

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н., профессор А.И. Жорник.

Куповых Геннадий Владимирович

Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: kupovykh@users.tsure.ru.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 88634371649.

Кафедра физики; заведующий кафедрой; д.ф.-м.н.; профессор.

Клово Александр Георгиевич

E-mail: klovo_ag@mail.ru.

Тел.: 88634371606.

Кафедра высшей математики; к.ф.-м.н.; доцент.

Новикова Олеся Вадимовна

E-mail: lisunyk@rambler.ru.

Тел.: +79188588349.

Кафедра физики; аспирант.

Kupovykh Gennady Vladimirovich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: kupovykh@users.tsure.ru.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: +78634371649.

The Department of Physics; Head of Department; Dr. of Phys.-Math. Sc.; Professor.

Klovo Alexander Georgievich

E-mail: klovo_ag@mail.ru.

Phone: +78634371606.

The Department of Higher mathematics; Associate Professor, Cand. of Phys.-Math. Sc.; Associate Professor.

Novikova Olesya Vadimovna

E-mail: lisunyk@rambler.ru.

Phone: +79188588349.

The Department of Physics; Post-graduate Student.

УДК 519.6

А.И. Сухинов, А.Е. Чистяков, Е.А. Проценко

**ДВУМЕРНАЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, УЧИТЫВАЮЩАЯ
ДИНАМИЧЕСКОЕ ПЕРЕСТРОЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ ДНА
МЕЛКОВОДНОГО ВОДОЕМА**

Рассмотрена гидродинамическая пространственно-двумерная модель транспорта наносов в прибрежной зоне водоемов. Описание гидродинамических процессов выполнено на основе системы уравнений Навье–Стокса. Аппроксимация задачи гидродинамики по временной переменной произведена на основе схем расщепления по физическим процессам, а также схем с весами. Для данной математической модели построена дискретная модель, рассмотрена ее программная реализация, приведены результаты численных экспериментов. В статье показана динамика изменения функции возвышения уровня и рельефа дна.

Перемещения наносов; гидродинамики; дискретная модель; численный эксперимент.

A.I. Sukhinov, A.E. Chistyakov, E.A. Protsenko

THE TWO-DIMENSIONAL HYDRODYNAMICS MODEL FOR GEOMETRY DYNAMIC EVOLUTION OF THE BOTTOM IN SHALLOW BASINS

The hydrodynamic spatially-two-dimensional model of transport of deposits in a coastal zone of reservoirs is considered in article. Description of hydrodynamic processes executed on the basis of the Navier-Stokes equations. Approximation of the problem of hydrodynamics in the time variable is made on the basis of splitting schemes on physical processes, as well as schemes with weights. For the given mathematical model the discrete model is constructed, its program realization is considered, results of numerical experiments are presented. Dynamics of function of elevation and topography of the bottom level changing is presented in the article.

Movings of deposits; hydrodynamics; discrete model; numerical experiment.

Постановка задачи. Для построения двумерной математической модели движения водной среды нам понадобится трехмерная гидростатическая модель [1]. Исходными уравнениями гидродинамики (теории мелкой воды) являются:

- ♦ система уравнений Навье–Стокса:

$$\begin{aligned} u'_t + uu'_x + vv'_y + ww'_z &= -\frac{1}{\rho} P'_x + (\mu u'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (\eta w'_z)'_z \\ v'_t + uv'_x + vv'_y + ww'_z &= -\frac{1}{\rho} P'_y + (\mu v'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (\eta v'_z)'_z, \end{aligned} \quad (1)$$

- ♦ уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости:

$$u'_x + v'_y + w'_z = 0, \quad (2)$$

- ♦ уравнение гидростатики:

$$P = \rho g (z + \xi). \quad (3)$$

Система уравнений (1) – (2) рассматривается при граничных условиях:

- ♦ на дне условие непроницаемости и трения:

$$\rho_v \eta u'_n = \tau_{x,b}(t), \quad \rho_v \eta v'_n = \tau_{y,b}(t), \quad V_n = 0,$$

- ♦ на поверхности задается подъем уровня и ветровые напряжения:

$$\rho \eta u'_n = -\tau_{x,p}(t), \quad \rho \eta v'_n = -\tau_{y,p}(t), \quad w = -\xi'_t,$$

- ♦ на боковых границах условие свободного выхода:

$$u'_n = 0, \quad v'_n = 0, \quad \xi'_n = 0,$$

где ξ – функция подъема уровня.

