Раздел III. Системы управления

УДК 519.283

Е.Я. Рубинович

МАКСИМИЗАЦИЯ ДОВЕРИТЕЛЬНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ ПРИ СТРОБИРОВАНИИ ЛОКАЦИОННОГО СИГНАЛА*

В докладе в дискретном времени ставится и решается задача оптимизации процесса позиционирования вложенной последовательности стробирующих окон при наблюдении с помощью локационного сенсора за движущейся целью в процессе ее преследования. Показано, что при гауссовском законе распределения помех в канале наблюдения (обычное допущение для локационных систем), задача сводится к максимизации доверительной вероятности попадания проекции вектора состояния цели в заданное окно. Решением задачи является конкретная рекуррентная процедура пошаговой оптимизации.

Локация; стробирование; преследование.

E.Ya. Rubinovich

CONFIDENCE PROBABILITY MAXIMIZATION UNDER SONAR SIGNAL STROBING

In discrete time, a problem of optimal strobing gate positioning for a pursuit problem is considered in the case when a pursuer has a sensor of radar or sonar type. It is shown that on the hypothesis of Gaussian distribution law for noise process in the observation channel (an ordinary assumption in the case of location system) the original problem could be reduced to an auxiliary problem of confidence probability maximization for localization of the state vector projection into given window. Concrete recursive step by step optimization procedure is solved this problem.

Location; strobing; pursuit.

Введение. Для увеличения помехозащищенности канала приема отраженных от цели эхосигналов в радиолокации используют стробирование, т.е. выделение временного окна, внутри которого разрешено обрабатывать принимаемые сигналы. По мере уточнения фазовых координат цели в процессе слежения это временное окно постепенно сужают, еще больше снижая уровень внешних помех [1].

В данной работе в дискретном времени решается задача оптимизации процесса позиционирования вложенной последовательности стробирующих окон при наблюдении за прямолинейно движущейся целью E в процессе ее преследования на плоскости XY. Эволюция вектора состояния цели θ_t описывается линейным разностным уравнением с неизвестным начальным условием θ_0, распределенным по нормальному закону. Наблюдения – линейны, с аддитивной гауссовской помехой, как в классической калмановской схеме. Предполагается, что преследователь P движется прямолинейно с, вообще говоря, переменной скоростью u. Движение осуществляется вдоль заданной оси X, вдоль которой ориентирована и диаграмма направленности локационной системы преследователя.

* Работа выполнена при поддержке Программы Президиума РАН «Динамические системы и теория управления».

Постановка задачи. Задача состоит в максимизации доверительной вероятности $P\{x_t - l_t < \lambda^* \theta_t < x_t + l_t\}$ попадания проекции вектора θ_t в окно $[x_t - l_t,\, x_t + l_t]$ длины $2l_t$ с центром в точке x_t на оси *X*, где λ – единичный вектор, направленный вдоль оси *X*, $*$ – символ транспонирования. Максимизация осуществляется путем выбора центров позиционирования x_t окон $[x_t - l_t,\, x_t + l_t]$, (*t=0,1,2,…*) при выполнении условий монотонной вложенности двух последовательных окон $[x_{t+1} - l_{t+1},\, x_{t+1} + l_{t+1}]$ <$[\mathrm{x}_t - l_t,\, x_t + l_t]$. Последовательность $\{l_t\}$, *t=0,1,2,…*, задающая ширину окон, предполагается заданной (рис. 1).

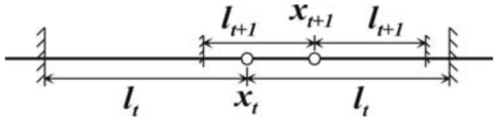

Рис. 1. Последовательность вложенных стробирующих окон

Данная задача допускает точное аналитическое решение, которое приводится в работе. Рассматриваются два иллюстративных примера.

Близкая постановка с терминальным критерием для непрерывного времени содержится в [2], где приводится субоптимальное решение.

Геометрия задачи представлена на рис. 2, где P_t и E_t – текущие положения преследователя и цели соответственно (P_0 и E_0 их начальные положения). Рассматриваются два случая: 1) вектор v скорости цели известен и 2) v – неизвестный случайный двухкомпонентный вектор. При этом: а) вектор $u = \mathrm{const}$ или б) вектор $u = u_t$ – известная функция времени.

