Сухинов Антон Александрович
Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.
E-mail: Soukhinov@gmail.com
г. Таганрог, ул. Пархоменко 58/1, кв. 71.
Тел.: +79286205420.
Кафедра высшей математики; к.ф.-м.н.; доцент.

Тетеревлёв Игорь Николаевич
E-mail: tin146@mail.ru.
г. Таганрог, ул. Зои Космодемьянской, 9 Е.
Тел.: +79185199182.
Аспирант.

Царевский Виктор Васильевич
E-mail: dark5511@gmail.com.
Тел.: +79185767552.
г. Таганрог, Октябрьская площадь 5, комната 420.
Аспирант.

Sukhinov Anton Alexandrovich
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.
E-mail: Soukhinov@gmail.com.
Phone: +79286205420.
58/1, Parkhomenko Street, Apt. 71, Taganrog, Russia.
The Department of Higher Mathematics; Cand. of Phis.-Math. Sc.; Associate Professor.

Teterevlev Igor Nikolaevich
E-mail: tin146@mail.ru.
Phone: +79185199182.
9 E, Zoya Kosmodemyanskaya Street, Taganrog, Russia.
Postgraduate Student.

Tsarevsky Viktor Vasil’evich
E-mail: dark5511@gmail.com.
Phone: +79185767552.
5, Oktyabrskaya Sq., Room 420, Taganrog, Russia.

УДК 681.518

С.А. Бутенков

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ НА ФРАКТАЛЬНЫХ СТРУКТУРАХ С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ГРАНУЛЯЦИИ

Фрактальные системы образуют целый мир объектов и явлений, которые в отличие от непрерывных систем имеют «рыхлую» структуру. Если в математику концепция фрактальных систем вошла много десятков лет назад, то в физике ценность подобных идей была осознана лишь в 70-е годы нашего столетия. Одно из новых направлений моделирования физических процессов связано с исследованием фрактальных кластеров (ФК). ФК (или фрактальные агрегаты) составляют один из классов фрактальных объектов, образующихся при слипании движущихся по определенному закону твердых частиц. В частности, ФК могут также организовываться и при объединении других ФК. К таким ФК относится, в частности, снежный покров (СП), представляющий собой агрегат из снежи-

нок, представляющих собой фрактальные структуры (в силу неравновесных термодинамических условий их роста внутри облака), сохраняющих свою индивидуальность в составе СП и претерпевающих метаморфические процессы. В результате для полного представления происхождения и эволюции снежинок и составленного из них СП следует решать две отдельных задачи: предсказание типа и свойств снежинок по условиям их формирования и предсказание и моделирование процессов метаморфизма снежинок и, как следствие, СП как составленного из них фрактального агрегата. В работе предлагается геометрический подход к построению моделей ФК на основе теории грануляции, который позволяет моделировать процессы в ФК с помощью дробных операторов.

Теория грануляции; пространственные гранулы; фракталы; фрактальные среды; процессы переноса; дробные операторы; краевые задачи.

S.A. Butenkov

GEOMETRICAL APPROACH TO PARAMETERIZED MEMBERSHIP FUNCTIONS DESIGN BY PARAMETERIZED OPERATIONS

The world of fractal mediums are the aggregate of different kinds of very mellows structures. The same models are proposed in physics only at near times. One of the interesting branches of porous mediums are the fractal clusters. The analogous structures are the result of aggregation processes, especially in non-equilibrium conditions. Also, another branch of fractal clusters are the result of aggregation of many kinds of small clusters too. For example, the snow cover is the aggregation of different kinds of snow flakes. All mentioned particles (snow flakes) are separate and can be changed independently by means of temperature, humidity etc. As a result, there are the two main problems for the snow cower parameters prediction. At first we must define the parameters and shapes of isolated snow flakes (by meteorological parameters). After them we can perform the modeling of snow metamorphism processes. The main problem is the fractal dimension of snow flakes because we must use the fractal operators techniques. The new approach to the mentioned problems are based on the theory of information granulation.

Theory of information granulation; space granules; fractals; fractal medium; fractional operators; boundary-value problems.

