Бутенков Сергей Андреевич
Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.
E-mail: saab@tsure.ru.
347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
Тел.: 88634371668.
Заведующий научной лабораторией; к.т.н.; доцент.

Butenkov Sergej Andreevich
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education "Southern Federal University".
E-mail: saab@tsure.ru.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: +78634371668.
Head of Research Laboratory; Cand. of Eng. Sc.; Associate Professor.

УДК 681.518

С.А. Бутенков, А.Л. Жуков, Н.С. Кривша, Я.А. Джинави

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СРЕД С ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ГРАНУЛЯЦИИ*

В настоящее время активно развиваются многие направления математического моделирования процессов переноса в средах, имеющих фрактальную структуру. К таким относятся различные виды существенно пористых искусственных и естественных сред. Наибольшее внимание уделяется процессам, связанным с такими средами, как почва или некоторые виды атмосферных взвесей и газов. Между тем, в настоящее время явно недостаточно разработаны вопросы моделирования процессов распространения в такой широко известной (и сравнительно мало изученной) среде, как снежный покров (СП), составленной из различных типов естественных фрактальных образований (снежинок). Измерения и эксперименты с СП в силу ряда физических причин (изменчивости в зависимости от большого числа физических факторов) приводят к значительным техническим трудностям. При исследовании и прогнозировании свойств СП ведущую роль должно играть математическое моделирование как элементов СП, так и процессов в нем. В работе предлагается численный подход к моделированию сред, имеющих фрактальную структуру, основанный на использовании результатов в двух областях: с помощью геометрического моделирования на основе теории грануляции прогнозируется и оценивается фрактальная размерность СП, а с помощью теории переноса во фрактальных средах предлагается моделирование изменения характеристик СП.

Теория грануляции, пространственные гранулы; фракталы; фрактальные среды; процессы переноса; дробные операторы; краевые задачи.

S.A. Butenkov, A.L. Zhukov, N.S. Krivsha, Y.A. Ginawi

MATHEMATICAL MODDELLING FOR FRACTAL MEDIUM ON BASIS OF INFORMATION GRANULATION THEORY

There are a many different approaches to the fundamental problem of transfer processes inside the fractal structure medium, the same as porous soil and another (artificial) porous mediums like the aero silica gel etc. Meanwhile, the very usual and well known fractal medium, is not sufficiently explored and theoretically described, there are under our feet. It's the snow cower (SC),

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-01-90700-моб_ст).

that is the mixed from very unique and similar objects – snowflakes. All measurements and explorations from SC and snowflakes are very difficult problems because of very unsteady and changeable properties of snowflakes. The leading role in the SC explorations are for the techniques of mathematical modeling of non-equilibrium processes inside the fractal medium. The very common numerical approach to geometrical modeling of fractal medium are proposed in the presented paper. Proposed approach is based on fundamental theory of information granulation and space granulation.

Ttheory of information granulation; space granules; fractals; fractal medium; fractional operators; boundary-value problems.

Введение. Применение концепции фрактальной геометрии в физике берет свое начало от ряда фундаментальных работ Мандельброта и др. [1–3]. Теория фрактальных сред успешно применяется для анализа структуры и свойств объектов, образованных в результате протекания неравновесных процессов [2], в частности таких, как образование снежинок внутри облака [4]. Возникающие в результате структуры, такие как механически связанное множество снежинок (снежный покров СП), называют *кластерами*. Это самопроизвольно возникающая совокупность связанных между собой частиц, когда силы взаимодействия между частицами являются преобладающими. Внутри кластера сохраняется индивидуальность отдельных частиц. Однако со стороны кластер представляется как образование с качественно новыми свойствами, которые отсутствуют у отдельных составляющих частиц. В связи с исследованиями геометрии кластеров возник новый термин – фрактальный кластер, представляющий ассоциацию связанных между собой частиц, имеющих фрактальное строение. Для фрактальных кластеров характерны рыхлость и разветвленность.

