

Раздел V. Математическое моделирование технологических и экономических процессов

УДК 519.4

В.А. Жорник, П.А. Савочка

ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ СПЛОШНОГО ЦИЛИНДРА С ВНЕШНЕЙ КОЛЬЦЕВОЙ ТРЕЩИНОЙ

Проводится исследование развития поверхностных кольцевых трещин в нагретом цилиндре, изготовленном из хрупкого материала (неорганическое стекло), при его охлаждении в воде. Показано, что трещина может развиваться под действием температурных напряжений, возникающих за счет охлаждения средой, омывающей цилиндрическую поверхность и за счет охлаждения с берегов трещины средой, попавшей в нее. Проведен расчет этих температурных напряжений; показано, что вторыми напряжениями можно пренебречь по сравнению с первыми.

Цилиндр; неорганическое стекло; кольцевая трещина; охлаждение; вода; температурные напряжения.

V.A. Zhornik, P.A. Savochka

THERMOELASTIC PROBLEM FOR A SOLID CYLINDER WITH AN OUTER RING-SHAPED CRACK

Surface ring-shaped crack development in a heated up cylinder made of fragile material (inorganic glass) under cooling in water is examined. It is shown that the crack may develop under temperature stresses arising because of cooling medium from the cylinder surface and because of crack banks cooling by the medium getting into the crack. Computing of these temperature stresses is fulfilled; it is shown that the second stresses might be neglected comparing with the first ones.

Cylinder; inorganic glass; ring-shaped crack; cooling; water; temperature stresses.

Введение. В процессе изготовления и эксплуатации детали машин и элементы конструкций, изготовленные из хрупких материалов, подвергаются резким тепловым воздействиям. Возникающие при этом температурные градиенты вызывают температурные напряжения, которые, усиливаясь вблизи трещиноподобных дефектов, могут привести к разрушению изделия. Это явление связано с появлением вблизи кончика трещины растягивающих термоупругих напряжений, характеризуемых коэффициентом интенсивности напряжений (КИН) K_I [1]. При достижении КИН критического значения K_{IC} (трещиностойкости) – постоянной материала – трещина начинает расти.

1. Аналитическое решение задачи. В работе авторов [2] рассматривалось поведение внешней соосной кольцевой трещины, расположенной в середине сплошного относительно длинного цилиндра длины l радиуса r_c , изготовленного из хрупкого материала (неорганическое стекло). Цилиндр, нагретый до постоянной начальной температуры T_{02} , охлаждался с цилиндрической поверхности путем теплообмена (коэффициент теплообмена α_0) со средой (вода), имеющей температуру $T_{01} < T_{02}$. В работе была получена зависимость КИН $K_{I,2}$ от времени. График зависимости безразмерного КИН $K_{I,2}^*$ от безразмерного времени Fo для различных относительных размеров трещины α приведен на рис. 1.

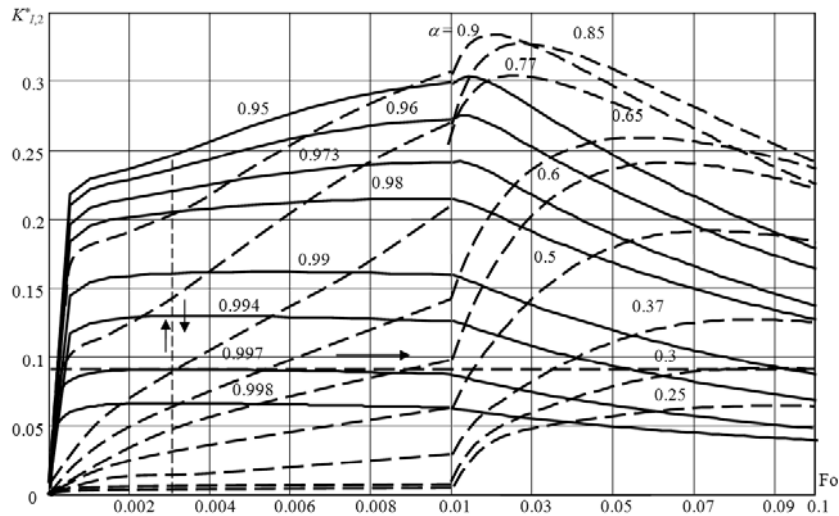


Рис. 1. Зависимость $K_{1,2}^*$ от времени Fo для различных размеров кольцевой трещины α

$$K_{1,2}^* = \frac{2K_{1,2}(1-\nu_2)}{\sqrt{\pi}\sqrt{r_c}\alpha_{T_2}E_2(T_{02}-T_{01})}, \quad (1)$$