Введение. Фрактальные системы, согласно своему определению [1,2], обладают размерностью, не совпадающей с размерностью пространства, в котором они существуют [1]. Предметом анализа в настоящей работе является один из физических объектов с фрактальной структурой, получивший название "фрактальный агрегат" или "фрактальный кластер". Такая система имеет рыхлую и ветвистую структуру и образуется в большом наборе физических процессов, сопровождающихся ассоциацией твердых частиц близких размеров. Эти процессы имеют место, в частности, при формировании снежинок внутри облака [3].Такие процессы принято называть процессами роста [4].Одним из свойств ФК кластера является то, что по мере его роста падает средняя плотность вещества в объеме, занимаемом кластером, таким как снежинка. Если соединять большое число фрактальных кластеров, то получим кластер, который обладает фрактальными свойствами на малых размерах и однороден на больших размерах. Такими кластерами с фрактальной структурой являются пористые вещества (например, снежный покров [5]), поскольку их малые элементы также являются фрактальными кластерами [6–8].

Определяющим свойством систем с фрактальной структурой является свойство самоподобия, т.е. инвариантность относительно геометрических преобразований [9]. Традиционный статистический подход к описанию неравновесных процессов основан на существовании параметров «сокращенного описания», выделяющихся для их описания большими временными масштабами [8]. При этом более важно то, что наряду с иерархией временных масштабов, позволяющих ввести «сокращенные параметры», существует также и определенная упорядоченность медленно и быстро меняющихся величин, благодаря возникновению особого рода корреляций частиц системы [11]. Эти корреляции и приводят к тому, что параметры сокращенного описания системы начинают определять состояние системы, не требуя проведения усреднения микроскопической динамики системы. Для таких систем общее интегродифференциальное уравнение: на каждой стадии развития система описывается различными уравнениями [6,7]. Все это в целом и выделяет класс фрактальных систем в сравнении с локально-определенными [12]. Отметим, в основе математических моделей локально-определенных систем лежат предельные переходы $\Delta x \to 0$ и $\Delta t \to 0$. В случае, когда такие допущения не имеют места, необходимо использовать неравновесные модели [6].

Особый интерес в концепции фракталов представляет открытый сравнительно недавно подход, основанный на использовании формализма дробного интегродифференцирования [8]. Отметим, что несмотря на то, что математический аппарат дробных производных детально развит [7], их применение в естествознании задерживалось отсутствием физической интерпретации. В настоящее время показано, что при использовании дробной производной необходимо учесть эффекты временной и пространственной «памяти» (или, соответственно, корреляции). Учёт этих эффектов для некоторой пространственной величины $f(x)$, связанной с величиной $\varphi(x)$, означает наличие между ними связи типа $f(x)=\int_0^x K(x-\nu)\varphi(\nu)d\nu$, причем эффект корреляции пространственных значений моделируется с помощью выбора вида ядра $K(\cdot)$ [6]. Имеет место диапазон определений ядер корреляции (или памяти применительно к временным корреляциям). Так, величина без корреляции (аналог Марковского процесса без памяти для времени), описывается введением ядра вида $K(x-\nu)=\omega\delta(x-\nu)$, где ω – положительная константа, а $\delta(\cdot)$ – функция Дирака. При наличии полной корреляции (памяти) имеет место $K(x-\nu)=x-\eta(x-\nu)$, где $\eta(\cdot)$ – функция Хевисайда [12]. В настоящее время показано, что существует промежуточный этап «частичной» корреляции (или памяти). При этом промежутки пространства с эффектом корреляции (или времени с эффектом памяти) образуют множество меры Хаусдорфа–Безиковича [13]. Геометрия решений системы с частичной корреляцией (памятью) описывается дробными производными, например, вида

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x)\Rightarrow\frac{\partial^{\alpha}}{l_0\partial\nu^{\alpha}}f(\nu)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{l_0 d\nu}\int_0^{\nu}\frac{f(\varsigma)}{(\xi-\varsigma)^{\alpha}}d\varsigma\,, \tag{1}$$

где $\nu=x/l_0$ – безразмерная координата, l_0 – характерный размер рассматриваемого процесса, $\Gamma(\cdot)$ – функция Эйлера. Как видно из (1), в определении дробной производной искомая функция находится под интегралом по координате, что соответствует учету эффектов корреляции, причем «мера» участия значений функции в далее отстоящих точках определяется значением α, которое является фрактальной размерностью системы. В случае временной переменной вместо учета корреляций имеет место эффект «памяти» о предыдущих значениях величины. Соответствующая дробная производная от $f(t)$ по t имеет аналогичный (1) вид с заменой $l_0\to t_0,\ \nu_0\to\xi,$ где t_0 – характерное время процесса, а безразмерное время $\tau=t/t_0$ [10].