Говоря о кластерных средах с геометрической точки зрения [1], прежде всего, следует отметить наличие свойства *самоподобия*, т.е. инвариантности относительно выбранных групп геометрических преобразований [2]. Традиционный статистический подход при описании неравновесных процессов основан на существовании параметров «сокращенного описания», выделяющихся для их описания при больших временных масштабах [6]. В результате параметры сокращенного описания системы начинают полностью определять состояние системы, причем нет необходимости проводить усреднение микроскопической динамики системы. Это в конечном итоге приводит к расходящимся величинам в кинетических коэффициентах и к яркому проявлению нелинейных свойств, эффектов памяти, самоорганизации. Для таких систем также характерно отсутствие локальных приближений, как по пространственным так и по временным характеристикам [7]. При этом фундаментально то, что отсутствует общее интегродифференциальное уравнение: на каждой стадии развития система описывается различными уравнениями [8]. Сложный характер пространственных и временных корреляций приводит к появлению эффектов памяти и самоорганизации [9].

Особый интерес в концепции фрактальной физики вызывает развиваемый сравнительно недавно подход, основанный на использовании формализма дробного интегродифференцирования [7]. Отметим, что несмотря на то, что формальный математический аппарат дробных производных детально развит, их применение в естествознании задерживалось отсутствием физической интерпретации [10]. Как оказалось, использование дробной производной по времени позволяет учесть эффекты памяти внутри среды. В [11] показано, что существует промежуточный этап «частичной» эволюции динамической системы, занимающий промежуточное положение между предельными этапами эволюции – от полной потери до полного присутствия памяти. При «частичном» типе эволюции промежутки времени с эффектом памяти образуют множество меры Хаусдорфа–Безиковича [1]. Поскольку составляющие СП могут иметь различную размерность (случай мультифрактала, т.е. фрактального множества, состоящего из монофракталов с различными размерностями Хаусдорфа), то наиболее универсально применение метода размерностей Реньи [12]:

$$D_q = \lim_{\varepsilon\to\infty}\left[\ln\left(I_q(\varepsilon)\right)\Big/\ln\left(1/\varepsilon\right)\right], \qquad (1)$$

где $I_q(\varepsilon) = \dfrac{1}{1-q}\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i^q$ – информация Реньи порядка q.

В частности, для разных значений q, мы можем получить:

$$D_0 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{1-0}\ln\left(\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i^0\right)\Big/\ln\left(1/\varepsilon\right)\right] = \lim_{\varepsilon\to\infty}\left[\ln\left(M(\varepsilon)\right)\Big/\ln\left(1/\varepsilon\right)\right] = D_F,$$

$$D_1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i \ln\left(p_i\right)\Big/\ln\left(1/\varepsilon\right)\right] = D_I, \text{ так как с учетом (1)}$$

$$I_1(\varepsilon) = \lim_{q\to 0}\left[\frac{1}{1-q}\ln\left(\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i^q\right)\right] = -\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i \ln\left(p_i\right).$$

Наконец, для $q = 2$ получаем

$$D_2 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{1-2}\ln\left(\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i^2\right)\Big/\ln\left(1/\varepsilon\right)\right] = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln\left(\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i^2\right)\Big/\ln\left(\varepsilon\right)\right] = D_C.$$

Размерность Реньи (1) является монотонно убывающей функцией, т.е. для любых $q_1 < q$ выполняется неравенство $D_{q_1} \geq D_q$. Равенство достигается только в случае пространственно-однородных кластеров. На основе (1) в теории дробных операторов вводят функцию $\Gamma(q,\tau)$, называемую статистической суммой и являющуюся обобщением меры Хаусдорфа для мультифракталов [13]. Каждое подмножество входит $\Gamma(q,\tau)$ со своим весом p_i:

$$\Gamma(q,\tau) = \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q \delta_i^{-\tau}. \qquad (2)$$

Можно показать, что для каждого значения q найдется такое единственное значение $\tau(q)$, что функция $\Gamma(q,\tau(q))$ будет иметь конечное положительное значение $0 < \Gamma(q,\tau(q)) < \infty$. Тогда каждому действительному значению q можно поставить в соответствие значение D_q, где $\tau(q) = D_q(q-1)$. В этом случае значение размерность Реньи D_0 равно размерности Хаусдорфа D_H фрактального множества [14].