Построение двумерной модели гидродинамики. Проинтегрируем уравнение (2) по глубине, в результате имеем:

$$\begin{aligned} \int_{-\xi}^H (u'_x + v'_y + w'_z) dz &= \int_{-\xi}^H u'_x dz + \int_{-\xi}^H v'_y dz + \int_{-\xi}^H w'_z dz = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{-\xi}^H u dz \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{-\xi}^H v dz \right) + w(H) - w(-\xi) = \xi'_t + ((H + \xi)u)'_x + ((H + \xi)v)'_y. \end{aligned}$$

В итоге уравнение неразрывности в гидростатическом случае запишем в виде

$$\xi'_t + ((H + \xi)u)'_x + ((H + \xi)v)'_y = 0. \quad (4)$$

Система уравнений Навье–Стокса (1) с учетом гидростатического приближения (3) в случае несжимаемой жидкости (2) может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} u'_t + (uu)'_x + (vu)'_y + (wu)'_z &= -g\xi'_x + (\mu u'_x)'_x + (\mu u'_y)'_y + (\eta u'_z)'_z, \\ v'_t + (uv)'_x + (vv)'_y + (wv)'_z &= -g\xi'_y + (\mu v'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (\eta v'_z)'_z. \end{aligned}$$

Проинтегрируем по глубине первое уравнение системы, в результате получим

$$\begin{aligned} \int_{-\xi}^H u'_t dz + \int_{-\xi}^H (uu)'_x dz + \int_{-\xi}^H (vu)'_y dz + \int_{-\xi}^H (wu)'_z dz &= \\ = -g \int_{-\xi}^H \xi'_x dz + \int_{-\xi}^H (\mu u'_x)'_x dz + \int_{-\xi}^H (\mu u'_y)'_y dz + \int_{-\xi}^H (\eta u'_z)'_z dz. \end{aligned} \quad (5)$$

Найдем каждый интеграл уравнения (5).

Интегралы, стоящие в левой части уравнения (5), запишутся как:

$$\begin{aligned} \int_{-\xi}^H u'_t dz &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{-\xi}^H u dz \right) = \frac{\partial}{\partial t} ((H + \xi)u), \\ \int_{-\xi}^H (uu)'_x dz &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{-\xi}^H u u dz \right) = \frac{\partial}{\partial x} ((H + \xi)uu) = (H + \xi)uu'_x + u((H + \xi)u)'_x, \\ \int_{-\xi}^H (vu)'_y dz &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{-\xi}^H v u dz \right) = \frac{\partial}{\partial y} ((H + \xi)vu) = (H + \xi)vu'_y + u((H + \xi)v)'_y, \\ \int_{-\xi}^H (wu)'_z dz &= w(H)u - w(-\xi)u = u\xi'_t. \end{aligned}$$

Запишем левую часть уравнения (5) с учетом уравнения неразрывности (3), имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\xi}^H u'_t dz + \int_{-\xi}^H (uu)'_x dz + \int_{-\xi}^H (vu)'_y dz + \int_{-\xi}^H (wu)'_z dz &= \\ = ((H + \xi)u)'_t + (H + \xi)uu'_x + (H + \xi)vu'_y. \end{aligned}$$

Интегралы, стоящие в правой части уравнения (5), запишутся как

$$\begin{aligned} \int_{-\xi}^H \xi'_x dz &= (H + \xi)\xi'_x, \\ \int_{-\xi}^H (\mu u'_x)'_x dz &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{-\xi}^H \mu u'_x dz \right) = ((H + \xi)\mu u'_x)'_x, \\ \int_{-\xi}^H (\mu u'_y)'_y dz &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{-\xi}^H \mu u'_y dz \right) = ((H + \xi)\mu u'_y)'_y, \end{aligned}$$

$$\int_{-\xi}^H (\eta u'_z)' dz = \eta u'_z(H) - \eta u'_z(-\xi) = \frac{\tau_{x,p}}{\rho} - \frac{\tau_{x,b}}{\rho_v}.$$

