

Статью рекомендовал к опубликованию к.ф.-м.н., доцент О.А. Савицкий.

Фоменко Наталья Алексеевна

Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.
E-mail: fomenko.n86@mail.ru.
347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
Тел.: +79034855580.
Аспирант.

Fomenko Natalya Alexeevna

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.
E-mail: fomenko.n86@mail.ru.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: +79034855580.
Postgraduate Student

УДК 551.466

И.Б. Аббасов, А.В. Неверов

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕФРАКЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ
ПОВЕРХНОСТНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН НА ОСНОВЕ
УРАВНЕНИЯ МЕЛКОЙ ВОДЫ**

Рассматриваются вопросы численного моделирования рефракции нелинейных поверхностных гравитационных волн на мелководье. Дискретная модель построена на основе нелинейных уравнений мелкой воды. Приведены граничные и начальные условия. Методом расщепления по физическим процессам получена система из трех уравнений. Определен порядок аппроксимации, исследованы условия устойчивости дискретной модели. Для расчета системы уравнений использован метод прогонки. Линии дна смоделированы на основе графиков степенных функций. Представлена трансформация профиля поверхностных гравитационных волн при подходе к берегу.

Численное моделирование уравнения мелкой воды; нелинейные поверхностные гравитационные волны; рефракция; трансформация профиля.

I.B. Abbasov, A.A. Neverov

**NUMERICAL SIMULATION REFRACTION OF NONLINEAR SURFACE
GRAVITY WAVES ON THE BASIS OF SHALLOW WATER EQUATION**

This work considers the problems of numerical simulation of refraction of nonlinear surface gravity waves under shallow bay conditions. The discrete model is based on shallow-water nonlinear equations. Are resulted boundary and initial conditions. The method of splitting into physical processes receives system from three equations. Then we define the approximation order and investigate stability conditions of the discrete model. The sweep method was used to calculate the system of equations. Bottom lines are simulated on the basis of schedules of sedate functions. Transformation of profile surface gravity waves is presented at the approach to coast.

Numerical simulation of shallow-water equation; nonlinear surface gravity waves; refraction; profile transformation.

Нелинейные поверхностные гравитационные волны в условиях мелководья описываются уравнениями мелкой воды. Актуальным остается вопрос исследования волновых явлений на поверхности мелководных акваторий для учета их влия-

ния на береговые образования и гидротехнические сооружения. Поэтому моделирование нелинейных поверхностных гравитационных волн может играть немаловажную роль при мониторинге экологического состояния мелководных заливов.

Рассмотрим результаты некоторых исследований, проведенных за последние десятилетия по численному моделированию волновых процессов в рамках теории мелкой воды на основе нелинейных и нелинейно-дисперсионных уравнений мелкой воды.

Вопросы трансформации монохроматических волн над горизонтальным дном в прибрежной зоне достаточно подробно изучены в работах [1] и [2]. В лабораторных экспериментах и путем численного моделирования было исследовано влияние первых четырех гармоник на профиль поверхностной волны при её распространении по мелководью. Система эволюционных уравнений решалась численно с помощью метода Рунге-Кутты. Модель была верифицирована и проверена по данным лабораторных и натуральных экспериментов.

Работа [3] посвящена численному моделированию и экспериментальным наблюдениям влияния эффектов нелинейного взаимодействия, отражения и затухания на распространение поверхностных гравитационных волн в береговой зоне. Нелинейные взаимодействия приводят к удвоению числа гребней волны. Однако для волн меньшей амплитуды гребень не раздваивается. Описанные эффекты рассматриваются в рамках модели Бусинеска.

Статья [4] посвящена численному моделированию нелинейных длинных волн в бассейнах с пологим дном. Рассматривается нелинейно-дисперсионная модель мелкой воды с учетом топографии и вязкости жидкости. Проводится сравнение расчетов по трансформации плоского возмущения свободной поверхности воды с опытными данными. Численно решается задача о влиянии коническо-цилиндрического острова, подводного хребта на распространение волны. Учитывается также влияние трения о наклонное дно на эволюцию плоской уединенной волны.

Работа [5] посвящена исследованию двумерной численной модели воздействия затопленного волнореза на распространение волны. Рассмотрены вопросы моделирования волны, как до обрушения, так и после обрушения. Для проверки модели представлены результаты лабораторных экспериментов. В работе проведен анализ трансформации профиля волны. Также описана зависимость крутизны волны от её спектрального состава.