Таким образом, значение фрактальной размерности (ФР) моделируемого объекта имеет основополагающее значение для процесса построения модели. Эта задача может быть решена средствами теории пространственной грануляции, позволяющей строить и исследовать фрактальные структуры во вмещающих пространствах различной размерности [14,15].

С учетом этих положений работа организована следующим образом: в разделе 1 вводятся основные положения теории пространственной грануляции, в разделе 2 описывается методология построения моделей фракталов в декартовых координатах, а в разделе 3 – построение моделей в криволинейных координатах и их применение.

1. Основы пространственной грануляции. Известные на настоящий момент типы фракталов получены, в основном, путем случайного поиска геометрической структуры моделей [1] либо в результате применения стохастических моделей роста фрактальных структур [4]. Как указывалось выше, основным свойством фрактальных структур является самоподобие [1]. Для его моделирования в работе [9] предлагается подход к порождению новых экземпляров фрактальных структур, основанный на применении геометрических преобразований, не изменяющих меры на фрактале [12], к известным типам фракталов. Однако таким образом удается менять геометрию объекта, но не его ФР.

Новым подходом в построении самоподобных (фрактальных) структур с заданными параметрами является использование грассманновых элементов различной размерности [14], реализующих принцип пространственной грануляции сложных объектов [15]. В декартовых координатах объект представляется в виде иерархического множества типовых грассманновых элементов в пространстве размерности n, каждый из которых задан с помощью $n+1$ параметра:

$$G_n = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \cdots & x_n^1 & 1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & 1 \\ x_1^{n+1} & x_2^{n+1} & \cdots & x_n^{n+1} & 1 \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

при этом параметрами являются координаты вершин элемента $x_j^{i+1},\ i=1,...,n,\quad j=1,...,(n+1)$. Таким образом, структура грассманнова элемента кодируется с помощью матрицы (2), а его геометрические параметры – с помощью значений элементов этой матрицы. Подобные модели могут применяться для задач различной размерности и с различной геометрией, определяемой выбором системы координат [14].

Возможность теоретического определения и выбора ФР для (1) в сконструированных с помощью (2) структурах открывается благодаря тому, что модель (2) допускает вычисление целого спектра мер на элементах G_n с помощью определителей миноров (2). Так, три базовые меры на двумерной грануле G_2, имеющие очевидный геометрический смысл в декартовых координатах, задаются уравнениями:

$$\eta_{G_2}^1 = \begin{vmatrix} x_1^2 & 1 \\ x_2^2 & 1 \end{vmatrix},\ \eta_{G_2}^2 = \begin{vmatrix} x_1^1 & 1 \\ x_2^1 & 1 \end{vmatrix},\ \eta_{G_2}^3 = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & 1 \\ x_1^2 & x_2^2 & 1 \\ x_1^3 & x_2^3 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

На основе (3) можно получить также ряд производных мер, оценивающих геометрические характеристики гранул в декартовых координатах, например, в виде

$$P_{G_2}^1 = \left(\left| \eta_{G_2}^1 \right| + \left| \eta_{G_2}^2 \right| \right), \quad P_{G_2}^2 = \sqrt{\left| \eta_{G_2}^1 \right|^2 + \left| \eta_{G_2}^2 \right|^2} \, . \tag{4}$$

Аналогичным образом можно получить выражения для мер на гранулах G_n для произвольной размерности n в декартовых координатах [15].

Переходя к частным видам криволинейных координат, мы можем получить соответствующие (2) модели, используемые в различных физических и информационных процессах [16]. Так, необходимость моделирования симметричных объектов на плоскости приводит к использованию элементов в полярных координатах вида

$$G^{Polar}\left(\rho_1, \rho_2, \varphi_1, \varphi_2\right) = \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_2 & 0 \\ \varphi_1\rho_2 & \varphi_1\rho_1 & 1 \\ \varphi_2\rho_2 & \varphi_2\rho_1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $\rho_1, \rho_2, \varphi_1, \varphi_2$ – геометрические параметры, определяющие площадь грассманова элемента в полярной системе [14]. Выбирая значения этих параметров, можно, в частности, моделировать плоские объекты с многолучевой симметрией.