Таким образом, система уравнений (4) может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned} & ((H + \xi)u)'_t + (H + \xi)uu'_x + (H + \xi)vu'_y = \\ & = -g(H + \xi)\xi'_x + ((H + \xi)\mu u'_x)'_x + ((H + \xi)\mu u'_y)'_y + \frac{\tau_{x,p}}{\rho} - \frac{\tau_{x,b}}{\rho_v}, \\ & ((H + \xi)v)'_t + (H + \xi)uv'_x + (H + \xi)vv'_y = \quad (6) \\ & = -g(H + \xi)\xi'_y + ((H + \xi)\mu v'_x)'_x + ((H + \xi)\mu v'_y)'_y + \frac{\tau_{y,p}}{\rho} - \frac{\tau_{y,b}}{\rho_v}. \end{aligned}$$

Схемы расщепления по физическим процессам. Далее будем использовать двумерную модель движения водной среды, представленную уравнениями (6), (4). Аппроксимируем уравнение (6) по временной переменной:

$$\begin{aligned} & (H + \xi) \frac{u^{n+1} - u^n}{h_t} + (H + \xi)uu'_x + (H + \xi)vu'_y = \\ & = -g(H + \xi)\xi'_x + ((H + \xi)\mu u'_x)'_x + ((H + \xi)\mu u'_y)'_y + \frac{\tau_{x,p}}{\rho} - \frac{\tau_{x,b}}{\rho_v}, \\ & (H + \xi) \frac{v^{n+1} - v^n}{h_t} + (H + \xi)uv'_x + (H + \xi)vv'_y = \quad (7) \\ & = -g(H + \xi)\xi'_y + ((H + \xi)\mu v'_x)'_x + ((H + \xi)\mu v'_y)'_y + \frac{\tau_{y,p}}{\rho} - \frac{\tau_{y,b}}{\rho_v}. \end{aligned}$$

Воспользуемся схемами расщепления по физическим процессам [3–5] для системы (7). При этом решение исходной задачи находится в начале на некотором промежуточном временном слое:

$$\begin{aligned} & (H + \xi) \frac{u^{n+\sigma} - u^n}{h_t} + (H + \xi)uu'_x + (H + \xi)vu'_y = \\ & = ((H + \xi)\mu u'_x)'_x + ((H + \xi)\mu u'_y)'_y + \frac{\tau_{x,p}}{\rho} - \frac{\tau_{x,b}}{\rho_v}, \\ & (H + \xi) \frac{v^{n+\sigma} - v^n}{h_t} + (H + \xi)uv'_x + (H + \xi)vv'_y = \quad (8) \\ & = ((H + \xi)\mu v'_x)'_x + ((H + \xi)\mu v'_y)'_y + \frac{\tau_{y,p}}{\rho} - \frac{\tau_{y,b}}{\rho_v}, \end{aligned}$$

а затем на следующем:

$$\begin{aligned} (H + \xi) \frac{u^{n+1} - u^{n+\sigma}}{h_t} &= -g(H + \xi) \xi'_x, \\ (H + \xi) \frac{v^{n+1} - v^{n+\sigma}}{h_t} &= -g(H + \xi) \xi'_y. \end{aligned} \quad (9)$$

Для решения задачи (9) необходимо вычислить функцию возвышения уровня, для этого продифференцируем первое уравнение данной системы по переменной x , второе по y и сложим их, в результате чего получим:

$$\begin{aligned} \frac{\left((H + \xi) u^{n+1} \right)'_x - \left((H + \xi) u^{n+\sigma} \right)'_x}{h_t} + \frac{\left((H + \xi) v^{n+1} \right)'_y - \left((H + \xi) v^{n+\sigma} \right)'_y}{h_t} &= \\ = -g \left((H + \xi) \xi'_x \right)'_x - g \left((H + \xi) \xi'_y \right)'_y. \end{aligned}$$

С учетом выполнения уравнения неразрывности поля скорости (3) данное уравнение может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \xi'_t - h_t \left((H + \xi) \xi'_x \right)'_x - h_t \left((H + \xi) \xi'_y \right)'_y &= \\ = -g \left((H + \xi) u^{n+\sigma} \right)'_x - g \left((H + \xi) v^{n+\sigma} \right)'_y. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнения системы (8)–(10) решаются в следующем порядке: вначале находим поле скорости на промежуточном временном шаге (8), за тем находим функцию возвышения уровня (10) и потом уточняется поле скорости (9).