где $Fo = \frac{a_2 t}{r_c^2}$; $\alpha = \frac{r_d}{r_c}$; α_{T_2} – коэффициент термического расширения материала

цилиндра; E_2 – его модуль упругости; ν_2 – коэффициент Пуассона; $a_2 = \frac{\lambda_2}{\rho_2 c_2}$

– температуропроводность материала цилиндра; λ_2 – его теплопроводность; ρ_2 – плотность; c_2 – удельная теплоемкость; r_d – радиус фронта кольцевой трещины.

При построении графиков на рис. 1 безразмерный коэффициент теплообмена цилиндрической поверхности со средой был принят $Bi = \alpha_0 r_c / \lambda_2 = 90$ (коэффициент теплообмена $\alpha_0 = 26 \cdot 10^3$ Вт/м²К – постоянная установки по охлаждению цилиндров). Физико-механические постоянные хрупкого материала цилиндра (неорганическое стекло), использованные при построении графиков, приведенных на рис. 1, следующие: $\alpha_{T_2} = 87 \cdot 10^{-7}$ 1/К, $E_2 = 6 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_2 = 0,23$, $\lambda_2 = 0,5852$ Вт/м·К, $\rho_2 = 3,03 \cdot 10^3$ кг/м³, $c_2 = 8,33 \cdot 10^2$ Дж/кг·К, $K_{IC} = 0,535$ МПа·м^{1/2}. Радиус цилиндра $r_c = 2 \cdot 10^{-3}$ м, длина $\ell = 4 \cdot 10^{-2}$ м, начальный размер кольцевых трещин в цилиндре $0,973 < \alpha < 0,997$.

Рассмотрим рост самой мелкой трещины размера как $\alpha = 0,997$. Согласно рис. 1 для этой трещины $K_{1,2}^*$ достигает максимального значения, равного 0,09 в момент времени $Fo \sim 0,003$. При заданной трещиностойкости $K_{IC}^* = (K_{1,2}^*)_{\max}$ – постоянной материала (горизонтальная штриховая линия на рисунке), физико-механических и геометрических постоянных цилиндра, приведенных выше, и определенной по (1) разности температур $T_{02} - T_{01}$

$$T_{02} - T_{01} = \frac{2K_{IC}(1-\nu_2)}{\sqrt{\pi}\sqrt{r_c}\alpha_{T_2}E_2 \cdot 0,09} \quad (2)$$

трещина размером $\alpha = 0,997$ в этот момент времени начинает распространяться, причем скачкообразно, до размера $\alpha = 0,77$ (см. вертикальные стрелки на рис. 1). Это связано с тем, что все трещины размером $0,997 < \alpha < 0,77$ в данный момент времени имеют значения $K_{I,2}^*$ большие, чем $0,09$. Далее трещина от размера $\alpha = 0,77$ растет весьма медленно (по мере развития градиентов температур по радиусу вглубь цилиндра и достижения $K_{I,2}^*$ величины, равной $0,09$) до значения $\alpha = 0,3$ (см. на рис. 1 горизонтальную стрелку), останавливаясь при этом значении размера трещины в момент времени $F_0 \sim 0,093$ (цилиндр лопнул). Средняя скорость движения кончика трещины на медленной стадии роста $v = 0,61 \cdot 10^{-3}$ м/с.