При анализе цветных изображений можно эффективно использовать конические грассмановы элементы в цветовом пространстве [17] вида

$$G_3^{Cone} = \begin{pmatrix} \left(z^1\right)^3 & \left(z^2\right)^3 & 0 & 0 \\ \dfrac{\rho^2}{\left(z^2\right)^2} & \dfrac{\rho^2}{\left(z^2\right)^2} & \dfrac{\rho^1}{\left(z^1\right)^2} & 0 \\ \varphi^2\rho^1 & \varphi^2\rho^1 & \varphi^2\rho^2 & 1 \\ \varphi^1\rho^1 & \varphi^1\rho^1 & \varphi^1\rho^2 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где геометрические параметры имеют тот же смысл, что и в (5) [14].

Привлекательная для теоретических исследований черта предложенных в [14] элементов заключается в их алгебраичности [16]. Используя предельный переход при увеличении номера поколения предфракталов, описываемых (1), (5) или (6), мы можем получить значение размерности подобия сконструированного объекта [9] в виде

$$D_S = -\lim_{j \to \infty} \frac{\ln j}{\ln P_{G_N}^i}, \tag{7}$$

где j – номер поколения предфракала, N – размерность вмещающего пространства, а значение i позволяет выбрать тип меры типа (3) или (4). Поскольку моделируемый фрактал является самоподобным, то для него размерность Хаусдорфа-Безиковича $D = D_S$ [1].

Рассмотрим ряд примеров применения этих теоретических положений к известным и новым видам фрактальных структур.

2. Построение гранулированных моделей фрактальных структур в декартовых координатах. Рассмотрим пример, показывающий как можно параметризовать известную одномерную фрактальную структуру (канторову пыль на прямой) с помощью предложенного подхода. Начальные предфракталы этой структуры с характерным размером L показаны на следующем рис. 1.

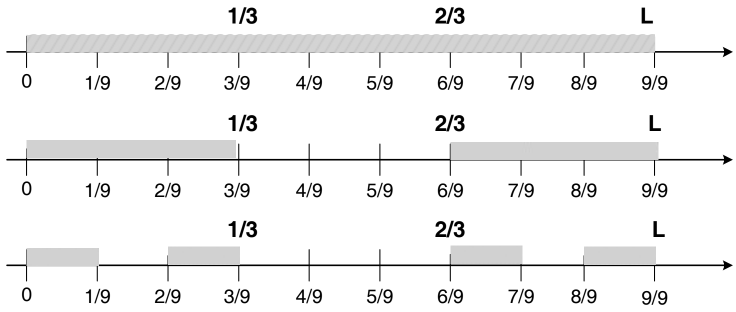

Рис. 1. Конструирование модели предфрактала на прямой

Рассматривая поколения $j = 0,1,...$ предфракталов на отрезке с заданным параметром разбиения K, мы можем с использованием (2) и (3) записать выражение для меры длины на предфрактале поколения j в виде

$$\eta_{G_1}^j = \frac{P^j}{K^j} L \begin{vmatrix} g+1 & 1 \\ g & 1 \end{vmatrix} = \frac{P^j}{K^j} L, \qquad (8)$$

где K – параметр разбиения, а значение параметра P выбирается из условия $P \le (K-1)$, что обеспечивает разрывы в структуре фрактала, параметр g – произвольное значение. В частности, для канторовой пыли $K = 3$ и $P = 2$ для любого g, что дает известную оценку длины предфрактала $L^j = \frac{2^j}{3^j} L$, позволяющую определить по (7) хаусдорфову размерность канторовой пыли [1]. Выбор соотношения значений параметров K и P позволяет задавать плотность заполнения отрезка, а параметр g участвует в матрице, описывающей структуру предфрактала.

Для случая двумерного вмещающего пространства $n = 2$ рассмотрим метод параметризации известной плоской фрактальной структуры (ковра Серпинского). Его геометрия и расположение поколений предфракталов на плоскости показаны на рис. 2.