В работе [6] для модельных конфигураций профиля дна рассчитана эволюция двумерного спектра гравитационных волн в рамках трехволнового квазикинетического приближения. Оценено относительное влияние рефракции и нелинейности на изменение формы двумерного спектра гравитационных волн в процессе эволюции.

В работе [7] предлагается стохастическая модель распространения поверхностной волны на мелководье с учетом топографии дна. Проведено сравнение предлагаемой модели с известными аналитическими выражениями для глубоководного и мелководного режима. Приведены лабораторные наблюдения по распространению нелинейных волн. Детерминированная модель является более подходящей для больших расстояний распространения и более глубокой воды, а стохастическая модель особенно рассчитана для прибрежной зоны, включая зону прибоя.

Анализируя описанные работы, можно отметить, что в большинстве случаев используются итерационные методы решения дискретных уравнений. В нашем случае мы будем использовать точные методы решения дискретных уравнений мелкой воды с условиями, привязанными к гидрофизическим условиям Азовского моря.

Поверхностные гравитационные волны на мелководье описываются уравнением мелкой воды. Система уравнений мелкой воды содержит уравнение неразрывности и динамическое уравнение на основе закона сохранения импульса [8], [9]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial((H + \zeta)u)}{\partial x} \end{cases}, \quad (1)$$

где u – скорость частиц среды, ζ – функция возвышения поверхности, H – глубина жидкости. Уравнения мелкой воды не учитывают эффект дисперсии из-за её незначительности на мелководье.

В качестве граничных условий на свободной поверхности жидкости выполняется кинематическое граничное условие, т.е. скорость возвышения поверхности совпадает с вертикальной скоростью частиц среды:

$$w \Big|_{z=\zeta(x,y,t)} = \frac{d\zeta(x,y,t)}{dt}. \quad (2)$$

Для динамического условия считаем, что давление на свободной поверхности жидкости равно атмосферному давлению. На дне предполагается условие равенства нулю вертикальной компоненты скорости частиц жидкости:

$$w \Big|_{z=-H} = 0. \quad (3)$$

Начальное условие в нулевой момент времени предполагается как $u(x,0) = 0$, а в остальные моменты времени изменение формы поверхности задается по гармоническому закону $u(0,t) = a \sin(\omega t)$, где a , ω – амплитуда и круговая частота поверхностной волны.

После применения метода расщепления по физическим процессам получается система из трех уравнений (4). С помощью компоненты скорости частиц среды на текущем временном слое находятся компоненты на вспомогательном временном слое. Затем, из второго уравнения находится функция возвышения уровня свободной поверхности. Из третьего уравнения находятся компоненты скорости частиц на следующем временном слое:

$$\begin{cases} \frac{\tilde{u}-u}{\tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial(\tilde{u}\zeta)}{\partial x} = \tau g \frac{\partial}{\partial x} \left((\zeta + H) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) - \frac{\partial(\tilde{u}H)}{\partial x}, \\ \frac{\hat{u}-\tilde{u}}{\tau} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \end{cases}, \quad (4)$$

где u – компонента скорости на текущем временном слое; \tilde{u} – компонента скорости на вспомогательном временном слое; \hat{u} – компонента скорости на следующем временном слое, τ – шаг по времени, μ – параметр сеточной вязкости.

В систему уравнений мелкой воды (4) при расщеплении по физическим процессам был введен дополнительный коэффициент вязкости μ ($0 < \mu < 1$). Уравнения мелкой воды относятся к гиперболическим системам уравнений. Нелинейные гиперболические уравнения по сравнению с линейными уравнениями обладают ря-

дом принципиальных отличий. Особенно эти отличия необходимо учитывать при их численном интегрировании. Даже при сколь угодно гладких начальных условиях решение нелинейных уравнений может содержать разрывы.

Во избежание этой проблемы при практическом решении задач нелинейной механики в дифференциальную систему вводится малое дополнительное возмущение в виде искусственной вязкости (аналогично методу Неймана–Рихтмайера) [10,11]. Эта вязкость устраняет разрывы и приводит к адекватным результатам.