Нужно отметить, что определенная по (2) разность температур $T_{02} - T_{01}$ является максимальной, при которой трещина еще не распространяется и называется термостойкостью стеклянного цилиндра при заданных внешних условиях испытания. При более высоком перепаде температур (с учетом приведенных выше физико-механических постоянных) безразмерный КИН K_{IC}^* , согласно (1), окажется ниже $0,09$ и трещины размером $\alpha = 0,997$ и более мелкие, если бы они были (например, $\alpha = 0,998$), начали бы распространяться.

В вышеприведенном анализе процесса распространения трещины в цилиндре предполагалось, что этот процесс связан с температурными напряжениями, вызванными охлаждением цилиндра средой, омывающей цилиндрическую поверхность, а охлаждающая среда, попавшая в трещину, только снижает (\sim на 25 %) прочность цилиндра, а значит, и K_{IC} как поверхностно-активная среда. При этом предполагалось, что температурные градиенты и напряжения, обусловленные охлаждением средой с берегов трещины, пренебрежимо малы по сравнению с напряжениями, вызванными охлаждением с цилиндрической поверхности.

В настоящей работе приводится расчет КИН $K_{I,1}$ в цилиндре с кольцевой трещиной, который вызывается охлаждением цилиндра с берегов трещины, а также приводится сравнение $K_{I,1}$ с величиной $K_{I,2}$, рассмотренной выше.

Для расчета $K_{I,1}$ необходимо, прежде всего, рассчитать температурное поле.

Поскольку сплошной цилиндр относительно длинный ($\ell = 4 \cdot 10^{-2}$ м), а раскрытие кольцевой трещины в ее устье ($2d \sim 10^{-6}$ м) относительно мало, то область вблизи трещины, с учетом симметрии задачи относительно срединной плоскости, моделируется полупространством (цилиндр) с начальной температурой T_{02} , на поверхности которого имеется слой толщины d из другого материала (охлаждающая среда) с начальной температурой T_{01} , равной температуре окружающей среды. Нужно отметить, что это наиболее жесткий режим охлаждения цилиндра с берегов трещины, так как при попадании окружающей среды в трещину она все-таки успевает прогреться и, возможно, превращается в водяной пар.

Математическая постановка задачи теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial T_1(x,t)}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 T_1(x,t)}{\partial x^2}, \quad t > 0, 0 < x < d, \quad (3)$$

$$\frac{\partial T_2(x,t)}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 T_2(x,t)}{\partial x^2}, \quad t > 0, d < x < \infty, \quad (4)$$

$$T_1(x,t) = T_{01}, \quad t = 0, 0 < x < d, \quad (5)$$

$$T_2(x,t) = T_{02}, \quad t = 0, d < x < \infty, \quad (6)$$

$$T_1(x,t) = T_2(x,t), \quad t > 0, x = d, \quad (7)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial x}, \quad t > 0, x = d, \quad (8)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(x, t)}{\partial x} = \alpha_1 T_1(x, t), t > 0, x = 0, \quad (9)$$

$$T_2(x, t) < \infty, t > 0, x \rightarrow \infty, \quad (10)$$

где $a_{1,2} = \frac{\lambda_{1,2}}{\rho_{1,2} c_{1,2}}$ – температуропроводность материалов слоя и полупространства соответственно; $\lambda_{1,2}$ – теплопроводность материалов; $\rho_{1,2}$ – их плотность; $c_{1,2}$ – удельная теплоемкость; α_1 – коэффициент теплообмена.

Задача (3)–(10) решалась методом интегрального преобразования Лапласа по времени, и в случае тепловой изоляции поверхности при $x = 0$ ее решение на контакте ($x = d$) имеет вид

$$\theta(d, Fo) = \frac{T_2(d, Fo) - T_{02}}{T_{01} - T_{02}} = \frac{1+h}{1+\sqrt{\lambda_2 \rho_2 c_2 / \lambda_1 \rho_1 c_1}} \sum_{n=1}^{\infty} (-h)^{n-1} \operatorname{erf} \left(2n \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \frac{d}{r_c} \frac{1}{\sqrt{Fo}} \right), \quad (11)$$

где $h = \frac{1 - \sqrt{\lambda_1 \rho_1 c_1 / \lambda_2 \rho_2 c_2}}{1 + \sqrt{\lambda_1 \rho_1 c_1 / \lambda_2 \rho_2 c_2}}$; $Fo = \frac{a_2 t}{r_c^2}$ – критерий Фурье; $\operatorname{erf}(x)$ – функция ошибки Гаусса.