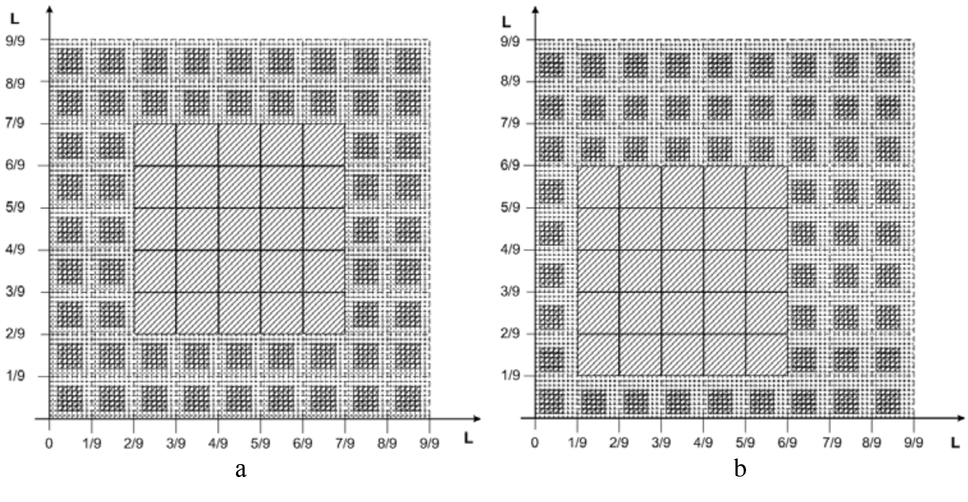

Рис. 2. Конструирование модели стандартного (a) и модифицированного (b) ковра Серпинского

Используя описанный в разд. 1 метод кодирования структуры в виде матриц для квадрата с характерным размером L, мы можем записать

$$\eta_{G_2}^j = \frac{P^j}{K^j} L^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \frac{(P-1)^j}{K^j} L^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \frac{(P-2)^j}{K^j} L^2 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{(K-1)^j}{K^j} L^2, \quad (9)$$

в частности для стандартного ковра Серпинского (рис. 2,a) $K = 3$, что дает известную оценку площади предфрактала $S^j = \frac{2^j}{3^j} L^2$, позволяющую определить по (7) и (9) хаусдорфову размерность ковра [1]. Изменяя K, P и структуру матриц предложенной модели, мы можем получить значительное количество моделей двумерных фракталов, отличающихся ФР и геометрией при соблюдении условия конечности предела (7). Одна из модификаций, отличающаяся своей геометрией от классической, изображена на рис. 2,b.

Рассмотрим теперь модели фрактальных структур в декартовых координатах для вмещающего пространства размерности $n = 3$. В частности, широко известна кубическая фрактальная структура, называемая губкой Менгера с характерным размером L [9]. Опуская промежуточные выкладки, запишем на основе (2) и (3) теоретическое значение объема для параметризованной модели предфрактала поколения j в виде:

$$\eta_{G_3}^j = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & L & 1 \\ 0 & L & 0 & 1 \\ \frac{(K^j - P)L}{K^j} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{(K^j - P)L^3}{K^j} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{(K^j - P)}{K^j} L^3, \quad (10)$$

в частности для $K = 3$, $P = 1$ (10) дает известную оценку площади для губки Менгера [1]. Выбирая различные допустимые значения P из условия конечности предела (7), мы можем параметризовать губку Менгера. Структура такого кубического фрактала совпадает со структурой губки Менгера, кодируемой матрицей (10). Однако, в принципе, возможны и другие варианты организации этой матрицы. В частности, для моделирования задач просачивания и переноса структуру следует выбирать из условия непрерывности «изъятых» из структуры элементов. Это условие может реализовываться для множества различных структур. В дальнейшем на подобных моделях могут формулироваться задачи, подобные (1) [19,20].

3. Построение гранулированных моделей фрактальных структур в криволинейных координатах. Рассмотрим новые модели фрактальных структур, получаемые применением (5) на плоскости. Одна из таких структур с характерными размерами L и $\pi/2$ изображена на рис. 3.

Структура, представленная на рис. 3, построена по алгоритму, аналогичному известному методу задания структуры ковра Серпинского, однако она не изоморфна ковру Серпинского, т.е. является новым типом фрактальной структуры [9]. Это связано с тем, что переход от моделей в декартовой системе (1) к моделям в других системах координат (5) не сводится к преобразованию координат с помощью якобиана [12].