В задачах моделирования важно установить соответствие между геометрией реального физического объекта (снежинки) и ее размерности (2). Эта задача значительно усложняется тем, что формально форма снежинок уникальна и весьма сложна с точки зрения аналитической геометрии [12]. В настоящей работе предлагается использовать численную оценку размерности отдельных снежинок в составе СП на основе методов теории пространственной грануляции [15,16], что позволит в дальнейшем перейти к моделированию процессов переноса в подобной среде с фрактальной структурой [17,18].

1. Гранулированные модели одномерных фрактальных структур. Согласно [15], возможно построение дискретных моделей фрактальных структур на базовых элементах Грассмана [16]. В частности, в [15] введена общая модель декартовой гранулы во вмещающем евклидовом пространстве размерности n, заданным с помощью $n+1$ упорядоченной точки евклидова пространства. На ее основе для одномерных гранул G_1^1 и G_1^2 можно записать выражения спектра мер на гранулах с помощью определителей миноров базового элемента в виде

$$\eta_{G_1^1}^1 = \left\| \begin{matrix} x_1^1 & 1 \\ x_2^1 & 1 \end{matrix} \right\|, \ \eta_{G_1^2}^1 = \left\| \begin{matrix} x_1^2 & 1 \\ x_2^2 & 1 \end{matrix} \right\|, \ L_1\left(G_1^1, G_1^2\right) = \sqrt{\left(\eta_{G_1^1}^1\right)^2 + \left(\eta_{G_1^2}^1\right)^2}. \quad (3)$$

Для получения численного метода оценки ФР заданного объекта (2) с помощью (3) необходимо построить дискретную модель объекта, после чего разработать алгоритм вычисления требуемой оценки [19]. Следующий рисунок изображает предфракталы, входящие в параметризованную фрактальную структуру на прямой (типа канторовой пыли), которая может быть сконструирована для заданной размерности (2). Для описания самоподобной структуры фрактала на основе модели (1) введем последовательность поколений предфракталов, параметрически зависящих от номера поколения t, начиная от $t=0$ (затравка фрактала).

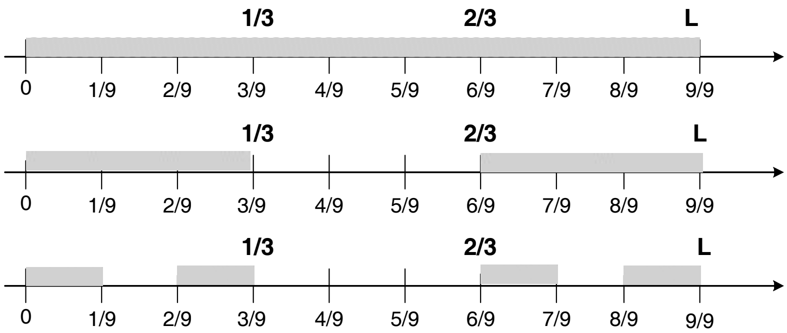

Рис. 1. Конструирование параметризованной модели предфрактала на прямой

В общем случае получаем выражение для меры (3) на одномерном предфрактале типа канторовой пыли поколения t в виде

$$M_t = \sum_{j=1}^{K^{(t+1)}} \left| \begin{matrix} \dfrac{jL}{K^{(t+1)}} & 1 \\ \dfrac{(j-1)L}{K^{(t+1)}} & 1 \end{matrix} \right|, \ j = 1,3,7,...,\left\lfloor \frac{K^{(t+1)}}{P} \right\rfloor,...,K^{(t+1)}, \quad (4)$$

т.е. значение индекса выбора значащего отрезка одномерного фрактального объекта в зависимости от поколения t определяется параметром $P \le (K-1)$, определяющим плотность заполнения отрезка длины L. Для получения значения размерности подобия запишем [1]

$$D_S = -\lim_{N\to\infty} \frac{\ln N}{\ln M_N}. \quad (5)$$

Если параметры дискретной модели L,K,P выбраны таким образом, что моделируемый фрактал является самоподобным, то для него размерность Хаусдорфа-Безиковича $D = D_S$ [2]. В результате мы получили параметризованную дискретную модель фрактального объекта во вмещающем пространстве размерности $n=1$, позволяющую путем выбора допустимых значений параметров дискретной модели L,K,P построить все возможные варианты фрактальной пыли на отрезке прямой.