Как видно из выражения (11), температура на контакте (на берегах трещины) является функцией времени.

Для расчета температурных напряжений вблизи кончика трещины, вызванных температурным полем (11), воспользуемся решением задачи одного из авторов [3]. В этой работе рассчитывался КИН K_I для пространства с полубесконечной движущейся трещиной с начальной температурой T_{02} , а берега трещины в начальный момент времени мгновенно принимали постоянную температуру T_{01} .

В этом случае решение для КИН имеет вид

$$K_I^*(Fo) = \frac{2K_I(1-\nu_2)}{\sqrt{\pi} \sqrt{r_c} \alpha_{T_2} E_2 (T_{02} - T_{01})} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (2\gamma^*)^{k-1} \frac{\Gamma(k - \frac{1}{2})}{\Gamma(k+1)} \left(k - \frac{1}{2}\right) \times$$

$$\times \left\{ Fo^{\frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})} \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}k + \frac{3}{4}\right)} \frac{1}{\left(\frac{k-1}{2}\right)^2} {}_2F_2\left(-\frac{k}{2} + \frac{1}{4}, \frac{k}{2} - \frac{1}{4}; \frac{1}{2}, \frac{k}{2} + \frac{3}{4}; -(\gamma^*)^2 Fo\right) - \right.$$

$$\left. - Fo^{\frac{1}{2}(k+\frac{1}{2})} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}k + \frac{1}{4}\right)} \frac{\gamma^*}{\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{4}\right)^2} {}_2F_2\left(-\frac{k}{2} + \frac{3}{4}, \frac{k}{2} + \frac{1}{4}; \frac{3}{2}, \frac{k}{2} + \frac{5}{4}; -(\gamma^*)^2 Fo\right) \right\}, \quad (12)$$

где α_{T_2} – коэффициент термического расширения материала пространства (цилиндра), E_2 – модуль упругости; ν_2 – коэффициент Пуассона; $\gamma^* = \gamma r_c$, $\gamma = v/2a_2$, v – скорость движения кончика трещины; $\Gamma(x)$ – гамма-функция; ${}_2F_2(\dots)$ – обобщенная гипергеометрическая функция.

Для того чтобы применить решение (11) к расчету КИН с переменной во времени температурой на берегах трещины $\theta(d, Fo)$, воспользуемся теоремой Дюамеля [4]

$$K_{I,1}^*(Fo) = \int_0^{Fo} K_I^*(Fo - \tau) \frac{d\theta(d, \tau)}{d\tau} d\tau. \quad (13)$$

Полученное значение $K_{I,1}^*(Fo)$ возникает в кончике трещины за счет охлаждения средой, находящейся в движущейся со скоростью v трещине, на берегах которой задается температура $T_2(d, t)$.

2. Численный анализ задачи

Для получения численных значений $K_{I,1}^*(Fo)$ по (13) необходимо задать физико-механические и геометрические постоянные неорганического стекла и охлаждающей среды (воды).

Для стекла: $\lambda_2 = 0,5852$ Вт/м·К, $\rho_2 = 3,03 \cdot 10^3$ кг/м³, $c_2 = 8,33 \cdot 10^2$ Дж/кг·К.

Для воды: $\lambda_1 = 0,5852$ Вт/м·К, $\rho_1 = 10^3$ кг/м³, $c_1 = 42 \cdot 10^2$ Дж/кг·К.

На рис. 2 приведен график зависимости температуры на поверхности полупространства $\theta(d, Fo)$ от времени Fo , рассчитанный по (11).