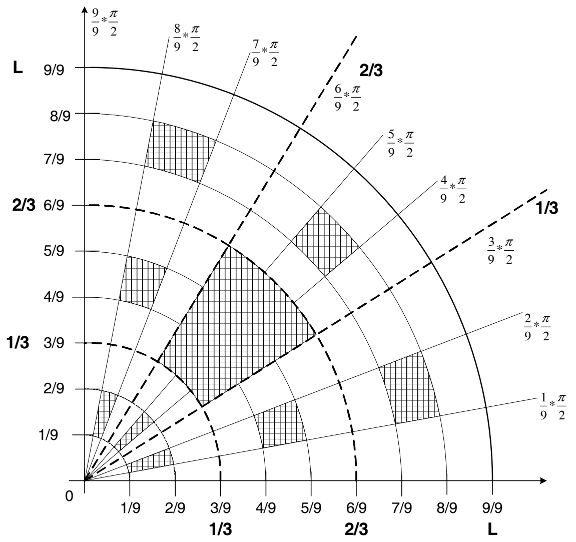

Рис. 3. Базовый элемент параметризованной модели фрактала в полярной системе координат

Модель рис. 3 может параметризоваться путем задания разбиения исходной области на элементы различного относительного размера (в полярных координатах), а также может модифицироваться путем вращений и изменения предельных углов границ элемента. В результате мы получаем возможность построения заданного множества фрактальных структур с заданной геометрической структурой и с заданной ФР. В частности, для структуры рис. 3 мы можем на основе (9) записать значение площади предфрактала поколения j:

$$\eta^{j}_{G_2^{polar}} = 3^j \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{L}{K^j} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{\Phi L}{K^{2j}} & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2^j \begin{vmatrix} \dfrac{L}{K^j} & \dfrac{(K-1)L}{K^j} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{(K-1)\Phi L}{K^{2j}} & \dfrac{\Phi L}{K^{2j}} & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+\ 3^j \begin{vmatrix} \dfrac{(K-1)L}{K^j} & \dfrac{KL}{K^j} & 0 \\ \dfrac{K\Phi L}{K^{2j}} & \dfrac{(K-1)\Phi L}{K^{2j}} & 1 \\ \dfrac{(K-1)K\Phi L}{K^{2j}} & \dfrac{(K-1)^2\Phi L}{K^{2j}} & 1 \end{vmatrix} = \frac{(K-P)^j}{K^{3j}}\Phi L^2, \qquad (11)$$

где L,Φ – характерные размеры грассманова элемента (см. рис. 3), параметры K и P имеют тот же смысл, что и в (7), (8), при тех же ограничениях. В частности, для модели рис. 2 выбраны значения $K=3$, $P=1$. Из (10) мы можем получить теоретическое значение ФР модели как функции структуры и параметров, например, при моделировании процессов метаморфизма снежинок [3].

Следующий рисунок демонстрирует этапы конструирования проницаемого трехмерного фрактала для моделирования задач перколяции, фильтрации и т.д. [6,8].

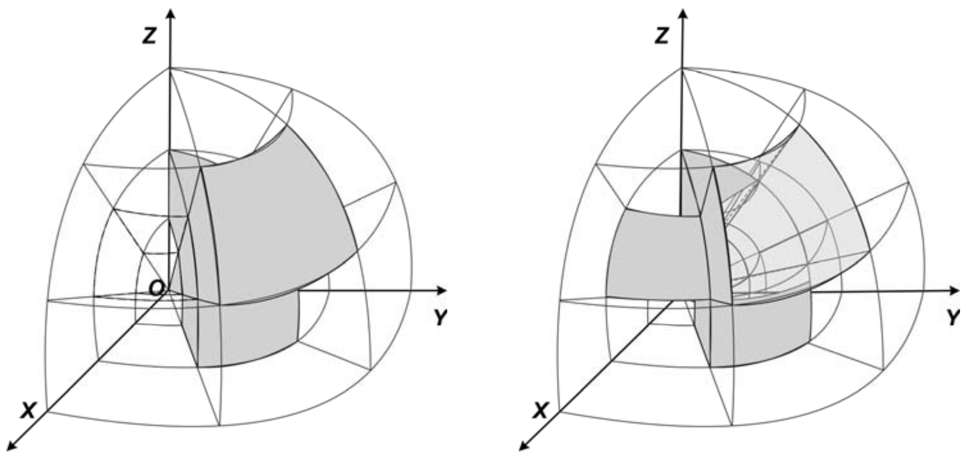

Рис. 4. Конструирование модели проницаемого трехмерного предфрактала 1-го поколения

