Shishenya Alexander Vladimirovich
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education "Southern Federal University".
E-mail: primat-55-alex@yandex.ru.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: +7928322282; +79081761837.
The Department of Higher Mathematics; Postgraduate Student.

УДК 519.6

А.Е. Чистяков, Е.А. Костырко

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ СТЕРЖНЯ

Работа посвящена актуальной задаче математической физики – разработке и исследованию алгоритмов решения задач теории упругости. Для описания упругих свойств балки используется балочная теория Эйлера. Задача решалась двумя способами: методом разложения в ряд Фурье было получено аналитическое решение задачи, при помощи конечно-разностных аппроксимаций получено численное решение. Выполнено аналитическое исследование предложенной дискретной модели. Получено количественное совпадение результатов численных и аналитических расчетов деформации балки в случае стационарного по времени давления (распределенной нагрузки).

Уравнение балки Эйлера; ряд Фурье; метод баланса; численный эксперимент.

A.E. Chistyakov, E.A. Kostyrko

MATHEMATICAL MODELLING OF DEFORMATION OF THE BAR

This work deals with the development and study of algorithms for solving problems of elasticity theory that is an actual problem of mathematical physics. Euler's theory about beam is used for the description of elastic properties of a beam. The problem dared in two ways: the decomposition method on Fourier series had been received the analytical decision of a problem; the numerical decision is received with the help finite-difference approximations. Analytical research of the proposed discrete model was completed in this work. Quantitative coincidence of results of numerical and analytical calculations of deformation of a beam is received in case of stationary pressure on time (the distributed loading).

The equation of a beam of Euler; Fourier series; the balance method; a numerical experiment.

Введение. Рассматривается балка с незакрепленными концами. В момент времени $t = 0$ на балку начинает действовать неравномерно распределенная нагрузка P, под действием которой она деформируется. Подобные задачи возникают при изучении деформации льда. Информация о максимальной допустимой распределенной нагрузке используется для выявления возможности ледяных переправ через реки и водохранилища, спасения людей при отколах льда, для изучения свойств льда при выборе платформы для северных полярных станций и т.д.

Постановка задачи. Пусть на поверхности канала находится в непрерывном контакте с жидкостью ледяной стержень (пластина). Канал заполнен идеальной несжимаемой жидкостью. Вычисление максимальной допустимой распределенной нагрузки стержня решается в линейной постановке. Колебание стержня описывается уравнением балки Эйлера [1]:

$$\rho h \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = P(x), \qquad (1)$$

где ρ – плотность материала балки; h, W – толщина и прогиб балки; P – давление, E – модуль Юнга; $I = h^3/12$ – момент сечения балки. Длина балки $W \in [0,l]$.

Краевые и начальные условия имеют следующий вид:

$$W(l,t) = W_{xx}(l,t) = 0, \quad W(0,t) = W_{xx}(0,t) = 0, \tag{2}$$

$$W(x,0) = W_t(x,0) = 0, \quad l(0) = l_{0x}, \ l'(0) = 0. \tag{3}$$

Для решения уравнения деформации балки Эйлера использовался метод разложения в ряд Фурье [2,6]. Функция изгиба и давления было представлена в виде суммы рядов:

$$\tilde{W}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^w \sin\frac{\pi n}{l} x, \tag{4}$$

$$\tilde{P}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^p \sin\frac{\pi n}{l} x, \tag{5}$$

$$\tilde{W}(x,t) = \begin{cases} W(x,t), & x > 0, \\ -W(x,t), & x < 0, \end{cases}$$

где $\tilde{W}(x,t)$ – функция изгиба балки длиной $[-l,l]$; $\tilde{P}(x)$ – давление, действующее на балку длиной $[-l,l]$.

Аналитическое решение деформации балки имеет вид

$$\tilde{W}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos wt) \frac{b_n^p}{EI\left(\frac{\pi n}{l}\right)^4} \sin\frac{\pi n}{l} x,$$

где $w = \sqrt{\frac{EI}{\rho h}}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, $b_n^p = \frac{1}{l}\int_0^l P(x) \sin\frac{\pi n}{l} x dx$.