2. Гранулированные модели на плоскости. Используя введенные в [15,16] общие выражения для гранул во вмещающем пространстве произвольной размерности, мы можем для случая размерности $n=2$ получить различные типы численных параметризованных моделей фрактальных объектов. На рис. 2 изображен известный пример фрактальной структуры, называемой ковром Серпинского [1].

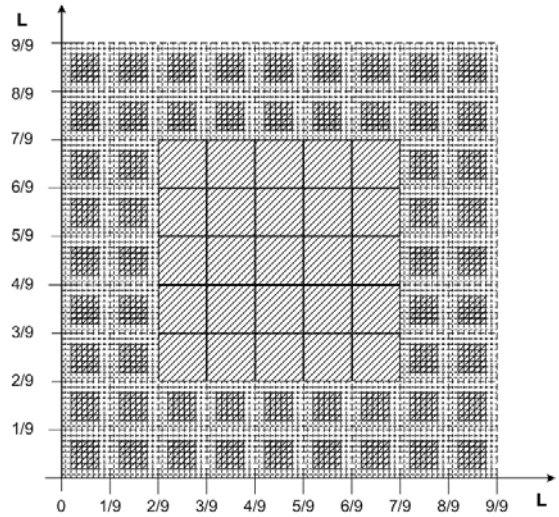

Рис. 2. Конструирование параметризованной модели предфрактала на плоскости (ковер Серпинского)

Для поколения t предфрактала второго порядка на плоскости (ковер Серпинского [1]) на основании (3) можно записать:

$$M_t^{G_2} = \sum_{j=1}^{K^{(t+1)}} \begin{vmatrix} 0 & \frac{(j-1)L}{K^{(t+1)}} & 1 \\ \frac{L}{K^{(t+1)}} & \frac{(j-1)L}{K^{(t+1)}} & 1 \\ 0 & \frac{jL}{K^{(t+1)}} & 1 \end{vmatrix} + \sum_{j=1}^{K^{(t+1)}-1} \begin{vmatrix} \frac{jL}{K^{(t+1)}} & 0 & 1 \\ \frac{(j+1)L}{K^{(t+1)}} & 0 & 1 \\ \frac{jL}{K^{(t+1)}} & \frac{(j-1)L}{K^{(t+1)}} & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{K^{(t+1)}} \begin{vmatrix} \frac{jL}{K^{(t+1)}} & \frac{(j-1)L}{K^{(t+1)}} & 1 \\ \frac{(j+1)L}{K^{(t+1)}} & \frac{(j-1)L}{K^{(t+1)}} & 1 \\ \frac{jL}{K^{(t+1)}} & \frac{jL}{K^{(t+1)}} & 1 \end{vmatrix}, \; j = 1,3,7,\ldots,\left\lfloor \frac{K^{(t+1)}}{P} \right\rfloor,\ldots,K^{(t+1)}. \quad (6)$$

Используя (6), мы можем с помощью (5) найти численную оценку (2).

Приведем пример новой конструктивной модели фрактала на плоскости, предложенную в наших работах. В связи с довольно сложной симметрией естественных снежинок [5,20] для «подгонки» заданного геометрического фрактального объекта под заданную размерность (2) необходимо уметь задавать модели с различной вращательной симметрией. Этого легко добиться, переходя к полярной системе на плоскости. Рис. 3 демонстрирует пример построения элемента фрактала с 4-осевой симметрией.