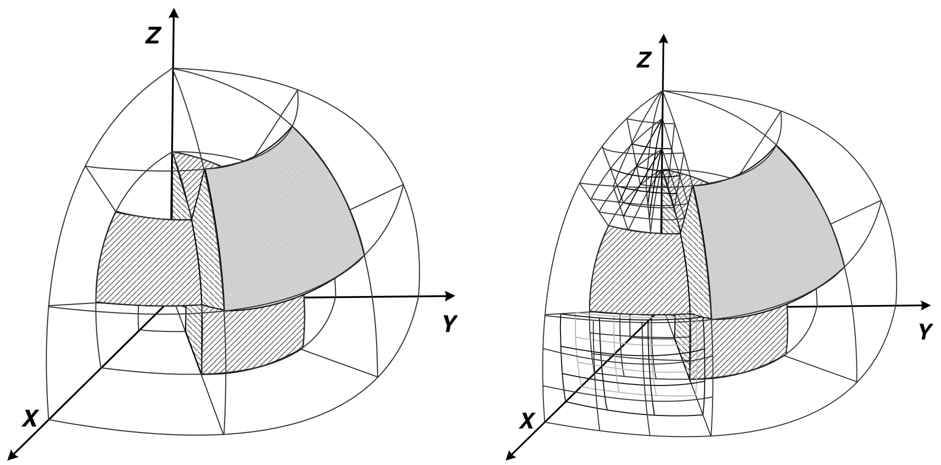

Рис. 5. Конструирование модели проницаемого трехмерного предфрактала последующих поколений

Предложенная модель может использоваться, в частности, при исследовании процессов переноса в средах с фрактальной организацией [6,8,11]. В частности, для ряда физических спетом, которые содержат в себе каналы, входящие в состав некоторой ветвящейся фрактальной структуры, введено сверхмедленное уравнение одномерной диффузии вдоль гребенки следующего вида [10]:

$$\alpha_2 D_{0t}^{\alpha} u\left(x,t\right) = -\frac{\partial q\left(x,t\right)}{\partial x}, \tag{12}$$

где α и α_2 – положительные величины, зависящие от структуры и хаусдорфовой размерности фрактала.