На рис. 1 представлен график зависимости изгиба от пространственной переменной, полученный при входных данных: $E = 3$ ГПа, $\rho = 914$ кг/м^3, $h = 0,01$ м, $l = 1$ м.

На графике мы можем увидеть функцию изгиба, максимальное значение которого равно $1,7 \times 10^{-4}$ м, и минимальное отклонение $-0,8 \times 10^{-4}$ м.

Численное решение уравнения движения балки. Деформация стержня описывается уравнением

$$\rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = P(x,t), \tag{6}$$

где ρ – плотность материала балки; h, W – толщина и прогиб балки; E – модуль Юнга; $I = \frac{h^3}{12}$ – момент сечения балки. Длина балки $W \in [0,l]$.

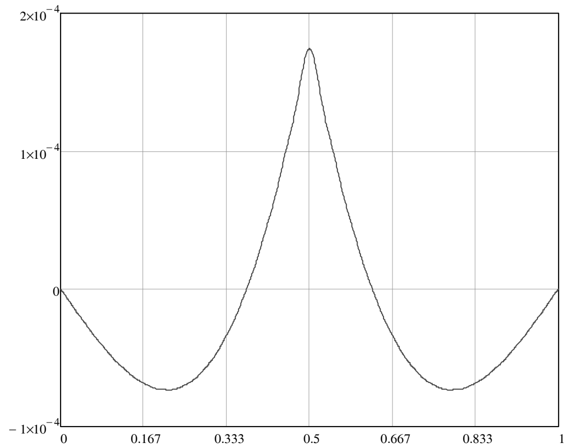

Рис. 1. Зависимость изгиба $w(x)$ *от пространственной переменной* x

Краевые и начальные условия имеют следующий вид:

$$W(l,t)=W_{xx}(l,t)=0,\ \ W(0,t)=W_{xx}(0,t)=0, \tag{7}$$

$$W(x,0)=W_t(x,0)=0,\ \ l(0)=l_{0x},\ l'(0)=0. \tag{8}$$

Для дискретизации математической модели изгиба балки вводится на плоскости сетка: $\overline{w_{h\tau}}=w_h\times w_\tau$, где $w_h=\{x_i=ih_x,\ \ 0\le i\le N,\ \ Nh_x=l\}$, $w_\tau=\{t^n=n\tau,\ \ 0\le n\le K,\ \ 0<t<T\}$, h_x – шаг по пространству; τ – шаг по времени; l – правая граница по пространству; T – верхняя граница по времени.

Точка (x_i,t^n) – центр шаблона, (x_{i-2},t^n), (x_{i-1},t^n) и (x_{i+1},t^n), (x_{i+2},t^n) – точки, отстоящие соответственно влево и право на шаг по пространству h, (x_i,t^{n-1}) и (x_i,t^{n+1}) – точки, отстоящие соответственно влево и право на шаг по времени τ.

Для аппроксимации задачи (6)–(8) используем интегро-интерполяционный метод [3–5]. Проинтегрируем уравнение (6) по области $D_{lT}:\left\{x\in\left[x_{i-1/2},x_{i+1/2}\right],t\in\left[t^{n-1/2},t^{n+1/2}\right]\right\}$ с учетом начальных и граничных условий (7)–(8), получим дискретный аналог уравнения (6):

$$\begin{cases}\rho h\dfrac{W_i^{n+1}-2W_i^n+W_i^{n-1}}{\tau^2}+EI\dfrac{\tilde{s}_{i+1}-2\tilde{s}_i+\tilde{s}_{i-1}}{h_x^2}=P_i^n,\\ \tilde{s}_i=\sigma s_i^{n+1}+\left(1-2\sigma\right)s_i^n+\sigma s_i^{n-1},\\ s_i^n=\dfrac{W_{i+1}^n-2W_i^n+W_{i+2}^n}{h_x^2},\end{cases} \tag{9}$$

где $s_i^n=0$, $W_i^n=0$ при $i\in\gamma$, $s_i^0=0$, $W_i^0=0$.

При $n = 0$ имеем:

$$\rho h \frac{W_i^1 - W_i^0}{\tau^2} + EI \frac{\overline{s}_{i+1} - 2\overline{s}_i + \overline{s}_{i-1}}{2h_x^2} = P_i^0,$$

$$\overline{s}_i = 2\sigma s_i^1 + (1 - 2\sigma) s_i^0, \; s_i^n = \frac{W_{i+1}^n - 2W_i^n + W_{i-1}^n}{h_x^2}.$$

Доказана устойчивость разностной схемы (9). Для исследования погрешности аппроксимации использовали разложения в ряд Тейлора относительно узла W_i^n. Погрешность аппроксимации разностной схемы (9) равна $O(h_x^2 + \tau^2)$. Расчет сеточных уравнений (9) выполнен при помощи метода пятиточечной прогонки. Разработанные алгоритмы численно реализованы на языке программирования С++.

Результаты численных экспериментов. Рассматривается ледяная балка с параметрами: $E = 3$ ГПа, $\rho = 914$ кг/м^3, $h = 0,01$ м. Давление задается функцией $P = 1 - |2x - 1|$. При данных параметрах выполнены численные расчеты по предложенной схеме (9).

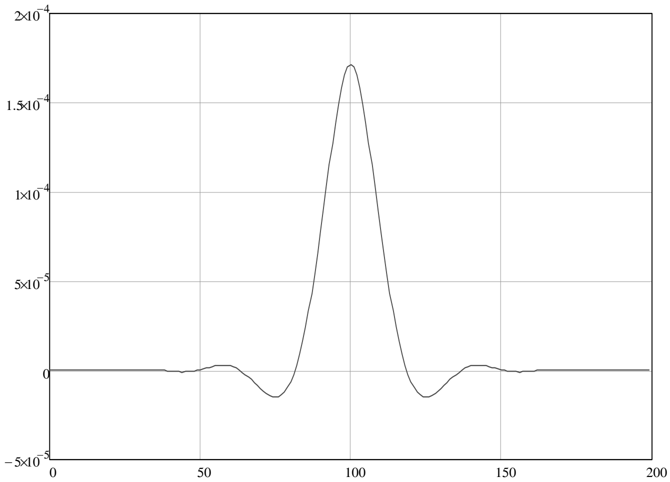

Рис. 2. Зависимость изгиба от переменной x

На рис. 2 представлена деформация балки при заданных начальных и граничных условиях. Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что модель балки Эйлера может быть использована для расчета деформации стержня. Получено количественное совпадение результатов численных и аналитических расчетов колебаний балки. Следует также отметить, что аналитическое решение задачи получено только в случае стационарного по времени давления, что и обуславливает актуальность использования численных методов.

Выводы. Разработана математическая модель деформации балки. Выполнена дискретизация модели и предложен численный алгоритм расчета изгиба стержня. Получено количественное совпадение результатов численных и аналитических расчетов деформации балки в случае стационарного по времени давления (распределенной нагрузки).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
2. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Физматлит, 1962. – 767 с.
3. *Самарский А.А.* Численные методы: Учеб. пособие для вузов / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
4. *Самарский А.А.* Введение в численные методы: Учебное пособие для вузов по специальности «Прикладная математика». – М. : Наука, 1987. – 286 с.
5. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М. : Наука, 1983.
6. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735 с.

Статью рекомендовал к опубликованию к.т.н., доцент В.Е. Мольдерф.

Чистяков Александр Евгеньевич
Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.
347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
E-mail: cheese_05@mail.ru.
Тел.: 88634371606.
Кафедра высшей математики; ассистент.

Костырко Елена Анатольевна
E-mail: studentkahelenka@mail.ru.
Тел.: +79515073437.
Кафедра высшей математики; студент.

Chistyakov Alexander Evgenjevich
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.
44, Nekrasovsky, Taganrog, 347928, Russia.
E-mail: cheese_05@mail.ru.
Phone: +78634371606.
The Department of Higher Mathematics; Assistant.

Kostyrko Elena Anatoljevna
E-mail: studentkahelenka@mail.ru.
Phone: +79515073437.
The Department of Higher Mathematics; Student.