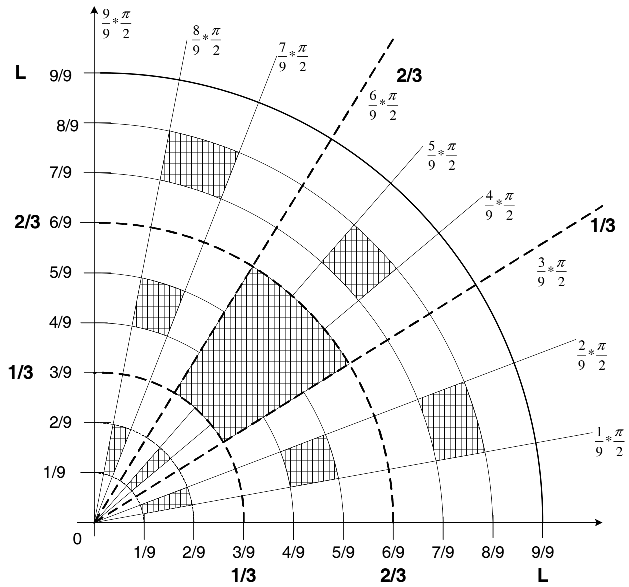

Рис. 3. Конструирование модели предфрактала в полярной системе

Используя модели пространственных гранул, предложенные в [15], получаем выражение площади для предфрактала в полярной системе координат, имеющего параметры $L = \rho_{\max}$ и $\Phi = \varphi_{\max}$ в виде

$$M_t^{G^{Polar}} = \sum_{j=0}^{K^t} \begin{vmatrix} 0 & \frac{L}{K^t} & 0 \\ \frac{(j+1)\Phi}{K^t} \cdot \frac{L}{K^t} & 0 & 1 \\ \frac{(j+2)\Phi}{K^t} \cdot \frac{L}{K^t} & 0 & 1 \end{vmatrix} + \sum_{j=0}^{K^t-1} \begin{vmatrix} \frac{L}{K^t} & \frac{(K-1)^t L}{K^t} & 0 \\ \frac{(j+2)\Phi}{K^t} \cdot \frac{(K-1)^t L}{K^t} & \frac{(j+2)\Phi}{K^t} \cdot \frac{L}{K^t} & 1 \\ \frac{(j+1)\Phi}{K^t} \cdot \frac{(K-1)^t L}{K^t} & \frac{(j+1)\Phi}{K^t} \cdot \frac{(K-1)^t L}{K^t} & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{K^t} \begin{vmatrix} \frac{(K-1)^t L}{K^t} & \frac{K^t L}{K^t} & 0 \\ \frac{j\Phi}{K^t} \cdot \frac{K^t L}{K^t} & \frac{j\Phi}{K^t} \cdot \frac{(K-1)^t L}{K^t} & 1 \\ \frac{(j+1)\Phi}{K^t} \cdot \frac{K^t L}{K^t} & \frac{(j+1)\Phi}{K^t} \cdot \frac{(K-1)^t L}{K^t} & 1 \end{vmatrix}, \; j = 0, 3, 7, ..., \left\lfloor \frac{K^t}{P} \right\rfloor, ..., K^t, \qquad (7)$$

т.е. значение индекса выбора значащего отрезка одномерного фрактального объекта в зависимости от поколения t определяется параметром $P \le (K-1)$.

Для численного метода оценки размерности заданного объекта необходимо построить дискретную модель объекта типа (4),(6),(7), после чего разработать алгоритм вычисления требуемой оценки [12].

3. Построение алгоритмов вычисления размерностей геометрических фрактальных объектов. В работах по применению полученных выше дискретных моделей фрактальных структур [16,21] был предложен ряд алгоритмов, основанный на предельном переходе (5). Так, на основе дискретной модели (4) мы можем записать алгоритм вычисления размерности в виде

$$M_N^{G_1}=\sum_{t=1}^{N}\sum_{j=1}^{K^{(t+1)}}\begin{vmatrix}\dfrac{jL}{K^{(t+1)}} & 1\\ \dfrac{(j-1)L}{K^{(t+1)}} & 1\end{vmatrix},\ j=1,3,7,...,\left\lfloor\frac{K^{(t+1)}}{P}\right\rfloor,...,K^{(t+1)}. \qquad (8)$$