Дискретная математическая модель гидродинамики. Для построения конечно-разностных схем использован метод баланса[2]. Аппроксимация первого уравнения системы (8) запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \left(H_{i,j} + \xi_{i,j}^n \right) \frac{u_{i,j}^{n+\sigma} - u_{i,j}^n}{h_t} + \left(H_{i+1/2,j} + \xi_{i+1/2,j}^n \right) u_{i+1/2,j}^n \frac{u_{i+1,j}^{n+\sigma/2} - u_{i,j}^{n+\sigma/2}}{2h_x} + \\ + \left(H_{i-1/2,j} + \xi_{i-1/2,j}^n \right) u_{i-1/2,j}^n \frac{u_{i,j}^{n+\sigma/2} - u_{i-1,j}^{n+\sigma/2}}{2h_x} + \\ + \left(H_{i,j+1/2} + \xi_{i,j+1/2}^n \right) u_{i,j+1/2}^n \frac{u_{i,j+1}^{n+\sigma/2} - u_{i,j}^{n+\sigma/2}}{2h_y} + \\ + \left(H_{i,j-1/2} + \xi_{i,j-1/2}^n \right) u_{i,j-1/2}^n \frac{u_{i,j}^{n+\sigma/2} - u_{i,j-1}^{n+\sigma/2}}{2h_y} = \\ = \left(H_{i+1/2,j} + \xi_{i+1/2,j}^n \right) \mu_{i+1/2,j} \frac{u_{i+1,j}^{n+\sigma/2} - u_{i,j}^{n+\sigma/2}}{h_x^2} - \\ - \left(H_{i-1/2,j} + \xi_{i-1/2,j}^n \right) \mu_{i-1/2,j} \frac{u_{i,j}^{n+\sigma/2} - u_{i-1,j}^{n+\sigma/2}}{h_x^2} + \end{aligned}$$

$$+ \left(H_{i,j+1/2} + \xi_{i,j+1/2}^n \right) \mu_{i,j+1/2} \frac{u_{i,j+1}^{n+\sigma/2} - u_{i,j}^{n+\sigma/2}}{h_y^2} - \\ - \left(H_{i,j-1/2} + \xi_{i,j-1/2}^n \right) \mu_{i,j-1/2} \frac{u_{i,j}^{n+\sigma/2} - u_{i,j-1}^{n+\sigma/2}}{h_y^2} + \frac{\tau_{x,p}}{\rho} - \frac{\tau_{x,b}}{\rho_v}.$$

Аппроксимация уравнения (10) запишется в виде

$$\frac{\xi_{i,j}^{n+1} - \xi_{i,j}^n}{h_t} - h_t \left(\left(H_{i+1/2,j} + \xi_{i+1/2,j}^n \right) \frac{\xi_{i+1,j}^{n+1} - \xi_{i,j}^{n+1}}{h_x^2} - \left(H_{i-1/2,j} + \xi_{i-1/2,j}^n \right) \frac{\xi_{i,j}^{n+1} - \xi_{i-1,j}^{n+1}}{h_x^2} \right) - \\ - h_t \left(\left(H_{i,j+1/2} + \xi_{i,j+1/2}^n \right) \frac{\xi_{i,j+1}^{n+1} - \xi_{i,j}^{n+1}}{h_x^2} - \left(H_{i,j-1/2} + \xi_{i,j-1/2}^n \right) \frac{\xi_{i,j}^{n+1} - \xi_{i,j-1}^{n+1}}{h_x^2} \right) = \\ = -g \frac{\left(H_{i+1/2,j} + \xi_{i+1/2,j}^n \right) u_{i+1/2,j}^{n+\sigma} - \left(H_{i-1/2,j} + \xi_{i-1/2,j}^n \right) u_{i-1/2,j}^{n+\sigma}}{h_x} - \\ - g \frac{\left(H_{i,j+1/2} + \xi_{i,j+1/2}^n \right) v_{i,j+1/2}^{n+\sigma} - \left(H_{i,j-1/2} + \xi_{i,j-1/2}^n \right) v_{i,j-1/2}^{n+\sigma}}{h_y}.$$