Дискретным аналогом первого уравнения системы (4) будет следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{j+\frac{1}{2}} - u_i^j}{\tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1}^j + u_i^j}{2} \cdot \frac{u_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} - u_i^{j+\frac{1}{2}}}{h_x} + \frac{u_{i-1}^j + u_i^j}{2} \cdot \frac{u_i^{j+\frac{1}{2}} - u_{i-1}^{j+\frac{1}{2}}}{h_x} \right) = \\ = \mu \left(\frac{u_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} - u_i^{j+\frac{1}{2}}}{h_x^2} - \frac{u_i^{j+\frac{1}{2}} - u_{i-1}^{j+\frac{1}{2}}}{h_x^2} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Дискретным аналогом второго уравнения системы (4) будет уравнение

$$\begin{aligned} \frac{(\zeta_i^{j+1} - \zeta_i^j)}{\tau} + \left(\frac{\tilde{u}_{i+1} \zeta_{i+1}^{j+1} - \tilde{u}_{i-1} \zeta_{i-1}^{j+1}}{2h_x} \right) = \\ = \vartheta \left(\left(\frac{\zeta_{i+1}^j + H_{i+1} + \zeta_i^j + H_i}{2} \right) \cdot \frac{\zeta_{i+1}^{j+1} + \zeta_i^{j+1}}{h_x^2} - \left(\frac{\zeta_i^j + H_i + \zeta_{i-1}^j + H_{i-1}}{2} \right) \cdot \frac{\zeta_i^{j+1} + \zeta_{i-1}^{j+1}}{h_x^2} \right) - \\ - \left(\frac{\tilde{u}_{i+1} H_{i+1} - \tilde{u}_{i-1} H_{i-1}}{2h_x} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Дискретным аналогом третьего уравнения системы (4) будет уравнение

$$\frac{u_i^{j+\frac{1}{2}} - u_i^j}{\tau} = -g \left(\frac{\zeta_{i+1}^j - \zeta_{i-1}^j}{2h_x} \right). \quad (7)$$

Для численного решения дифференциальных уравнений используется разностная схема. Разностная схема строится на основе интегроинтерполяционного метода на равномерной сетке по неявной схеме [12]. Неявная схема выбрана из-за её большего запаса устойчивости.

Далее определяется порядок аппроксимации и исследуются условия устойчивости дискретной модели. Для расчета системы уравнений был использован метод прогонки. Непрерывная задача эквивалентна дискретной задаче с порядком аппроксимации: $O(h_x^2 + \tau)$, где h_x – шаг по пространственной координате. Согласно

условию Куранта, шаги сетки ограничены выражением: $\frac{h_x}{\tau} < \frac{2gH}{|\tilde{u}|}$.

Рассмотрим особенности моделирования процесса рефракции поверхностных гравитационных волн на мелководье. В качестве мелководной акватории мы воспользуемся условиями Таганрогского залива Азовского моря: средняя глубина не

превышает 5 м, условиям мелководности удовлетворяют гравитационные волны с длинами свыше 30 м. В нашем случае поверхностные гравитационные волны являются свободными, т.е. являются волнами зыби, следовательно, влиянием ветра пренебрегаем.

Азовское море и его подводный рельеф сформировались в условиях погружения Азово-Кубанской впадины. Азовское море относится к типу внутренних морей, имеет сравнительно простые очертания, относительно однообразные берега и довольно несложный рельеф дна. Море преимущественно окружают абразионные и аккумулятивные береговые формы. Пологое побережье переходит в ровное и плоское дно. Самые большие глубины находятся в центральной части моря. Наибольшая глубина Азовского моря составляет 14 м [13].

Необходимо отметить, что вопросы рефракции поверхностных гравитационных волн на береговых образованиях были рассмотрены в работах [14,15] на основе приближенной аналитики. Были описаны волновые процессы при подходе нелинейной поверхностной волны к берегу, было проведено трехмерное моделирование береговых образований и процесса рефракции нелинейных поверхностных волн.

В данной работе линия дна $s(x)$ представлена на рис.1 (вертикальный масштаб увеличен), она смоделирована на основе графика степенных функций

$$s(x) = 2,7 \cdot \left(\left(\frac{x}{n} \right) + 9 \cdot \left(\frac{x}{n} \right)^2 \right), \quad (8)$$

где n – размер сетки. Глубина уменьшается с $H=3$ м до нуля, крутизна склона не превышает значения $0,01^0$.