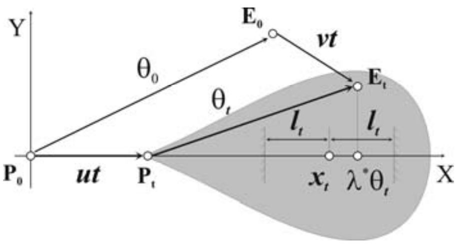

Рис. 2. Геометрия задачи

Основные результаты. Задача в общем виде допускает следующую математическую формализацию. На вероятностном пространстве (Ω, F, P) заданы: ненаблюдаемый процесс $\theta \triangleq (\theta_t)_{t=0,1,2,\ldots} \in R^n$, где $\theta_0 \sim \mathcal{N}(m, \gamma)$ и

$$\theta_{t+1} = a(t)\theta_t + b(t), \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

процесс наблюдений $\xi \triangleq (\xi_t)_{t=1,2,\ldots} \in R^k$, где $\xi_0 = 0$ и

$$\xi_{t+1} = A(t)\theta_t + B(t)W_{t+1}. \tag{2}$$

Здесь $W \triangleq (W_t)_{t=1,2,\ldots} \in R^r$ – дискретный белый шум, а матрицы $a(t), b(t), A(t), B(t)$ заданы. Обозначая $\varphi(t) \triangleq \Phi(t,0)$ и $h(t) \triangleq \sum_{1 \le \tau \le t} \Phi(t,\tau) b(\tau - 1)$, где $\Phi(t,s) \triangleq \prod_{s \le \tau < t} a(\tau)$ с $\Phi(t,t) = I$ – единичная матрица, можно представить решение уравнения (1) в виде

$$\theta_t = \varphi(t)\theta_0 + h(t). \tag{3}$$

Таким образом, задача оценки вектора θ_t сводится к оценке вектора θ_0. Это замечание позволяет сформулировать упомянутую выше оптимизационную задачу в следующем виде. Определить процедуру выбора последовательности $x \triangleq (x_t)_{t=0,1,2,\ldots}$ центров вложенных интервалов (окон)

$$[x_{t+1}-l_{t+1},\, x_{t+1}+l_{t+1}] \subseteq [x_t - l_t,\, x_t + l_t] \tag{4}$$

так, чтобы максимизировать платежную функцию (плату), имеющую смысл доверительной вероятности

$$P\{\lambda^*\theta_0 \in [x_t - l_t,\, x_t + l_t]\}. \tag{5}$$

Данную задачу представм как задачу оптимального стохастического управления согласно следующей рекурсивной процедуре.

Шаг 1. Введем управление центрами x_t стробирующих окон. Согласно (4)

$$x_{t+1} = x_t + \alpha_t, \tag{6}$$

где $\alpha \triangleq (\alpha_t)_{t=0,1,2,\ldots}$ – управляющая последовательность, удовлетворяющая ограничениям

$$\alpha_t \in [-\Delta l_t,\, \Delta l_t], \quad \text{где} \quad \Delta l_t \triangleq -(l_{t+1} - l_t).$$

Шаг 2. Перепишем пошаговую платежную функцию (5) в виде

$$J(\alpha, t) = P\{|x_t - \lambda^*\theta_0| \le l_t\} \to \sup_{\alpha_t},$$

или в эквивалентной форме

$$J(\alpha, t) = \mathbf{E}\,\mathbf{E}\left(I\{|x_t - \lambda^*\theta_0| \le l_t\}/\mathcal{F}_t^{\xi}\right) \to \sup_{\alpha_t},$$

где $I\{\cdot\}$ – индикаторная функция, $\mathbf{E}$ – символ математического ожидания и $\mathcal{F}_t^{\xi} = \sigma\{\xi_s,\, s \le t\}$ – σ-алгебра, порожденная предыдущими наблюдениями $\xi_1, \ldots, \xi_t$.

Шаг 3. Положим формально $\theta_0 = \theta_0(t)$ с уравнением динамики

$$\theta_0(t+1) = \theta_0(t), \qquad \text{где} \quad \theta_0(0) \sim \mathcal{N}(m, \gamma), \tag{7}$$

и введем матричные функции

$$A_1(t) \triangleq A(t)\Phi(t,0) \quad \text{и} \quad A_0(t) \triangleq A(t)h(t).$$

В новых обозначениях процесс наблюдений (2) принимает вид

$$\xi_{t+1} = A_0(t) + A_1(t)\theta_0(t) + B(t)W_{t+1}, \quad \xi_0 = 0. \tag{8}$$

Двухкомпонентный частично наблюдаемый процесс (7), (8) находится в рамках калмановской схемы фильтрации и его условные средние

$$m_t = \mathbf{E}\left(\theta_0/\mathcal{F}_t^{\xi}\right), \quad \gamma_t = \mathbf{E}\left[(\theta_0 - m_t)(\theta_0 - m_t)^*/\mathcal{F}_t^{\xi}\right]$$