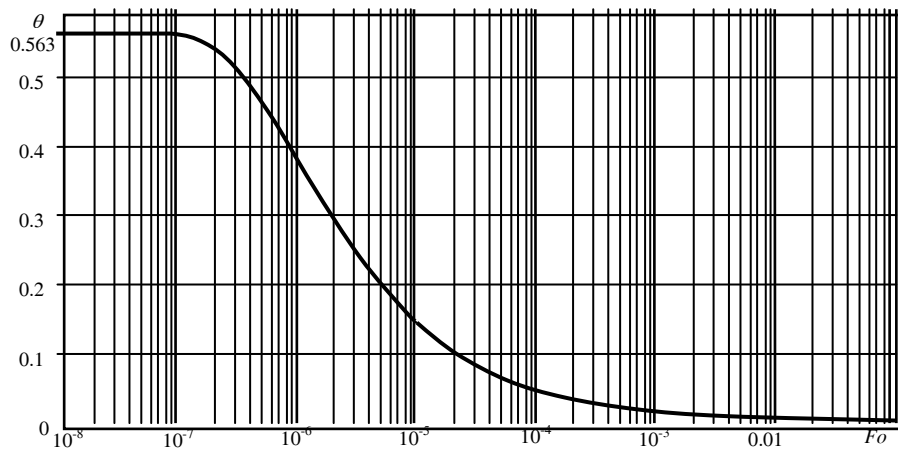


Рис. 2. Зависимость температуры на поверхности полупространства $\theta(d, Fo)$ от времени Fo

Как видно из рис. 2, температура на поверхности полупространства при $Fo < 0$ равна начальной температуре T_{02} ($\theta(d, Fo) = 0$). При $Fo = 0$ температура на поверхности полупространства мгновенно принимает значение между T_{01} и T_{02} , т.е. $T_2(d, 0) = T_{02} - 0,563(T_{02} - T_{01})$, ($T_{02} > T_{01}$), и далее она с течением времени стремится к начальной температуре полупространства T_{02} . Это объясняется тем, что количество теплоты в конечном слое толщины d значительно меньше, чем в полупространстве.

Для численного расчета $K_{I,1}^*(Fo)$ представим кривую, изображенную на рис. 2, в виде ступенчатой функции:

$$\theta(d, Fo) = \sum_{i=0}^n \theta_i H(Fo - Fo_i), Fo_0 = 0, \tag{14}$$

где $H(Fo)$ – функция Хевисайда ($H(Fo) = 0$ при $Fo < 0$, $H(Fo) = 1$ при $Fo \geq 0$).

Подставляя (14) в (13), имеем

$$K_{I,1}^*(Fo) = \int_0^{Fo} K_I^*(Fo - \tau) \sum_{i=0}^n \theta_i \delta(\tau - Fo_i) d\tau, \tag{15}$$

где $\delta(\tau)$ – функция Дирака.

Окончательное выражение для $K_{I,1}^*(Fo)$

$$K_{I,1}^*(Fo) = \sum_{i=0}^n \theta_i K_I^*(Fo - Fo_i). \tag{16}$$

Для расчета $K_{I,1}^*(Fo)$ по (16) необходимо значение $K_I^*(Fo)$. На рис. 3 приведены рассчитанные по (12) графики зависимости K_I^* от времени Fo для различных скоростей движения кончика трещины.