Аппроксимация первого уравнения системы (9) запишется следующим образом:

$$\left(H_{i,j} + \xi_{i,j}^n \right) \frac{u_{i,j}^{n+\sigma} - u_{i,j}^{n+1}}{h_t} = -g \left(H_{i+1/2,j} + \xi_{i+1/2,j}^n \right) \frac{\xi_{i+1,j}^{n+1} - \xi_{i,j}^{n+1}}{2h_x} - \\ - g \left(H_{i-1/2,j} + \xi_{i-1/2,j}^n \right) \frac{\xi_{i,j}^{n+1} - \xi_{i-1,j}^{n+1}}{2h_x}.$$

Таким образом строится дискретная модель гидродинамики.

Математическая модель транспорта наносов. Уравнения процесса перемещения наносов [6] записываются в следующем виде:

$$(1 - \varepsilon) \frac{\partial H}{\partial t} + \operatorname{div}(k \vec{\tau}_b) = \operatorname{div} \left(k \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H \right), \quad (11)$$

$$k = \frac{A \varpi d}{((\rho_1 - \rho_0) g d)^\beta} \left| \vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H \right|^{\beta-1} h \left(\left| \vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H \right| - \tau_{bc} \right),$$

где H – глубина дна, отсчитываемая от невозмущенной поверхности водоема; ε – пористость грунта; x, y – горизонтальные декартовы координаты; τ_b – касательное напряжение на дне; τ_{bc} – критическое значение касательного напряжения, при котором начинается перемещение наносов, A и β – безразмерные постоянные (напомним, что в настоящей работе $A=19.5$, $\beta=3$), ϖ – частота волны, d – характеристика осадков.

Уравнение (11) дополняется начальным условием:

$$H(x, y, 0) = H_0(x, y). \quad (12)$$

Граничные условия определяются из физических соображений. В верхней границе наката, где скорость обращается в ноль, берег не подвергается деформациям:

$$H(x, y, t) = H_H. \quad (13)$$

На границе «глубокой воды» отсутствует поток, вызванный влиянием гравитационных сил:

$$H'_0(x, y, t) = 0. \quad (14)$$

Таким образом, имеем непрерывную двумерную математическую модель формирования наносов в прибрежной зоне водоема (11)–(14).

Результаты численных экспериментов. На рис. 1–3 приведены результаты численных экспериментов моделирования динамики изменения рельефа дна (показана геометрия дна и функция возвышения уровня).

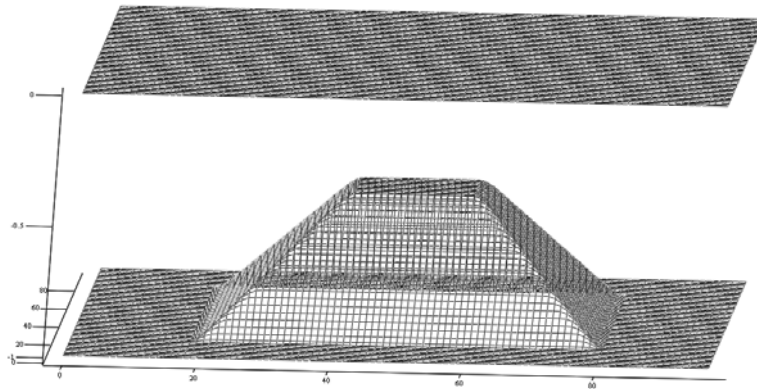


Рис. 1. Начальный рельеф дна

Под действием силы тяжести геометрия дна начинает принимать коническую структуру. Скорость течения жидкости максимальна в пиковой части области (на минимальных глубинах). Функция возвышения уровня принимает положительные значения в левой части расчетной области (с наветренной стороны) и отрицательные в правой. В левой части области образуются наносы, вследствие чего пиковые значения глубины смещаются влево.

