilde{\phi}_\mu(\overline{x}_{\mu+1}) + \sum_{\mu=1}^{n-i_f-1} \frac{\partial w_n(x, \overline{f}_{n-i_f-1})}{\partial f_{(\mu)}} f_{(\mu+1)} \right] \Big|_{\overline{f}_i = \hat{\overline{f}}_i}. \tag{16}$$

Здесь для краткости обозначено $\tilde{\phi}_i(\overline{x}_{i+1}) = \phi_i(\overline{x}_{i+1}), i = \overline{1, i_f}$ и $\tilde{\phi}_i(\overline{x}_{\mu+1}) = \phi_i(\overline{x}_{i+1}, f)$, $i = \overline{i_f, n}$. Подчеркнем, что в силу условий (2) функция $\gamma_1(x, \hat{f}) \neq 0$ при всех $x(t, x_0, f) \in \Omega_x$.

Пусть в выражениях (7), (8) и (13) управление $u_1 = -k^T \hat{w}$, где $k^T = [\delta_0 \ \delta_1 \dots \delta_{n-1}]$, а $\delta_i$ – коэффициенты некоторого устойчивого полинома

$D(p)=\delta_0+\delta_1 p+\ldots-\delta_{n-1}p^{n-1}+p^n$, причем $\min\limits_i\left|\mathrm{Re}\, p_i^D\right| << \min\limits_i\left|\mathrm{Re}\, p_i^{\tilde\Lambda}\right|$, где $p_i^D$ и $p_i^{\tilde\Lambda}$ – корни полиномов $D(p)$ и $\tilde\Lambda(p)=\det(pE-\tilde\Lambda)$. Тогда управление, разрешающее задачу синтеза астатического управления нелинейным объектом (1), определяется следующим утверждением.

**Утверждение**. Если выполняются условия (2), (3) и (6), переменные $w_i$, $i=\overline{1,n}$ определяются соотношениями (7), матрица $\tilde\Lambda$ в (13) и полином $D(p)$ – устойчивы, а управление в системе (1) определяется выражением

$$u=\gamma_1^{-1}(x,\hat f)[-k^T\hat w-\gamma_2(x,\hat{\bar f}_{n-i_f})]-\phi_n(x,\hat f), \tag{17}$$

то переменные системы (1), (13), (17) удовлетворяют условиям (4) и (5).

Возмущение $f=f(t)$, вообще говоря, может являться эквивалентным возмущением, отражающим суммарное влияние нескольких возмущений, приложенных к объекту управления. Однако и в этом случае оно должно быть полиномиальным.

Управление, определяемое выражением (17), является динамическим. Если порядок исходного ОУ удовлетворяет условию (6), то соответствующее УУ описывается выражениями (13) и (17), а его порядок будет равен порядку объекта. Если же исходный ОУ порядка $\tilde n$ не удовлетворяет условию (6), то соответствующее УУ описывается уравнениями: $\tilde u=x_{\tilde n}+1$, $\dot x_{\tilde n+1}=x_{\tilde n+2}$, …, $\dot x_n=u$, (13) и выражением (17), а его порядок будет равен $2n-\tilde n$.

В соответствии с [2, 3], если управление $u$ объекта (1), где $n=\nu_f+i_f$, определяется выражением (17), то при отсутствии возмущения или же при наличии оценок возмущения и его производных по времени от $f_{(1)}$ до $f_{(n-i_f)}=f_{(\nu_f)}$ все переменные этого объекта (1) стремятся к нулю при $t\to\infty$. С другой стороны, соотношениями (14) определяются оценки производных только до $f_{(\nu_f-1)}$. Следовательно, ошибка системы (1), (13), (17) зависит только от производных $f_{(\nu_f)}$, $f_{(\nu_f+1)}$, $f_{(\nu_f+2)}$, …. и т.д.