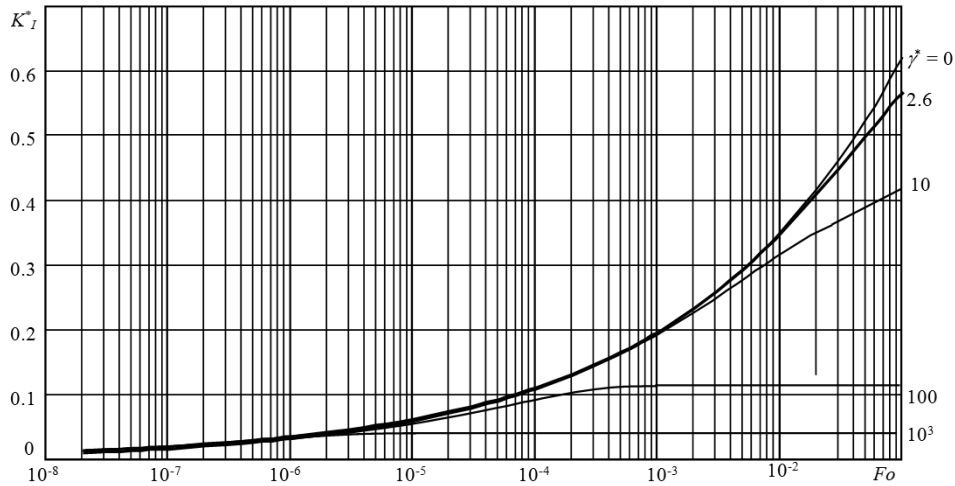


Рис. 3. Зависимость K_I^* от времени Fo для различных скоростей движения кончика трещины

По (16) рассчитывался $K_{I,1}^*(Fo)$ с использованием значений θ_i , определенных из (14), и значений $K_I^*(Fo)$, взятых из графика на рис. 3 для $\gamma^* = 2,6$. Числовое значение $\gamma^* = \gamma_c^* = \frac{v}{2a_2} r_c$ получено с использованием значения скорости движения кончика трещины $v = 0,61 \cdot 10^{-3}$ м/с, $a_2 = 2,319 \cdot 10^{-7}$ м²/с и $r_c = 2 \cdot 10^{-3}$ м.

Результат расчета $K_{I,1}^*(Fo)$ изображен на рис. 4.

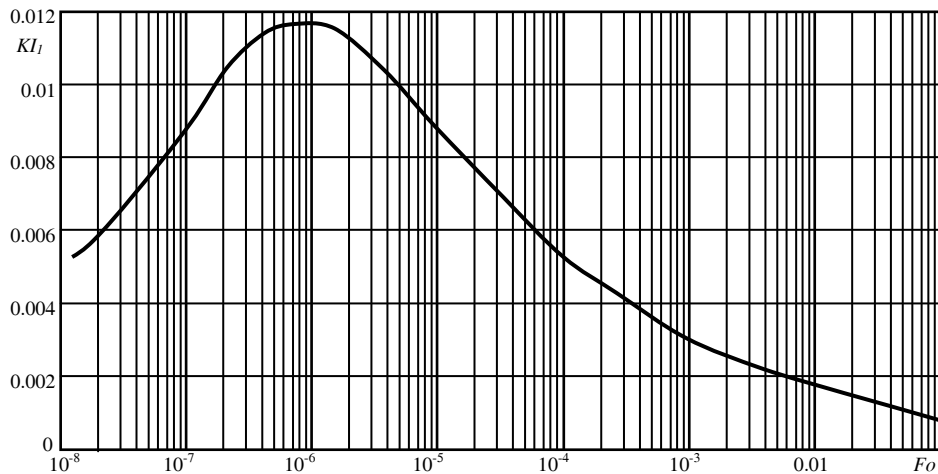


Рис. 4. Зависимость $K_{I,1}^*$ от времени Fo для скорости трещины $\gamma^* = 2,6$

Согласно рис. 4, максимальное значение $K_{I,1}^*(Fo) = 0,0116$, а согласно рис. 1 максимальное значение $K_{I,2}^*(Fo) = 0,09$. Таким образом, максимальное значение $K_{I,1}^*$, даже несмотря на такие, указанные выше, жесткие условия охлаждения с берегов трещины, меньше на порядок $K_{I,2}^*$, и поэтому величиной $K_{I,1}^*$ в данном случае можно пренебречь по сравнению с $K_{I,2}^*$.