Для модели (6) соответственно запишем:

$$M_N^{G_2}=\sum_{t=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{K^{(t+1)}}\begin{vmatrix}0 & \dfrac{(j-1)L}{K^{(t+1)}} & 1\\ \dfrac{L}{K^{(t+1)}} & \dfrac{(j-1)L}{K^{(t+1)}} & 1\\ 0 & \dfrac{jL}{K^{(t+1)}} & 1\end{vmatrix}+\sum_{j=1}^{K^{(t+1)}-1}\begin{vmatrix}\dfrac{jL}{K^{(t+1)}} & 0 & 1\\ \dfrac{(j+1)L}{K^{(t+1)}} & 0 & 1\\ \dfrac{jL}{K^{(t+1)}} & \dfrac{(j-1)L}{K^{(t+1)}} & 1\end{vmatrix}+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{K^{(t+1)}}\begin{vmatrix}\dfrac{jL}{K^{(t+1)}} & \dfrac{(j-1)L}{K^{(t+1)}} & 1\\ \dfrac{(j+1)L}{K^{(t+1)}} & \dfrac{(j-1)L}{K^{(t+1)}} & 1\\ \dfrac{jL}{K^{(t+1)}} & \dfrac{jL}{K^{(t+1)}} & 1\end{vmatrix}\right),\ j=1,3,7,...,\left\lfloor\frac{K^{(t+1)}}{P}\right\rfloor,...,K^{(t+1)}. \qquad (9)$$

Наконец, для модели (7) мы получаем

$$M_N^{G_2}=\sum_{t=1}^{N}\left(\sum_{j=0}^{K^t}\begin{vmatrix}0 & \dfrac{L}{K^t} & 0\\ \dfrac{(j+1)\Phi}{K^t}\cdot\dfrac{L}{K^t} & 0 & 1\\ \dfrac{(j+2)\Phi}{K^t}\cdot\dfrac{L}{K^t} & 0 & 1\end{vmatrix}++\sum_{j=0}^{K^t-1}\begin{vmatrix}\dfrac{L}{K^t} & \dfrac{(K-1)^t L}{K^t} & 0\\ \dfrac{(j+2)\Phi}{K^t}\cdot\dfrac{(K-1)^t L}{K^t} & \dfrac{(j+2)\Phi}{K^t}\cdot\dfrac{L}{K^t} & 1\\ \dfrac{(j+1)\Phi}{K^t}\cdot\dfrac{(K-1)^t L}{K^t} & \dfrac{(j+1)\Phi}{K^t}\cdot\dfrac{(K-1)^t L}{K^t} & 1\end{vmatrix}+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=0}^{K^t}\begin{vmatrix}\dfrac{(K-1)^t L}{K^t} & \dfrac{K^t L}{K^t} & 0\\ \dfrac{j\Phi}{K^t}\cdot\dfrac{K^t L}{K^t} & \dfrac{j\Phi}{K^t}\cdot\dfrac{(K-1)^t L}{K^t} & 1\\ \dfrac{(j+1)\Phi}{K^t}\cdot\dfrac{K^t L}{K^t} & \dfrac{(j+1)\Phi}{K^t}\cdot\dfrac{(K-1)^t L}{K^t} & 1\end{vmatrix}\right),\ j=1,3,7,...,\left\lfloor\frac{K^{(t+1)}}{P}\right\rfloor,...,K^{(t+1)}. \qquad (10)$$

Очевидно, что полученные алгоритмы являются конечными и сходящимися [19]. Сложность приведенных алгоритмов является кубической [21]. Полученные с их помощью численные оценки меры фракталов используются для получения значения размерности подобия объекта с помощью (5).

Заключение. Полученные в настоящей работе результаты по моделированию составляющих снежного покрова (СП) открывают возможности применения методов моделирования процессов переноса на фрактальных структурах к моделированию СП и определению его основных свойств в зависимости от условии его формирования и метаморфизма [12,21].

На рис.4 изображены регулярные модели СП, используемые для построения его математических моделей в работах [4] и [20]. Очевидно, что подобные модели неадекватно отражают структуру СП и не учитывают его фрактальных свойств [10,13,14].