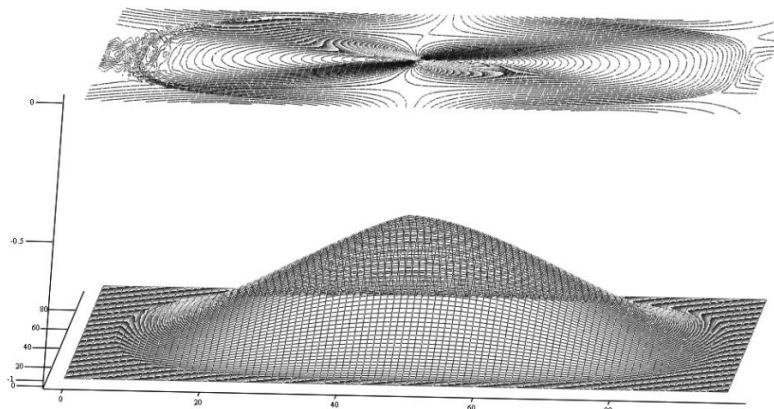


Рис. 2. Рельеф дна через 30 мин после начала моделирования

Через 30 мин с начала моделирования функция возвышения уровня в левой своей части приобретает более явно выраженную колебательную структуру, пиковые значения глубины продолжают смещаться в сторону, обратную направлению ветра.

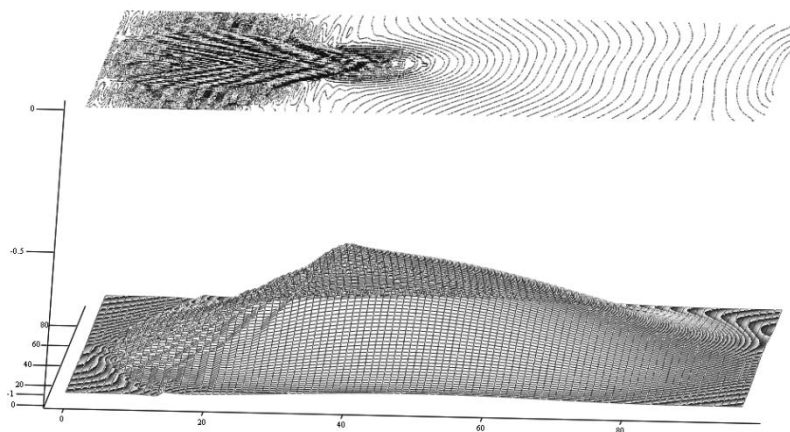


Рис. 3. Рельеф дна через 70 мин после начала моделирования

Из рис. 3 видно, что через 70 минут после начала моделирования рельеф дна, а также функция возвышения уровня приобретает ярко выраженную колебательную структуру с наветренной стороны, а также происходит расширение области в стороны, перпендикулярные движению ветра. Из рисунка также видно вымывание грунта в левой части области. Расстояние между грядами составляет 2–8 расчетных узлов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980.
2. Самарский, А.А. Численные методы математической физики. – 2-е изд. – М.: Научный мир, 2003. – 316 с.
3. Алексеенко Е.В., Сидоренко Б.В., Колгунова О.В., Чистяков А.Е. Сравнительный анализ классических и неклассических моделей гидродинамики водоемов с турбулентным обменом // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 8 (97). – С. 6-18.
4. Чистяков А.Е. Об аппроксимации граничных условий трехмерной модели движения водной среды // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6 (107). – С. 66-77.
5. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Алексеенко Е.В. Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе // Математическое моделирование. – 2011. – Т. 23, № 3. – С. 3-21.
6. Проценко Е.А. Модель и алгоритмы решения задачи о транспорте наносов. Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 8 (97). – С. 71-75.

Статью рекомендовал к опубликованию к.т.н., доцент Н.Е. Ляхова.

Сухинов Александр Иванович

Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: sukhinov@gmail.ru.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 88634310599.

Руководитель ТТИ ЮФУ; д.ф.м.н.; профессор.

Чистяков Александр Евгеньевич

E-mail: cheese_05@mail.ru.

Тел.: 88634371606.

Кафедра высшей математики; ассистент.

Проценко Елена Анатольевна

E-mail: rab55555@rambler.ru.

Тел.: 88634371606.

Старший преподаватель.

Sukhinov Alexander Ivanovich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: sukhinov@gmail.ru.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: +78634310599.

The Head of TIT SFedU; Dr. of Phis.-Math. Sc.; Professor.

Chistyakov Alexander Evgenjevich

E-mail: cheese_05@mail.ru.

Phone: +78634371606.

The Department of Higher Mathematics; Assistant.

Protsenko Elena Anatol'evna

E-mail: rab55555@rambler.ru.

Phone: +78634371606.

Senior Lecturer.