Однако производная $f_{(\nu_f)}$ и все старшие производные $f_{(\nu_f+i)}$, $i=1,2,\ldots$ полиномиального возмущения степени $\nu_f-1$ равны нулю. Если же степень полиномиального возмущения равна $\nu_f$, то производная $f_{(\nu_f)}=Const$, а все старшие производные $f_{(\nu_f+i)}$, $i=1,2,\ldots$ равны нулю. Следовательно, синтезированная нелинейная система (1), (13), (17) удовлетворяет условиям (4) и (5), что соответствует приведенному выше утверждению.

Метод синтеза, вытекающий из полученных результатов, проиллюстрируем на численном примере синтеза астатического управления нелинейным объектом второго порядка.

**Пример**. Для объекта, описываемого уравнениями

$$\dot x_1=x_2+x_2^3+f\,,\qquad \dot x_2=\tilde u\,, \tag{18}$$

найти управление, обеспечивающее астатизм второго порядка к неизмеряемому возмущению $f=f(t)$. Переменные состояния $x_1$ и $x_2$ измеряются.

Порядок ОУ (18) равен 2, $\partial\phi_1(\bar{x}_2, f)/\partial x_2 = 1 + 3x_2^2 \neq 0$, т.е. в данном случае условие (2) выполняется, поэтому уравнения этого объекта имеют УФЖ. Причем $\tilde{n} = 2$, $i_f = 1$, а требуемый порядок астатизма $\nu_f^* = 2$. Поэтому условие (6) при $n = \tilde{n} = 2$ и $\nu_f = \nu_f^* = 2$ не выполняется. В связи с этим полагается $\tilde{u} = x_3$, а ОУ (18) дополняется одним интегратором (в дальнейшем он будет отнесен к устройству управления). Это приводит к следующим уравнениям расширенного ОУ:

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_2^3 + f = \phi_1(x_2, f), \quad \dot{x}_2 = x_3 = \phi_2(x_3), \quad \dot{x}_3 = u. \tag{19}$$

Здесь $n = 3$, $\phi_3(x, f) = 0$, $h_1(x, f) = 1$, условия (2) выполняются по-прежнему, так как $\partial\phi_2(\bar{x}_3, f)/\partial x_3 = 1$.

Таким образом, расширенный нелинейный объект (19) удовлетворяет условиям (2), (3) и (6) в области $\Omega_x = R^3$. Следовательно, задача синтеза астатического управления объектом (19) имеет решение.

Для решения задачи по формулам (7) вводятся переменные $w_i$, а затем с учетом (19) находится их представление в виде (9) и (11): $w_1 = x_1$, $w_2 = x_2 + x_2^3 + f$, $w_3 = (1 + 3x_2^2)x_3 + f_{(1)}$. Так как $n = 3$, то для построения наблюдателя (13) выбирается полином $\tilde{\Lambda}(p) = p^3 + 15p^2 + 75p + 125$. Далее с помощью соотношений, приведенных в [3. С. 341], находятся уравнения наблюдателя (13) в виде:

$$\dot{\hat{w}} = \begin{bmatrix} -15 & 1 & 0 \\ -75 & 0 & 1 \\ -125 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{w} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 15 \\ 75 \\ 125 \end{bmatrix} x_1. \tag{20}$$

В данном случае $i_f = 1$, поэтому, путем сравнения найденных выражений для $w_2$ и $w_3$ с (9)–(11), находятся величины $\xi(\bar{x}_2) = 1$, $\psi_2(\bar{x}_2) = x_2 + x_2^3$, $\psi_3(\bar{x}_3) = (1 + 3x_2^2)x_3$, а затем по (14) – оценки: $\hat{f} = \hat{w}_2 - x_2 - x_2^3$ и $\hat{f}_{(1)} = \hat{w}_3 - (1 + 3x_2^2)x_3$. Далее с помощью (15) и (16) находятся функции:

$$\gamma_1(x, \hat{f}) = 1 + 3x_2^2, \qquad \gamma_2(x, \hat{\bar{f}}_2) = 6x_2x_3^2 + \hat{f}_{(2)}.$$