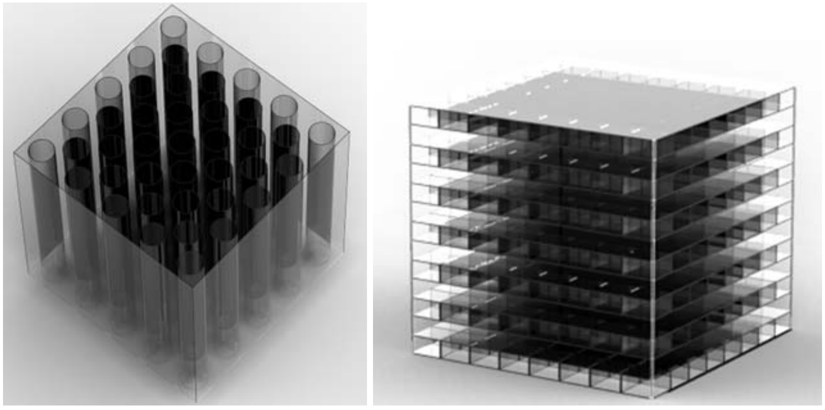

Рис. 4. Регулярные геометрические модели снежного покрова по [4] и [20]

Следующий рис. 5 наглядно представляет концепцию представления модели снежного покрова в виде фрактального кластера [21].

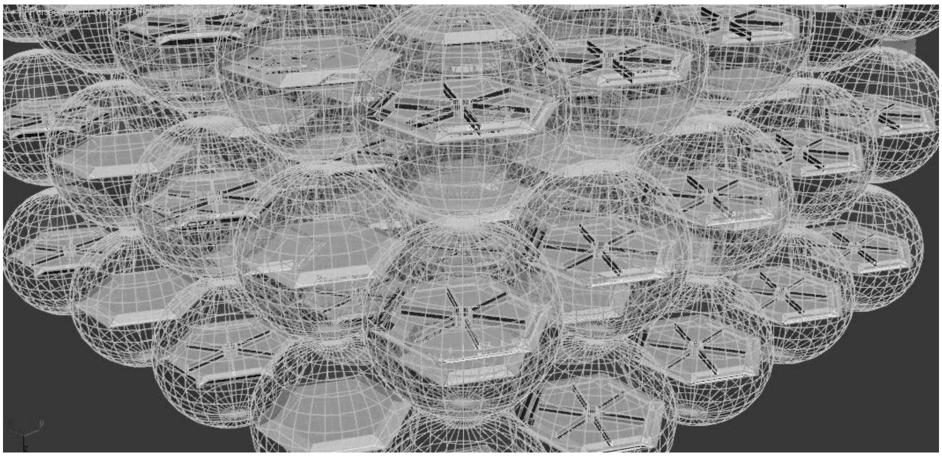

Рис. 5. Модель снежного покрова как упаковки фрактальных структур

Такое представление позволяет, в частности, легко объяснить некоторые процессы уплотнения СП под действием механических факторов (ветер, сила тяжести) как изменение типа упаковки сферических гранул, включающих отдельные снежинки [12]. Полученные математические модели, в частности, могут использоваться для построения численных методов нахождения значений параметров снежного покрова, представленного фрактальной моделью [21], а также для моделирования фрактальных структур с заданной геометрией. При этом, в отличие от подхода, предложенного в [22], новый подход позволяет параметризовать модели для получения заданных значений оценок размерности на этапе проектирования, в то время как известный из [22] подход основан на модификации известных фрактальных структур с помощью преобразований, сохраняющих меру.

В качестве объекта применения полученных фрактальных структур возможно расширения области применения новых методов моделирования процессов переноса в средах с фрактальной структурой [6,9,10,13,14] на процессы переноса в составе снежного покрова, которые определяют изменение характеристик СП под действием водяного пара, теплового потока и других физических факторов [4,20].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Мандельброт Б.Б.* Фрактальная геометрия природы. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002.
2. *Смирнов Б.М.* Физика фрактальных кластеров. – М.: Наука, 1991.
3. *Vicsek T.* Fractal Growth Phenomena. – Singapore: World Scientific, 1987.
4. *Долов М.А., Халкечев В.А.* Физика снега и динамика снежных лавин. – Л.: Гидрометеоиздат, 1972.
5. *Klein F.* Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Erlangen, Germany, 1872.
6. *Нахушев А.М.* Элементы дробного исчисления и их применение. – Нальчик, 2000. – 299 с.
7. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и Техника, 1987. – 688 с.
8. *Нахушева В.А.* Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. – М., 2006.– 174 с.
9. *Бейбалаев В.Д.* Математические модели неравновесных процессов в средах с фрактальной структурой: Дисс. … канд. физ.-мат. наук.– Таганрог, 2009. – 136 с.
10. *Нахушева В.А.* Об одной модели процессов переноса // Материалы Международного Российско-Узбекского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». – Нальчик-Эльбрус, 2003. – С.142-144.
11. *Нигматулин Р.Р.* Дробный интеграл и его физическая интерпретация // ТМФ. – 1992. – Т. 90, № 3. – С. 354-368.
12. *Бутенков С.А., Жуков А.Л., Сухинов А.И.* Моделирование снежного покрова на кластерных вычислительных системах с использованием методов гранулирования многомерных данных // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 8 (97). – С. 213-223.
13. *Бейбалаев В.Д.* Задача теплопереноса в средах с фрактальной структурой // Материалы второй Международной научной конференции «Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения». – Махачкала, 2007. – С. 56-60.
14. *Нахушева В.А.* Об одной математической модели переноса тепла в почве// Материалы международной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». – Нальчик, 2006. – С. 208-209.
15. *Бутенков С.А.* Алгебраические модели в задачах интеллектуального анализа многомерных данных// Математическая теория систем 2009 (МТС-2009) // Сб. научных трудов международной научно-технической конференции. – М., 2009. – С. 93-101.
16. *Бутенков С.А., Жуков А.Л.* Гранулирование геометрических данных в задачах автоматизированного проектирования // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2008. – № 12 (89). – С. 138-146.
17. *Назаралиев М.А., Бейбалаев В.Д.* Численные методы решения краевой задачи для уравнения теплопереноса с производной дробного порядка // Вестник ДГУ. – 2008. – Вып. 6. – С. 46-54.
18. *Бейбалаев В.Д.* Численный метод решения задачи переноса с двусторонней производной дробного порядка // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2009. – Т. 1 (118).
19. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы: Учебное пособие для вузов. – М.: Наука. Гл. ред. Физико-математической литературы, 1989. – 432 с.
20. *Тушинский Г.К., Гуськова Е.Ф.* Перекристаллизация снега и возникновение снежных лавин. – М.: Изд.-во МГУ, 1953.
21. *Жуков А.Л.* Оценка плотности снежного покрова на основе фрактальной модели // Материалы I Всероссийской конференции молодых ученых «Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики». – Терскол, 2010. – С. 83-86.
22. *Морозов А.Д.* Введение в теорию фракталов. – М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.– 160 с.

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н., профессор С.Ш. Рехвиашвили.

Бутенков Сергей Андреевич
Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.
E-mail: saab@tsure.ru.
347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
Тел.: 88634371668.
Заведующий научной лабораторией; к.т.н.; доцент.

Кривша Наталья Сергеевна
E-mail: vit@tsure.ru.
Тел.: 88634371606.
Кафедра высшей математики; к.т.н.; доцент.

Джинави Яссин Ахмед
E-mail: ginawiyassin@yahoo.com.
Кафедра высшей математики; аспирант.

Жуков Анзор Людинович
НИИ прикладной механики и автоматики КБЦ РАН.
E-mail: lamark-21@yandex.ru.
Кабардино-Балкарская республика, г. Нальчик, ул. Вартанова, 89 а.
Тел.: 88662426661.
Научный сотрудник.

Butenkov Sergej Andreevich
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.
E-mail: saab@tsure.ru.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: +78634371668.
Head of Research Laboratory; Cand. of Eng. Sc.; Associate Professor.

Krivsha Natal’ya Sergeevna
E-mail: vit@tsure.ru.
Phone: +78634371606.
The Department of Higher Mathematics; Cand. of Eng. Sc.; Associate Professor.

Ginawi Yassin Ahmed
E-mail: ginawiyassin@yahoo.com.
The Department of Higher Mathematics; Postgraduate Student.

Zhukov Anzor Lyudinovich
Scientific Research Institute of Applied Mathematics and Automation Kabardino-Balkar Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences.
E-mail: lamark-21@yandex.ru.
89 a, Vartanova, Nalchik, Kabardino-Balkar Scientific, Russia.
Phone: +78662426661.
Researcher.