удовлетворяют рекуррентным уравнениям (фильтр Калмана)

$$\begin{cases} m_{t+1} = m_t + \gamma_t A_1^*(t) D_t^+ \widetilde{W}_{t+1}, & m_0 = m, \\ \gamma_{t+1} = \gamma_t - \gamma_t A_1^*(t)[D_t D_t^*]^+ A_1(t)\gamma_t, & \gamma_0 = \gamma, \end{cases}$$

где $D_t \triangleq [B(t)B^*(t) + A_1(t)\gamma_t A_1^*(t)]^{1/2}$, а $\widetilde{W} \triangleq (\widetilde{W}_t)_{t=1,2,\ldots}$ – обновляющий процесс – независящая от $\mathcal{F}_t^{\xi}$ последовательность независимых гауссовских векторов. Здесь верхний индекс + означает псевдообращение.

Шаг 4. Перепишем уравнение для платы $J(\alpha, t)$ в интегральном виде, учтя, что $P\{\lambda^*\theta_0 \le \vartheta/\mathcal{F}_t^{\xi}\} \sim \mathcal{N}(\lambda^* m_t, \sigma_t^2)$, где $\sigma_t^2 = \lambda^*\gamma_t\lambda$. Имеем

$$J(\alpha, t) = \mathbf{E}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t}\int_{x_t - l_t}^{x_t + l_t} \exp\left(-\frac{(z - \lambda^* m_t)^2}{2\sigma_t^2}\right) dz\right\}$$

или, полагая $r = (z - \lambda^* m_t)/\sigma_t$,

$$J(\alpha, t) = \mathbf{E}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{(x_t - \lambda^* m_t - l_t)/\sigma_t}^{(x_t - \lambda^* m_t + l_t)/\sigma_t} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) dr\right\}. \tag{9}$$

Шаг 5. Сделаем еще одно преобразование платы (9). Для этого введем вспомогательный процесс

$$y_t \triangleq x_t - \lambda^* m_t, \quad \text{где} \quad y_0 = x_0 - \lambda^* m.$$

Тогда $y_{t+1} = x_{t+1} - \lambda^* m_{t+1}$ и, следовательно,

$$y_{t+1} - y_t = (x_{t+1} - x_t) - \lambda^*(m_{t+1} - m_t) = \alpha_t - \lambda^*\gamma_t A_1^*(t) D_t^+ \widetilde{W}_{t+1}.$$

Окончательно, эволюция y_t описывается уравнением

$$y_{t+1} = y_t + \alpha_t - \varepsilon_{t+1}, \quad \text{где} \quad \varepsilon_{t+1} \triangleq \lambda^* \gamma_t A_1^*(t) D_t^+ \widetilde{W}_{t+1}.$$

Здесь ε_{t+1}, $(t = 0, 1, 2, \dots)$ – независимые гауссовские величины с нулевым средним и дисперсией $\varrho_t^2 \triangleq \lambda^* \gamma_t A_1^*(t)(D_t D_t^*)^+ A_1(t) \gamma_t \lambda$.

В терминах процессов y_t и ε_{t+1} плата (9) допускает представление

$$J(\alpha, t) = \mathbf{EE}\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(y_{t-1}+\alpha-\varepsilon_t-l_t)/\sigma_t}^{(y_{t-1}+\alpha-\varepsilon_t+l_t)/\sigma_t} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) dr \Big/ y_{t-1} = y \right\}.$$

Заменяя здесь r на r_1/σ_t и усредняя по $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \varrho_{t-1}^2)$, получаем

$$J(\alpha, t) = C \int_{-\infty}^{\infty} \int_{y+\alpha-r_2-l_t}^{y+\alpha-r_2+l_t} \exp\left(-\frac{r_1^2}{2\sigma_t^2}\right) \exp\left(-\frac{r_2^2}{2\varrho_{t-1}^2}\right) dr_1 dr_2, \tag{10}$$

где $C \triangleq 1/(2\pi\sigma_t \varrho_{t-1})$. Далее, используя одноступенчатую функцию $\chi(\theta) \triangleq I\{[0, \infty)\}$, перепишем (10) в окончательном виде

$$J(\alpha, t) = C \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(r_1 - y - \alpha + r_2 + l_t) \chi(y + \alpha - r_2 + l_t - r_1) \times$$
$$\times \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{r_1^2}{\sigma_t^2} + \frac{r_2^2}{\varrho_{t-1}^2} \right) \right\} dr_1 dr_2. \tag{11}$$

Таким образом, задача свелась к интегрированию двумерной гауссовской плотности вдоль полосы шириной $2l_t$, сдвинутой на y относительно нуля.