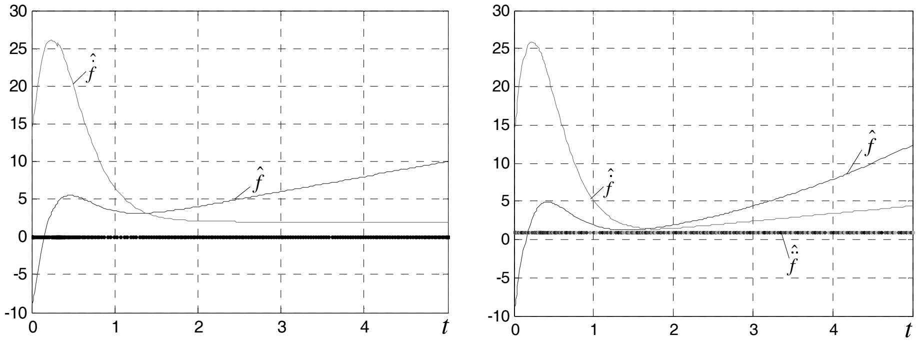
Так как требуемый порядок астатизма $\nu_f^* = 2$, то можно не оценивать вторую производную $f_{(2)}$, полагая $\hat{f}_{(2)} = 0$. Тогда $\gamma_2(x, \bar{f}_2) = 6x_2x_3^2$.

Управление $u_1 = -k^T\hat{w}$ в (7), (8) и (13) должно выбираться так, чтобы переходные процессы в системе управления протекали медленнее, чем в наблюдателе (20). С этой целью вектор $k$ принимается в виде $k^T = [27 \quad 27 \quad 9]$, т.е. $u_1 = -27\hat{w}_1 - 27\hat{w}_2 - 9\hat{w}_3$. В результате, с учетом выражения (17), находим, что искомое устройство управления заданным нелинейным объектом (18) описывается уравнениями (20) и равенствами:

$$\tilde{u} = x_3, \quad \dot{x}_3 = -\left[27\hat{w}_1 + 27\hat{w}_2 + 9\hat{w}_3 + 6x_2x_3^2\right]/(1 + 3x_2^2). \tag{21}$$

На рис. 1 приведены графики оценок возмущений $f(t) = 2t$ и $f(t) = 0{,}5t^2$, а также их производных по времени, полученные в результате моделирования в

MATLAB системы управления, включающей нелинейный объект управления (18), синтезированное устройство управления (20), (21), при начальных условиях $x_0 = [1 \quad 2 \quad -1]^T$, $\hat{w}_0 = [0 \quad 0 \quad 0]^T$.

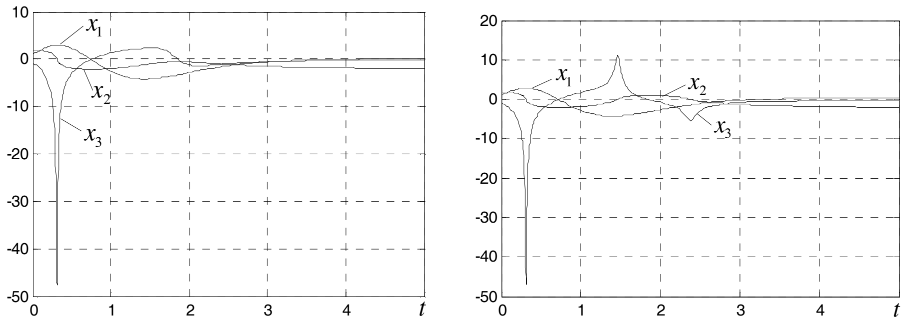



а б

*Рис. 1. Оценки возмущения и его производных: а – при* $f(t) = 2t$;
*б – при* $f(t) = 0,5t^2$

Как видно, и возмущение, приложенное к объекту, и его производные оцениваются достаточно быстро и точно. Практически при $t \geq 2$ с оценки совпадают с оцениваемыми функциями.