Заключение. Предложенный в работе алгебраический подход к моделированию дискретных геометрических объектов в пространстве различной размерности является одним из применений общего метода пространственной грануляции с помощью грассмановых элементов [14,15]. С помощью предложенного подхода удается строить новые модели фрактальных структур благодаря тому, что алгебраические модели грассманновых элементов позволяют кодировать как структуру, так и параметры фрактального объекта по отдельности, чего не допускают основные известные подходы к конструированию фрактальных структур [9].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Мандельброт Б.Б.* Фрактальная геометрия природы. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002.
2. *Смирнов Б.М.* Физика фрактальных кластеров. – М.: Наука, 1991.
3. *Бутенков С.А., Жуков А.Л., Сухинов А.И.* Моделирование снежного покрова на кластерных вычислительных системах с использованием методов гранулирования многомерных данных // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 8 (97). – С. 213-223.
4. *Vicsek T.* Fractal Growth Phenomena. – Singapore: World Scientific, 1987.
5. *Жуков А.Л.* Оценка плотности снежного покрова на основе фрактальной модели // Материалы I Всероссийской конференции молодых ученых «Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики», Терскол, 06–09 декабря 2010. – С. 83-86.
6. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003. – 272 с.
7. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
8. *Нахушева В.А.* Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. – М., 2006. – 174 с.
9. *Морозов А.Д.* Введение в теорию фракталов. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 160 с.
10. *Бейбалаев В.Д.* Математические модели неравновесных процессов в средах с фрактальной структурой: Дисс. … канд. физ.-мат. наук. – Таганрог, 2009. – 136 с.
11. *Нахушева В.А.* Об одной модели процессов переноса // Материалы Международного Российско-Узбекского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». – Нальчик: Эльбрус, 2003.– С.142-144.
12. *Маделунг Э.* Математический аппарат физики.– М.: Физматлит, 1960.– 620 с.
13. *Нигматулин Р.Р.* Дробный интеграл и его физическая интерпретация // ТМФ. – 1992. – Т. 90. – № 3. – С. 354-368.
14. *Бутенков С.А.* Алгебраические модели в задачах интеллектуального анализа многомерных данных // Математическая теория систем 2009 (МТС-2009) // Сб. научных трудов Международной научно-технической конференции. – М., 2009. – С. 93-101.
15. *Бутенков С.А., Жуков А.Л.* Гранулирование геометрических данных в задачах автоматизированного проектирования // Известия вузов: ЮФУ. Технические науки. – 2008. – № 12 (89). – С.138-146.
16. *Бутенков С.А., Жуков А.Л.* Информационная грануляция на основе изоморфизма алгебраических систем // Сб. трудов Международной алгебраической конференции, посвященной 80-летию со дня рождения А.И. Кострикина. – Нальчик, 2009. – С. 206-210.
17. *Butenkov S.* Granular Computing in Image Processing and Understanding. // In Proc. of IASTED International Conf. on AI and Applications “AIA–2004”, Innsbruk, Austria, February 2004. – P. 10-14.
18. *Бутенков С.А.* Развитие парадигмы интеллектуального анализа многомерной информации применительно к теории информационной грануляции // Сб. трудов IV Международного научно-практического семинара “Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте” – Коломна, 2007. – Т. 1. – С. 188-194.
19. *Бейбалаев В.Д.* Задача теплопереноса в средах с фрактальной структурой // Материалы второй Международной научной конференции «Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения». – Махачкала, 2007. – С. 56-60.
20. *Нахушева В.А.* Об одной математической модели переноса тепла в почве // Материалы Международной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». – Нальчик, 2006. – С. 208-209.

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н., профессор С.Ш. Рехвиашвили.

Бутенков Сергей Андреевич
Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.
E-mail: saab@tsure.ru.
347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
Тел.: 88634371668.
Заведующий научной лабораторией; к.т.н.; доцент.

Butenkov Sergej Andreevich
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.
E-mail: saab@tsure.ru.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: +78634371668.
Head of Research Laboratory; Cand. of Eng. Sc.; Associate Professor.

УДК 681.518

С.А. Бутенков, А.Л. Жуков, Н.С. Кривша, Я.А. Джинави

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СРЕД С ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ГРАНУЛЯЦИИ*

В настоящее время активно развиваются многие направления математического моделирования процессов переноса в средах, имеющих фрактальную структуру. К таким относятся различные виды существенно пористых искусственных и естественных сред. Наибольшее внимание уделяется процессам, связанным с такими средами, как почва или некоторые виды атмосферных взвесей и газов. Между тем, в настоящее время явно недостаточно разработаны вопросы моделирования процессов распространения в такой широко известной (и сравнительно мало изученной) среде, как снежный покров (СП), составленной из различных типов естественных фрактальных образований (снежинок). Измерения и эксперименты с СП в силу ряда физических причин (изменчивости в зависимости от большого числа физических факторов) приводят к значительным техническим трудностям. При исследовании и прогнозировании свойств СП ведущую роль должно играть математическое моделирование как элементов СП, так и процессов в нем. В работе предлагается численный подход к моделированию сред, имеющих фрактальную структуру, основанный на использовании результатов в двух областях: с помощью геометрического моделирования на основе теории грануляции прогнозируется и оценивается фрактальная размерность СП, а с помощью теории переноса во фрактальных средах предлагается моделирование изменения характеристик СП.

Теория грануляции, пространственные гранулы; фракталы; фрактальные среды; процессы переноса; дробные операторы; краевые задачи.

S.A. Butenkov, A.L. Zhukov, N.S. Krivsha, Y.A. Ginawi

MATHEMATICAL MODDELLING FOR FRACTAL MEDIUM ON BASIS OF INFORMATION GRANULATION THEORY

There are a many different approaches to the fundamental problem of transfer processes inside the fractal structure medium, the same as porous soil and another (artificial) porous mediums like the aero silica gel etc. Meanwhile, the very usual and well known fractal medium, is not sufficiently explored and theoretically described, there are under our feet. It’s the snow cower (SC),

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-01-90700-моб_ст).