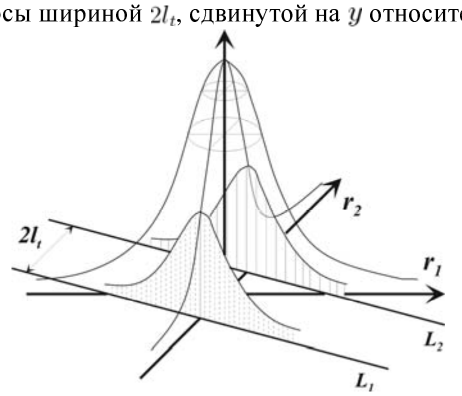

Рис. 3. Гауссовский интегрант платы (11).

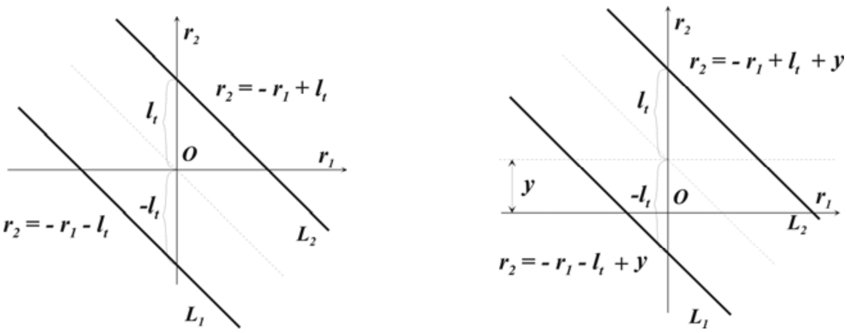

Рис. 4. Не сдвинутая (слева) и сдвинутая на y (справа) полосы интегрирования

Шаг 6. Из представления (11) следует, что максимизация платы $J(\alpha, t)$ осуществляется компенсацией сдвига y, что реализует закон управления

$$\alpha_t = \begin{cases} -y_t, & \text{если} \quad |y_t| \le \Delta l_t = l_t - l_{t+1}, \\ -\Delta l_t \operatorname{sign} y_t, & \text{если} \quad |y_t| > \Delta l_t. \end{cases} \quad (12)$$

Шаг 7. По данному α_t выбор центра x_{t+1} очередного стробирующего окна осуществляется рекуррентным образом по формуле (6):

$$x_{t+1} = x_t + \alpha_t$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Holt M.D.* Low-power – low-cost undersea telemetry system // Proc. of MTS/IEEE Oceans. 2005. – С. 1-6.
2. *Liptser R.Sh.* About confidence probability maximization by incomplete data // Кибернетика. – Киев, 1966. – № 1. – С. 83-86.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор В.Х. Пшихопов.

Рубинович Евгений Яковлевич – Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова Российской Академии наук; e-mail: rubinvch@ipu.rssi.ru; 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65; тел.: 84953349111; зам. директора по научной работе; д.т.н.; профессор.

Rubinovich Evgeny Yakovlevich – Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences; e-mail: rubinvch@ipu.rssi.ru; 65, Profsoyuznaya street; Moscow, 117997, Russia; phone: +74953349111; the deputy director on R&D; dr. of eng. sc.; professor.

УДК 681.513

В.Х. Пшихопов, М.Ю. Медведев, Б.В. Гуренко, А.А. Мазалов

АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ ОДНОГО КЛАССА С ОБЕСПЕЧЕНИЕМ МАКСИМАЛЬНОЙ СТЕПЕНИ УСТОЙЧИВОСТИ*

Рассматривается алгоритм прямого адаптивного управления нелинейными объектами специального вида. Алгоритм обеспечивает максимальную область асимптотической устойчивости замкнутой системы при заданных ограничениях на управляющие воздействия. Для синтеза системы управления используется принцип максимума Понтрягина. Устойчивость замкнутой системы доказана посредством найденной функции Ляпунова для рассматриваемого класса нелинейных объектов. Приведены результаты численного моделирования, подтверждающие теоретические результаты.

Прямое адаптивное управление; принцип максимума.

V.Kh. Pshikhopov, M.Yu. Medvedev, B.V. Gurenko, A.A. Mazalov

ADAPTIVE CONTROL OF A CLASS OF NONLINEAR OBJECTS FOR ASSURING MAXIMUM OF STABILITY DEGREE.

This paper presents algorithm of direct adaptive control for a class of nonlinear objects. The algorithm ensures maximal area of the system stability if the control is bounded. Control design method is based on the principle of maximum. Stability of the designed closed-loop system is proved by functions of Lyapunov method. Computer modeling results confirm theory.

Direct adaptive control; principle of maximum.

* Работа выполнена в рамках гранта Президента РФ НШ-1557.2012.10 для государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации.