

Раздел II. Методы построения дискретных математических моделей

УДК 519.6

А.И. Сухинов, Е.Ф. Тимофеева, А.Е. Чистяков

ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАСЧЕТА ПРИБРЕЖНЫХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

В работе предложена математическая модель движения волн в прибрежной зоне и построена двумерная конечно-объемная модель выхода волны на берег, учитывающая такие физические параметры, как сложная геометрия дна, турбулентный обмен, трение о дно, динамическое изменение уровня возвышения жидкости, и предложена методика построения дискретных математических моделей на сетках с частичной заполненностью ячеек, а также приведен пример расчета заполненности ячеек. Для построенной дискретной модели волновой гидродинамики выполнено исследование устойчивости и получены оценки ограничения решения.

Гидродинамика; волновые процессы; метод баланса; принцип максимума.

A.I. Sukhinov, E.F. Timofeeva, A.E. Chistyakov

DEVELOPMENT AND INVESTIGATION OF THE DISCRETE MATHEMATICAL MODEL FOR COASTAL WAVE PROCESS MODELLING

The paper presents a mathematical model of the waves in the coastal zone and built a two-dimensional finite-volume model release waves on the shore, taking into account the physical parameters such as the complex geometry of the bottom, turbulent exchange, the friction on the bottom, the dynamic changes in the level of elevation of the liquid, and the technique of constructing discrete mathematical models on grids with a partially filled cells, as well as an example of the calculation of the cells. For the construction of discrete models used to study the hydrodynamics of wave resistance and estimates of limiting solutions.

Hydrodynamics; wave processes the method of balance; the maximum principle.

Введение. Предметом данной работы является задача выхода волны на берег, имеющая важное значение для исследования волновых процессов у побережья с целью предопределения строительства сооружений и использования конкретного участка береговой линии.

Постановка задачи. Математическая постановка задачи может быть сформулирована следующим образом. Слой идеальной несжимаемой жидкости подходит к откосу с изломом на урезе, сопряженному с ровным дном. В этом случае откос приурезовой области нельзя считать плоским, откос и берег расположены под разными углами. Предполагается, что в начальный момент времени жидкость находится в состоянии покоя. На некотором расстоянии от берега в точке $x = 0$ задается возмущение. Источником возмущения служит приложенный к боковой границе рассматриваемой области жидкости импульс давления. Требуется определить последующее движение воды.

Для описания задачи волновой динамики жидкости исходными уравнениями являются:

- ◆ уравнение Навье–Стокса:

$$u'_t + uu'_x + vv'_y = -\frac{P'_x}{\rho} + (\mu u'_x)'_x + (\eta v'_y)'_y, \quad (1)$$

$$v'_t + uv'_x + vv'_y = -\frac{P'_y}{\rho} + (\mu v'_x)'_x + (\eta v'_y)'_y + g; \quad (2)$$

- ◆ уравнение неразрывности:

$$p'_t + (\rho u)'_x + (\rho v)'_y = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) в случае несжимаемой жидкости примет вид

$$u'_x + v'_y = 0. \quad (4)$$

Уравнения (1)–(4) рассматриваются при следующих граничных условиях:

- ◆ на дне области:

$$\begin{aligned} P'_n(x, y, t) = 0, \quad V_n(x, y, t) = 0, \quad \rho \eta v'_y(x, y, t) = -\tau_x(t), \\ \rho \mu v'_x(x, y, t) = -\tau_y(t), \quad u'_x(x, y, t) = 0, \quad v'_y(x, y, t) = 0; \end{aligned} \quad (5)$$

- ◆ на поверхности жидкости:

$$\begin{aligned} u'_n(x, y, t) = 0, \quad v'_n(x, y, t) = 0, \\ v(x, y, t) = \frac{P'_t}{g\rho}, \quad P'_n(x, y, t) = 0; \end{aligned} \quad (6)$$

- ◆ на боковой границе:

$$u'_n(x, y, t) = 0, \quad v'_n(x, y, t) = 0, \quad P'_n(x, y, t) = \frac{\rho \Pi}{\tau L}, \quad (7)$$

где $V = \{u, v\}$ – вектор скорости движения водной среды; P – давление; μ, η – коэффициенты турбулентного обмена по горизонтальному и вертикальному направлениям соответственно; g – ускорение свободного падения; ρ – плотность жидкости; τ_x, τ_y – составляющие тангенциального напряжения на дне жидкости;

Π – поток вектора скорости через боковую поверхность; L – расстояние от поверхности жидкости до дна (глубина жидкости с учетом возвышения уровня) на боковой границе. Система координат выбрана таким образом, что ось Ox совмещена с поверхностью невозмущенной жидкости и направлена в сторону берега, ось Oy – вертикально вниз.

Тангенциальное напряжение, вызванное донным трением, согласно закону Ван-Дорна, рассчитывается по формулам

$$\tau_x = \rho C_p (|V|) u |V|, \quad \tau_y = \rho C_p (|V|) v |V|,$$

где

$$C_p (|V|) = \begin{cases} 0,0088, & |V| < 6,6 \text{ м/с}, \\ 0,0026, & |V| \geq 6,6 \text{ м/с} \end{cases} \quad \text{– безразмерный коэффициент.}$$

Дискретная модель. Расчетная область представляет собой прямоугольник. Для численной реализации дискретной математической модели поставленной задачи волновой гидродинамики вводится равномерная сетка:

$$w_h = \left\{ t^n = n\tau, x_i = ih_x, y_j = jh_y; n = \overline{0, N_t}; i = \overline{0, N_x}; j = \overline{0, N_y}; \right. \\ \left. N_t\tau = T, N_x h_x = l_x, N_y h_y = l_y \right\},$$

где τ – шаг по времени, h_x, h_y – шаги по пространству, N_t – верхняя граница по времени, N_x, N_y – границы по пространству.

Применяется непосредственная аппроксимация. В результате аппроксимации уравнений (1), (2) по временной переменной, вводя промежуточный слой $n + \sigma$ согласно МАС-методу и расщепляя уравнения по физическим процессам, уравнения приводятся к следующему виду:

$$\frac{u^{n+\sigma} - u^n}{\tau} + uu'_x + vv'_y = (\mu u'_x)'_x + (\eta u'_y)'_y, \quad (8)$$

$$\frac{v^{n+\sigma} - v^n}{\tau} + uv'_x + vv'_y = (\mu v'_x)'_x + (\eta v'_y)'_y + g, \quad (9)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+\sigma}}{\tau} = -\frac{P'_x}{\rho}, \quad (10)$$

$$\frac{v^{n+1} - v^{n+\sigma}}{\tau} = -\frac{P'_y}{\rho}. \quad (11)$$

Продифференцировав уравнения (10), (11) и преобразовав с учетом уравнения неразрывности (4), получим:

$$P''_{xx} + P''_{yy} = \frac{\rho}{\tau} \left((u^{n+\sigma})'_x + (v^{n+\sigma})'_y \right). \quad (12)$$

Расчет задач гидродинамики по данному методу осуществляется в три этапа. На первом этапе на основе уравнений (8), (9) считается поле скоростей. На втором этапе рассчитывается давление по уравнению (12). На третьем этапе из соотношений (10), (11) уточняется поле скоростей по давлению.

Заполненность ячеек. Расчетные ячейки представляют собой прямоугольники, они могут быть заполненными, частично заполненными или пустыми. Центры ячеек и узлы разнесены на $h_x/2$ и $h_y/2$ по координатам x и y соответственно. Обозначим через $o_{i,j}$ заполненность ячейки (i, j) . Поле скоростей и давление рассчитываются в вершинах ячейки, как представлено на рис. 1. Вершинами ячейки (i, j) являются узлы $(i, j), (i-1, j), (i, j-1), (i-1, j-1)$.

Степень заполненности ячейки определяется давлением столба жидкости внутри данной ячейки. Если среднее давление в узлах, которые относятся к вершинам рассматриваемой ячейки, больше давления столба жидкости внутри ячейки, то ячейка считается заполненной полностью ($o_{i,j} = 1$). В общем случае заполненность ячейки можно вычислить по следующей формуле:

$$o_{i,j} = \frac{P_{i,j}H(P_{i,j}) + P_{i-1,j}H(P_{i,j}) + P_{i,j-1}H(P_{i,j}) + P_{i-1,j-1}H(P_{i,j})}{2\rho gh_y}, \quad (13)$$

где

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases} \text{ - функция Хевисайда.}$$

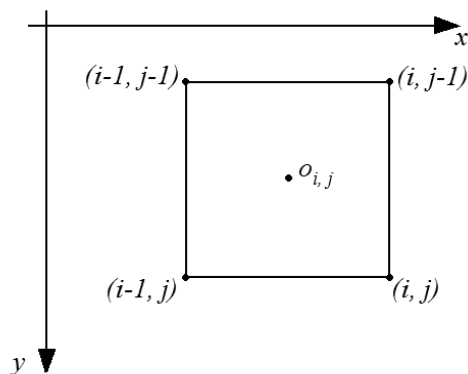


Рис. 1. Расположение ячейки относительно прилегающих к ней узлов

В окрестности узла (i, j) лежат ячейки (i, j) , $(i+1, j)$, $(i, j+1)$, $(i+1, j+1)$, как изображено на рис. 2.

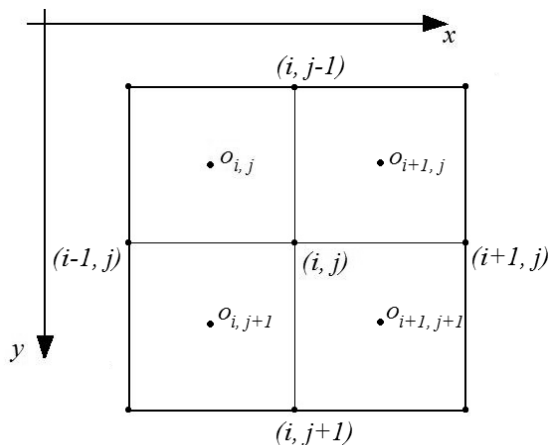


Рис. 2. Расположение узлов относительно ячеек

Вводятся коэффициенты k_0, k_1, k_2, k_3, k_4 , описывающие заполненность областей, находящихся в окрестности ячейки. Значение k_0 характеризует заполненность области $\Omega_0: x \in (x_{i-1}, x_{i+1}), y \in (y_{j-1}, y_{j+1})$, $k_1 - \Omega_1: x \in (x_i, x_{i+1}), y \in (y_{j-1}, y_{j+1})$, $k_2 - \Omega_2: x \in (x_{i-1}, x_i), y \in (y_{j-1}, y_{j+1})$, $k_3 - \Omega_3:$

$x \in (x_{i-1}, x_{i+1})$, $y \in (y_j, y_{j+1})$, $k_4 - \Omega_4$: $x \in (x_{i-1}, x_{i+1})$, $y \in (y_{j-1}, y_j)$. Заполненные части областей Ω_m будем называть D_m , где $m = \overline{0, 4}$. В соответствии с этим коэффициенты k_m можно вычислить по формулам

$$\begin{aligned} (k_m)_{i,j} &= \frac{S_{D_m}}{S_{\Omega_m}}, \quad (k_0)_{i,j} = \frac{o_{i,j} + o_{i+1,j} + o_{i+1,j+1} + o_{i,j+1}}{4}, \\ (k_1)_{i,j} &= \frac{o_{i+1,j} + o_{i+1,j+1}}{2}, \quad (k_2)_{i,j} = \frac{o_{i,j} + o_{i,j+1}}{2}, \\ (k_3)_{i,j} &= \frac{o_{i+1,j+1} + o_{i,j+1}}{2}, \quad (k_4)_{i,j} = \frac{o_{i,j} + o_{i+1,j}}{2}. \end{aligned}$$

Для рассматриваемой задачи волновой гидродинамики получена аппроксимация уравнений с граничными условиями.

Построение дискретной модели, учитывающей заполненности ячеек. Для первой подзадачи волновой гидродинамики (8), (9) граничные условия в общем случае примут вид

$$\begin{aligned} u'_x(x, y, t) &= \alpha_{u,x} u + \beta_{u,x}, \quad v'_x(x, y, t) = \alpha_{v,x} v + \beta_{v,x}, \\ u'_y(x, y, t) &= \alpha_{u,y} u + \beta_{u,y}, \quad v'_y(x, y, t) = \alpha_{v,y} v + \beta_{v,y}. \end{aligned} \quad (14)$$

Проинтегрируем по области D_0 уравнение (8) и воспользуемся свойством суммы интегралов, в результате чего получим:

$$\iint_{D_0} \frac{u^{n+\sigma} - u^n}{\tau} dx dy + \iint_{D_0} u u'_x dx dy + \iint_{D_0} v v'_y dx dy = \iint_{D_0} (\mu u'_x)' dx dy + \iint_{D_0} (\eta v'_y)' dx dy. \quad (15)$$

Вычислим отдельно каждый из полученных интегралов:

$$\iint_{D_0} \frac{u^{n+\sigma} - u^n}{\tau} dx dy \approx (k_0)_{i,j} \iint_{\Omega_0} \frac{u^{n+\sigma} - u^n}{\tau} dx dy = (k_0)_{i,j} \frac{u_{i,j}^{n+\sigma} - u_{i,j}^n}{\tau} h_x h_y. \quad (16)$$

Второй интеграл в выражении (15) запишется так:

$$\iint_{D_0} u u'_x dx dy = \iint_{D_1} u u'_x dx dy + \iint_{D_2} u u'_x dx dy \approx (k_1)_{i,j} \iint_{\Omega_1} u u'_x dx dy + (k_2)_{i,j} \iint_{\Omega_2} u u'_x dx dy.$$

Вычисляя интегралы по областям Ω_1 и Ω_2 , получим:

$$\iint_{D_0} u u'_x dx dy = \frac{(k_1)_{i,j} u_{i+1/2,j} h_y (u_{i+1,j} - u_{i,j}) + (k_2)_{i,j} u_{i-1/2,j} h_y (u_{i,j} - u_{i-1,j})}{2}. \quad (17)$$

Вычислим интеграл, стоящий в правой части выражения (15):

$$\iint_{D_0} (\mu u'_x)' dx dy = \iint_{D_1} (\mu u'_x)' dx dy + \iint_{D_2} (\mu u'_x)' dx dy.$$

В последнем выражении для определенности положим, что $S_{D_1} > S_{D_2}$, выделим из области D_1 фрагмент $D_{1,2}$, смежный с областью D_2 , причем $S_{D_2} = S_{D_{1,2}}$ (рис. 3):

$$\begin{aligned} \iint_{D_0} (\mu u'_x)'_x dx dy &= \iint_{D_1/D_{1,2}} (\mu u'_x)'_x dx dy + \iint_{D_{1,2} \cup D_2} (\mu u'_x)'_x dx dy \approx \\ &\approx \left((k_1)_{i,j} - (k_2)_{i,j} \right) \iint_{\Omega_1} (\mu u'_x)'_x dx dy + (k_2)_{i,j} \iint_{\Omega_0} (\mu u'_x)'_x dx dy. \end{aligned}$$

В результате получим:

$$\begin{aligned} \iint_{D_0} (\mu u'_x)'_x dx dy &\approx \left((k_1)_{i,j} \mu_{i+1/2,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_x} - (k_2)_{i,j} \mu_{i-1/2,j} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_x} - \right. \\ &\quad \left. - \left((k_1)_{i,j} - (k_2)_{i,j} \right) \mu_{i,j} \left(\alpha_{u,x} u_{i,j} + \beta_{u,x} \right) \right) h_y. \end{aligned} \quad (18)$$

В случае, если $S_{D_2} > S_{D_1}$, результат будет аналогичным.

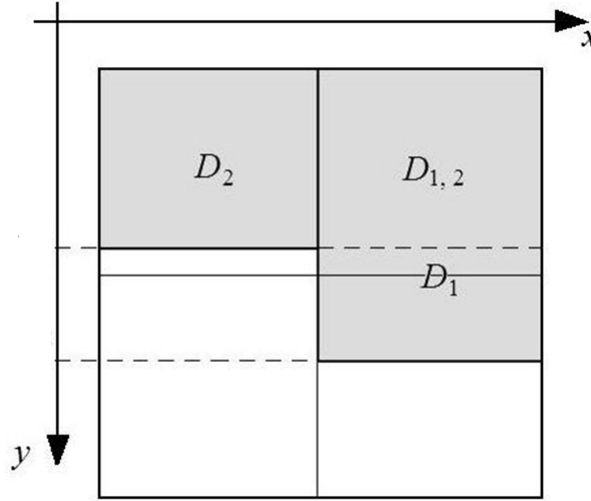


Рис. 3. Схема заполненности ячеек

Подставим в уравнение (15) выражения (16) – (18) и разделим полученное выражение на площадь ячейки $h_x h_y$, в результате чего получим:

$$\begin{aligned} (k_0)_{i,j} \frac{u_{i,j}^{n+\sigma} - u_{i,j}^n}{\tau} + (k_1)_{i,j} \mu_{i+1/2,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{2h_x} + (k_2)_{i,j} \mu_{i-1/2,j} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{2h_x} + \\ + (k_3)_{i,j} \nu_{i,j+1/2} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{2h_y} + (k_4)_{i,j} \nu_{i,j-1/2} \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{2h_y} = (k_1)_{i,j} \mu_{i+1/2,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_x^2} - \\ - (k_2)_{i,j} \mu_{i-1/2,j} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_x^2} - \left((k_1)_{i,j} - (k_2)_{i,j} \right) \mu_{i,j} \frac{\alpha_{u,x} u_{i,j} + \beta_{u,x}}{h_x} + (k_3)_{i,j} \eta_{i,j+1/2} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_y^2} - \\ - (k_4)_{i,j} \eta_{i,j-1/2} \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h_y^2} - \left((k_3)_{i,j} - (k_4)_{i,j} \right) \eta_{i,j} \frac{\alpha_{u,y} u_{i,j} + \beta_{u,y}}{h_y}. \end{aligned} \quad (19)$$

Описание граничных условий. С целью упрощения записи уравнений вводятся «маски» граничных условий: m_1, m_2 . Параметр m_1 принимает значение 1 в случае, если узел (i, j) принадлежит множеству граничных узлов, находящихся в придонной области, в противном случае $m_1 = 0$. Параметр $m_2 = 1$ в случае, если узел (i, j) принадлежит боковой границе, в противном случае $m_2 = 0$. С учетом введенных обозначений построена конечно-объемная модель задачи волновой гидродинамики, представленная следующими сеточными уравнениями:

- ◆ для расчета поля скоростей:
- ◆ для составляющей вектора скорости $u_{i,j}$:

$$\begin{aligned}
& (k_0)_{i,j} \frac{u_{i,j}^{n+\sigma} - u_{i,j}^n}{\tau} + (k_1)_{i,j} u_{i+1/2,j}^n \frac{u_{i+1,j}^{n+\sigma/2} - u_{i,j}^{n+\sigma/2}}{2h_x} + (k_2)_{i,j} u_{i-1/2,j}^n \frac{u_{i,j}^{n+\sigma/2} - u_{i-1,j}^{n+\sigma/2}}{2h_x} + \\
& + (k_3)_{i,j} v_{i,j+1/2}^n \frac{u_{i,j+1}^{n+\sigma/2} - u_{i,j}^{n+\sigma/2}}{2h_y} + (k_4)_{i,j} v_{i,j-1/2}^n \frac{u_{i,j}^{n+\sigma/2} - u_{i,j-1}^{n+\sigma/2}}{2h_y} = \\
& = (k_1)_{i,j} \mu_{i+1/2,j} \frac{u_{i+1,j}^{n+\sigma/2} - u_{i,j}^{n+\sigma/2}}{h_x^2} - (k_2)_{i,j} \mu_{i-1/2,j} \frac{u_{i,j}^{n+\sigma/2} - u_{i-1,j}^{n+\sigma/2}}{h_x^2} + \\
& + (k_3)_{i,j} \eta_{i,j+1/2} \frac{u_{i,j+1}^{n+\sigma/2} - u_{i,j}^{n+\sigma/2}}{h_y^2} - (k_4)_{i,j} \eta_{i,j-1/2} \frac{u_{i,j}^{n+\sigma/2} - u_{i,j-1}^{n+\sigma/2}}{h_y^2} + \\
& + \left((k_3)_{i,j} - (k_4)_{i,j} \right) \frac{\tau_x}{\rho h_y} (m_1)_{i,j};
\end{aligned}$$

- ◆ для составляющей вектора скорости $v_{i,j}$:

$$\begin{aligned}
& (k_0)_{i,j} \frac{v_{i,j}^{n+\sigma} - v_{i,j}^n}{\tau} + (k_1)_{i,j} u_{i+1/2,j}^n \frac{v_{i+1,j}^{n+\sigma/2} - v_{i,j}^{n+\sigma/2}}{2h_x} + (k_2)_{i,j} u_{i-1/2,j}^n \frac{v_{i,j}^{n+\sigma/2} - v_{i-1,j}^{n+\sigma/2}}{2h_x} + \\
& + (k_3)_{i,j} v_{i,j+1/2}^n \frac{v_{i,j+1}^{n+\sigma/2} - v_{i,j}^{n+\sigma/2}}{2h_y} + (k_4)_{i,j} v_{i,j-1/2}^n \frac{v_{i,j}^{n+\sigma/2} - v_{i,j-1}^{n+\sigma/2}}{2h_y} = \\
& = (k_1)_{i,j} \mu_{i+1/2,j} \frac{v_{i+1,j}^{n+\sigma/2} - v_{i,j}^{n+\sigma/2}}{h_x^2} - (k_2)_{i,j} \mu_{i-1/2,j} \frac{v_{i,j}^{n+\sigma/2} - v_{i-1,j}^{n+\sigma/2}}{h_x^2} + \\
& + \left((k_1)_{i,j} - (k_2)_{i,j} \right) \frac{\tau_y}{\rho h_x} (m_1)_{i,j} + (k_3)_{i,j} \eta_{i,j+1/2} \frac{v_{i,j+1}^{n+\sigma/2} - v_{i,j}^{n+\sigma/2}}{h_y^2} - \\
& - (k_4)_{i,j} \eta_{i,j-1/2} \frac{v_{i,j}^{n+\sigma/2} - v_{i,j-1}^{n+\sigma/2}}{h_y^2} + (k_0)_{i,j} g;
\end{aligned}$$

- ◆ для расчета поля давления:

$$\begin{aligned}
 & (k_1)_{i,j} \frac{P_{i+1,j} - P_{i,j}}{h_x^2} - (k_2)_{i,j} \frac{P_{i,j} - P_{i-1,j}}{h_x^2} + (k_3)_{i,j} \frac{P_{i,j+1} - P_{i,j}}{h_y^2} - \\
 & - (k_4)_{i,j} \frac{P_{i,j} - P_{i,j-1}}{h_y^2} - \frac{\alpha(m_2)_{i,j}}{h_x} \left((k_1)_{i,j} - (k_2)_{i,j} \right) = \\
 & = \frac{\rho}{\tau} \left(\frac{(k_1)_{i,j} u_{i+1/2,j}^{n+\sigma} - (k_2)_{i,j} u_{i-1/2,j}^{n+\sigma}}{h_x} + \frac{(k_3)_{i,j} v_{i,j+1/2}^{n+\sigma} - (k_4)_{i,j} v_{i,j-1/2}^{n+\sigma}}{h_y} \right) - \\
 & - \frac{\left((k_3)_{i,j} - (k_4)_{i,j} \right) (P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j}^n)}{gh_y \tau^2} H \left((k_3)_{i,j} - (k_4)_{i,j} \right);
 \end{aligned}$$

- ◆ уравнениями для уточнения поля скоростей по давлению:

$$\begin{aligned}
 (k_0)_{i,j} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+\sigma}}{\tau} &= - \left((k_1)_{i,j} \frac{P_{i+1,j}^{n+1} - P_{i,j}^{n+1}}{2h_x \rho} + (k_2)_{i,j} \frac{P_{i,j}^{n+1} - P_{i-1,j}^{n+1}}{2h_x \rho} \right), \\
 (k_0)_{i,j} \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^{n+\sigma}}{\tau} &= - \left((k_3)_{i,j} \frac{P_{i,j+1}^{n+1} - P_{i,j}^{n+1}}{2h_y \rho} + (k_4)_{i,j} \frac{P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j-1}^{n+1}}{2h_y \rho} \right).
 \end{aligned}$$

Для ответа на вопрос, связанный с адекватным описанием сложных физических процессов взаимодействия волны с берегом и построением их численных аналогов, построенная модель исследована на консервативность.

Исследование дискретной модели. Показано выполнение закона сохранения импульса на дискретном уровне для сеточного уравнения и сохранение потока, что согласуется с физическим процессом. Это свидетельствует о том, что дискретные операторы конвективного переноса соответствуют своим непрерывным аналогам.

Найдена погрешность аппроксимации модели. В результате получено, что порядок аппроксимации системы уравнений равен $O(\tau + h_x^2 + h_y^2)$, т. е. модель имеет первый порядок погрешности аппроксимации по времени и второй по пространственным координатам.

Устойчивость разностной схемы. При исследовании устойчивости на основе принципа максимума задачи волновой гидродинамики (8)–(12) используется представление сеточных уравнений в канонической форме [2].

Уравнение вместе с граничными условиями является частным случаем уравнения вида

$$Ly(p) = A(p)y(p) - \sum_{Q \in \mathcal{H}'(p)} B(p, q)y(q) = F(p), \quad (20)$$

где L – некоторый сеточный оператор, $p \equiv (x_i, y_j)$ – центр шаблона, $\mathcal{H}'(p) = \{(x_{i+1}, y_j), (x_{i-1}, y_j), (x_i, y_{j+1}), (x_i, y_{j-1})\}$ – окрестность центра шаблона, $Q \in \mathcal{H}'(p)$.

Коэффициенты сеточных уравнений в канонической форме (20), соответствующие системе уравнений (8) – (9), могут быть записаны в виде

$$B(p, q_{x+}) = \left(-\frac{u_{i+1/2,j}}{4h_x} + \frac{\mu_{i+1/2,j}}{2h_x^2} \right) (k_1)_{i,j},$$

$$B(p, q_{x-}) = \left(\frac{u_{i-1/2,j}}{4h_x} + \frac{\mu_{i-1/2,j}}{2h_x^2} \right) (k_2)_{i,j},$$

$$B(p, q_{y+}) = \left(-\frac{v_{i,j+1/2}}{4h_y} + \frac{\eta_{i,j+1/2}}{2h_y^2} \right) (k_3)_{i,j},$$

$$B(p, q_{y-}) = \left(\frac{v_{i,j-1/2}}{4h_y} + \frac{\eta_{i,j-1/2}}{2h_y^2} \right) (k_4)_{i,j},$$

$$A(p) = \frac{(k_0)_{i,j}}{\tau} + B(p, q_{x+}) + B(p, q_{x-}) + B(p, q_{y+}) + B(p, q_{y-}),$$

при этом функция правой части примет вид

$$F_1(p) = \left(\frac{(k_0)_{i,j}}{\tau} - (B(p, q_{x+}) + B(p, q_{x-}) + B(p, q_{y+}) + B(p, q_{y-})) \right) u_{i,j} + \\ + B(p, q_{x+}) u_{i+1,j} + B(p, q_{x-}) u_{i-1,j} + B(p, q_{y+}) u_{i,j+1} + B(p, q_{y-}) u_{i,j-1} + \\ + \left((k_3)_{i,j} - (k_4)_{i,j} \right) \frac{\tau_x}{\rho h_y} (m_1)_{i,j}.$$

Выражение для правой части можно представить в следующем виде:

$$F_1(p) = \frac{2(k_0)_{i,j} u_{i,j}}{\tau} - L^n u_{i,j} + \left((k_3)_{i,j} - (k_4)_{i,j} \right) \frac{\tau_x}{\rho h_y} (m_1)_{i,j}.$$

Аналогично получается представление для уравнения (9) в канонической форме сеточных уравнений (20), если учесть, что уравнение (9) отличаются от (8) только правыми частями. Функция правой части для уравнения (9) имеет вид

$$F_2(p) = \frac{2(k_0)_{i,j} u_{i,j}}{\tau} - L^n u_{i,j} + \left((k_1)_{i,j} - (k_2)_{i,j} \right) \frac{\tau_y}{\rho h_x} (m_1)_{i,j} + (k_0)_{i,j} g.$$

Для уравнения (12), представленного в канонической форме сеточных уравнений (14), коэффициенты выражаются следующим образом:

$$A(p) = - \left(\frac{(k_1)_{i,j} + (k_2)_{i,j}}{h_x^2} + \frac{(k_3)_{i,j} + (k_4)_{i,j}}{h_y^2} \right), \quad B(p, q_{x+}) = \frac{(k_1)_{i,j}}{h_x^2}, \\ B(p, q_{x-}) = \frac{(k_2)_{i,j}}{h_x^2}, \quad B(p, q_{y+}) = \frac{(k_3)_{i,j}}{h_y^2}, \quad B(p, q_{y-}) = \frac{(k_4)_{i,j}}{h_y^2},$$

где

$$F(p) = \frac{\rho}{\tau} \left(\frac{(k_1)_{i,j} u_{i+1/2,j}^{n+\sigma} - (k_2)_{i,j} u_{i-1/2,j}^{n+\sigma}}{h_x} + \frac{(k_3)_{i,j} v_{i,j+1/2}^{n+\sigma} - (k_4)_{i,j} v_{i,j-1/2}^{n+\sigma}}{h_y} \right) - \frac{((k_3)_{i,j} - (k_4)_{i,j})(P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j}^n)}{gh_y \tau^2} H((k_3)_{i,j} - (k_4)_{i,j}) + \frac{\alpha(m_2)_{i,j}}{h_x} ((k_1)_{i,j} - (k_2)_{i,j}).$$

Достаточное условие устойчивости схемы для метода «поправок к давлению» определяется на основе принципа максимума [2] при ограничениях на шаг по пространству:

$$h_x < \left\| \frac{2\mu}{u} \right\|_{C(\bar{\omega}_h)}, \quad h_y < \left\| \frac{2\mu}{v} \right\|_{C(\bar{\omega}_h)}$$

или $Re \leq 2N$, где $Re = u \cdot l / \mu$ – числа Рейнольдса, u – скорость распространения водной среды, l – характерный размер области, μ – коэффициент турбулентного обмена.

Для полей u^{n+1} , v^{n+1} получены следующие оценки:

$$\|u^{n+1}\|_{C(\bar{\omega}_h)} \leq \sum_{s=0}^n \tau \left\| \frac{P_x^s}{\rho} + ((k_3)_{i,j} - (k_4)_{i,j}) \frac{\tau_x^s}{\rho h_y} (m_1)_{i,j} \right\|_{C(\omega_h^*)} + \|(k_0)_{i,j} u_{i,j}^0\|_{C(\omega_h^*)},$$

$$\|v^{n+1}\|_{C(\bar{\omega}_h)} \leq \sum_{s=0}^n \tau \left\| \frac{P_y^s}{\rho} + ((k_1)_{i,j} - (k_2)_{i,j}) \frac{\tau_y^s}{\rho h_x} (m_1)_{i,j} + (k_0)_{i,j} \right\|_{C(\omega_h^*)} + \|(k_0)_{i,j} v_{i,j}^0\|_{C(\omega_h^*)}.$$

Выводы. В данной работе приведена методика построения дискретных математических моделей на сетках с частичной заполненностью ячеек, а также приведен пример расчета заполненности ячеек. Для построенной дискретной модели волновой гидродинамики получены оценки для норм компонентов вектора скорости, гарантирующие устойчивость по начальным условиям и правой части.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980.
2. Самарский А.А. Численные методы математической физики / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – 2-е изд. – М.: Научный мир, 2003. – 316 с.
3. Алексеенко Е.В., Сидоренко Б.В., Колзунова О.В., Чистяков А.Е. Сравнительный анализ классических и неклассических моделей гидродинамики водоемов с турбулентным обменом // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 8 (97). – С. 6-18.
4. Шокин Ю.И. Вычислительный эксперимент в проблеме цунами / Ю.И. Шокин, Л.Б. Чубаров, Ан. Г. Марчук, К.В. Симонов. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989. – 168 с.
5. Чистяков А.Е. Об аппроксимации граничных условий трехмерной модели движения водной среды // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6 (107). – С. 66-77.
6. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Алексеенко Е.В. Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе // Математическое моделирование. – 2011. – Т. 23, № 3. – С. 3-21.
7. Гадельшин В.К., Любимищенко Д.С., Сухинов А.И. Математическое моделирование поля ветровых течений и распространения загрязняющих примесей в условиях городского рельефа местности с учетом к-ε модели турбулентности // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6 (107). – С. 49-65.
8. Тимофеева Е.Ф. Математическая модель движения волн для водоема с нелинейной функцией рельефа дна // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6 (107). – С. 95-102.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор В.П. Молчанов.

Сухинов Александр Иванович

Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: sukhinov@gmail.ru.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 88634310599.

Руководитель ТТИ ЮФУ; д.ф.-м.н.; профессор.

Чистяков Александр Евгеньевич

E-mail: cheese_05@mail.ru.

Тел.: 88634371606.

Кафедра высшей математики; ассистент.

Тимофеева Елена Федоровна

Северо-Кавказский государственный технический университет.

E-mail: teflena@mail.ru.

355029, г. Ставрополь, просп. Кулакова, 2.

Тел.: 88652728858; +79097583970.

Кафедра прикладной математики и компьютерных технологий; старший преподаватель.

Sukhinov Alexander Ivanovich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: sukhinov@gmail.ru

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: +78634310599.

The head of TIT SFedU; Dr. of Phis.-Math. Sc.; Professor.

Chistyakov Alexander Evgenjevich

E-mail: cheese_05@mail.ru.

Phone: +78634371606.

The Department of Higher Mathematics; Assistant.

Timofeeva Elena Fe'dorovna

North Caucasus State Technical University.

E-mail: teflena@mail.ru.

2, Kulakov Pr., Stavropol, 355029, Russia.

Phone: +78652728858.

The Department of Applied Mathematics and Computer Technology; Senior Lecturer.

УДК 519.6

А.И. Сухинов, А.Е. Чистяков, Е.А. Проценко

**ПОСТРОЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ ДВУМЕРНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
МОДЕЛИ ТРАНСПОРТА НАНОСОВ**

В работе освещены вопросы построения пространственно-двумерной математической модели перемещения наносов в прибрежной зоне мелководных водоемов, которая используется для численного моделирования динамики аккумулятивного берега. Выполнена дискретизация модели на основе метода баланса, при этом предложенные конечно-разностные схемы консервативны, устойчивы и имеют второй порядок погрешности аппроксимации по пространственным координатам и первый по времени. Построены сеточные уравнения для задачи транспорта наносов. Предложен алгоритм расчета коэффициентов и правых частей сеточных уравнений.

Математическое моделирование; транспорт наносов; метод баланса; дискретная модель; сеточные уравнения.