Заключение. Проведенный расчет коэффициента интенсивности напряжений $K_{I,1}^*$, связанный с температурными напряжениями, возникающими за счет охлаждения средой, проникающей в кольцевую трещину снаружи, оказался значительно меньше коэффициента интенсивности напряжений $K_{I,2}^*$, связанного с температурными напряжениями, возникающими за счет охлаждения средой, омывающей цилиндрическую поверхность. Поэтому в данных условиях коэффициентом интенсивности напряжений $K_{I,1}^*$ можно пренебречь по сравнению с $K_{I,2}^*$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Irwin G.R. Fracture. Handbuch der Physik – Berlin: Springer. – 1958. – P. 551-590.
2. Жорник В.А., Савочка П.А. Хрупкое разрушение цилиндрических тел при нестационарном тепловом воздействии // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 4 (93). – С. 205-212.
3. Zhornik A.I., Zhornik V.A., Kartashov E.M. Dynamic thermoelasticity problem for a plate with a moving semi-infinite cut // Advanced Computational Methods in Heat Transfer IV: Book Fourth International Conference on Advanced Computational Methods in Heat Transfer "Heat Transfer 96". – Southampton UK, Boston USA. – 1996. – P. 549-556.
4. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Я.Е. Ромм.

Жорник Виктория Александровна

ГОУ ВПО "Таганрогский государственный педагогический институт".

E-mail: Zhornik_Victoria@mail.ru.

г. Таганрог, ул. Инициативная, 48.

Тел.: 88634601807.

К.ф.-м.н.; доцент.

Савочка Петр Анатольевич

Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Южный федеральный университет" в г. Таганроге.

E-mail: Savochka07@mail.ru.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 88634360460.

Ассистент.

Zhornik Viktoriya Aleksandrovna

Taganrog State Pedagogical Institute.

E-mail: Zhornik_Victoria@mail.ru.

48, Initsiativnaya Street, Taganrog, Russia.

Phone: +78634601807.

Cand. of Phis.-Math. Sc.; Associate Professor.

Savochka Petr Anatolievich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: Savochka07@mail.ru.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: +78634371603.

Assistant.

УДК 53.004

А.И. Жорник, Ю.А. Прокопенко, А.Е. Чистяков

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ИНДУКЦИОННОГО НАГРЕВА ПОЛОГО ЦИЛИНДРА

Рассматривается численное решение задачи теплопроводности, описывающее процесс нанесения порошковых покрытий на внутренние поверхности стальных труб методом центробежного индукционного припекания. Граничное условие на внутренней поверхности полого цилиндра (трубы) учитывает поглощение тепла порошковым слоем. На внешней - (помимо поверхностных источников, связанных с индукционным нагревом) конвекцию и излучение, то есть является нелинейным. Проводится сравнение рассчитанного распределения температуры по толщине цилиндра с аналогичным кусочно-линеаризованным решением.

Покрывание; температурное поле; коэффициент теплопроводности.

A.I. Zhornik, Yu.A. Prokopenko, A.E. Chistyakov

NUMERICAL SOLUTION OF THE INDUCTION HEATING PROBLEM FOR THE HOLLOW CYLINDER

Numerical solution of the thermal conductivity problem for the steel tubes' internal surfaces powder covering process by the method of centrifugal sticking is considered in the work. Boundary condition on the inner surface of the hollow cylinder (tube) implies heat absorption by the powder layer. On the external one (besides surface sources connected with induction heating) convection and radiation are included, that is we have nonlinear boundary condition. Comparison of the computed temperature radius distribution with an analogous sectionally linearized solution is fulfilled.

Covering; temperature field; heat conductivity factor.

Введение. Металлические трубы со внутренним порошковым покрытием находят широкое применение в различных отраслях промышленности. Одним из методов нанесения покрытий является метод центробежного индукционного припекания, который заключается в засыпании порошковой шихты во вращающийся цилиндр, которая под действием центробежной силы равномерно распределяется по внутренней поверхности полого металлического цилиндра[5,6]. Металл нагревается индуктором, расположенным вблизи внешней поверхности цилиндра. Мощность объёмных источников распределяется равномерно в поверхностном слое по всей длине и окружности цилиндра. Интенсивность источников убывает с глубиной по экспоненциальному закону. Но расчёты показывают, что затухание мощности с глубиной настолько велико, что можно перейти к плоскому поверхностному источнику нагрева.

Постановка задачи. Рассматривается задача расчета температурного поля внутри полого цилиндрического тела, на внутренней поверхности которого нанесено порошковое покрытие, а внешняя поверхность нагревается равномерно рас-