На рис. 2 приводятся графики переменных состояния ОУ (19), также полученные в результате моделирования в MATLAB нелинейной системы управления при указанных выше начальных условиях и возмущениях. Отметим, что переменная $x_3$ фактически является управлением $\tilde{u}$ заданного объекта (18).




а б

*Рис. 2. Переменные состояния при возмущениях: а –* $f = 2t$; *б –* $f = 0,5t^2$

Из графика ошибки системы – переменной $x_1(t)$ – следует, что при действии на систему линейного возмущения $f = 2t$ ошибка системы равна нулю, в то же время при $f = 0,5t^2$ она становится не нулевой, но постоянной и равной 0,36. Таким образом, найденное управление обеспечивает второй порядок астатизма замкнутой нелинейной системы управления по отношению к неизмеряемому возмущению $f(t)$, что соответствует заданным требованиям.

**Заключение**. Предложенный метод синтеза астатических управлений для нелинейных объектов, уравнения которых представлены в управляемой форме Жордана, а переменные состояния доступны измерению, позволяет обеспечить заданный порядок астатизма к внешним возмущениям. В общем случае устройство управления включает ряд интеграторов и наблюдатель состояния системы, которая эквивалентна синтезируемой в специальном базисе, что позволяет формировать оценки внешнего возмущения и его производных по времени.

Требование, представления уравнений объектов в управляемой форме Жордана не является жестким ограничением, так как очень многие реальные объекты описываются уравнениями, которые имеют эту форму или могут быть приведены к ней путем простой замены переменных состояния [2]. К таким объектам относятся, например, объекты, рассмотренные в [4, 5].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник. Т. 3: Синтез регуляторов систем автоматического управления / Под ред. Пупкова К.А. и Егупова Н.Д.. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э Баумана, 2004.
2. *Гайдук А.Р.* Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (Полиномиальный подход). – М.: Физматлит, 2011.
3. *Гайдук А.Р., Беляев В.Е., Пьявченко Т.А.* Теория автоматического управления в задачах и примерах с решениями в MATLAB. – СПб.: Лань, 2011.
4. *Плаксиенко Е.А.* Некоторые способы управления производством на основе модели Солоу // Материалы XII научно-практической конференции ТИУиЭ. – Таганрог: Изд-во ТИУиЭ, 2011. – С. 54-56.
5. *Нейдорф Р.А.* Проектирование систем автоматического управления химико-технологическими процессами. – Новочеркасск: Изд-во НПИ, 1983.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Р.А. Нейдорф.

**Гайдук Анатолий Романович –** Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге; e-mail: gaiduk_2003@mail.ru; 347904, г. Таганрог, ул. Слесарная 26, кв. 2; тел.: 88634626287; кафедра систем автоматического управления; д.т.н.; профессор.

**Плаксиенко Елена Анатольевна –** Таганрогский институт управления и экономики; e-mail: pumka@mail.ru; 347900, г. Таганрог, ул. Петровская, 45, тел: 88634362583; кафедра математики и информатики; к.т.н.; доцент.

**Gaiduk Anatoly Romanovich –** Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: gaiduk_2003@mail.ru; 26, Slesarnaya street; app. 2; Taganrog, 347904, Russia; phone: +78634626287; the department of automatic control systems; dr. of eng. sc.; professor.

**Plaksienko Elena Anatolievna –** Educational Establishment of Higher Vocational Education «Taganrog Management and Economy Institute»; e-mail: pumka@mail.ru; 45, Petrovskaya street, Taganrog, 347900, Russia; phone: +78634362583; the department of mathematic and informatics; cand. of eng. sc.; associate professor.