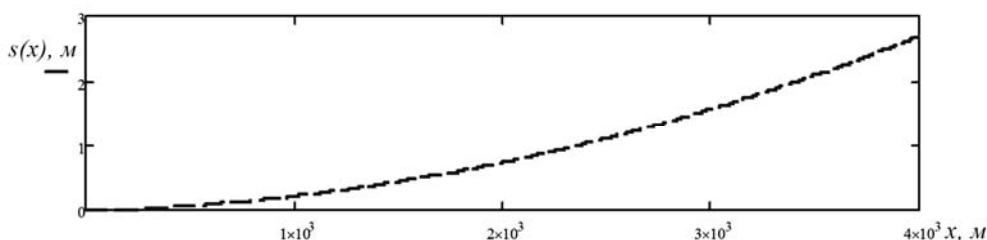


Рис. 1. Профиль линии дна

На рис. 2 представлена зависимость для скорости частиц поверхностной гравитационной волны при подходе к берегу. Исходная поверхностная волна является синусоидальной, с уменьшением глубины уменьшается скорость распространения. Это приводит к уменьшению длины волны при постоянстве частоты и соблюдении закона сохранения энергии. Следовательно, профиль волны сжимается и увеличивается скорость частиц, как на рис. 2. Наряду с уменьшением длины волны у берега мы наблюдаем укручение переднего фронта гребня волны, что приведет в дальнейшем к её обрушению на линии прибою.

Укручение переднего фронта гребня поверхностной волны связано с влиянием нелинейного члена уравнений мелкой воды. При подходе к берегу гребень волны движется быстрее впадины, из-за трения о дно. В момент, когда «гребень нагоняет подошву», передний склон волны становится отвесным, и волна обрушивается.

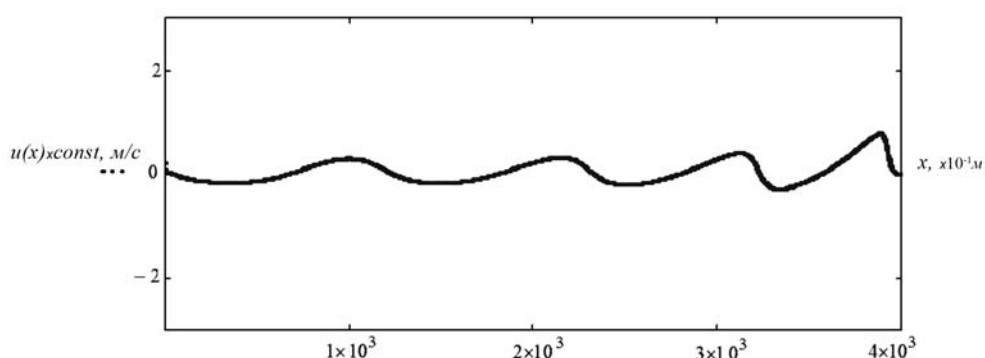


Рис. 2. Трансформация профиля поверхностной гравитационной волны при подходе к берегу, начальные параметры волны: частота $f=0,045\text{Гц}$; длина волны $\lambda=120,5\text{м}$; глубина $H=3\text{м}$; скорость распространения $c=5,4\text{м/с}$; волновой параметр $kH=0,16$; начальная крутизна $2a/\lambda=0,003$; нелинейный параметр $\varepsilon=0,06$

Для проверки достоверности разработанной модели проведено сравнение полученных результатов с экспериментальными и численными профилями поверхностных волн, представленными в работе [5]. На основе сравнения можно отметить, что результаты проведенного численного моделирования нелинейных поверхностных гравитационных волн на основе уравнений мелкой воды имеют хорошее совпадение с экспериментальными измерениями.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Chapalain G., Cointe R., Temperville A.* Observed and modeled resonantly interacting progressive water-waves // *Coastal Engineering Journal*. – 1992. – № 16. – P. 267-300.
2. *Eldeberky Y., Madsen P.A.* Deterministic and stochastic evolution equations for fully dispersive and weakly nonlinear waves // *Coastal Engineering Journal*. – 1999. – № 38. – P.1-24.
3. *Elgar S., Norheim C. A., Herbers T. H.* Nonlinear evolution of surface wave spectra on a beach // *Journal of physical oceanography*. – 1998. – Vol. 28, № 7. – P.1534-1551.
4. *Литвиненко А.А., Хабахнашев Г.А.* Численное моделирование нелинейных достаточно длинных двумерных волн на воде в бассейнах с пологим дном // *Вычислительные технологии*. – 1999. – Т.4, № 3. – С.95-105.
5. *Kawasaki K.* Numerical simulation of breaking and post-breaking wave deformation process around a submerged breakwater // *Coastal Engineering Journal*. – 1999. – Vol. 41, № 3,4. – P. 201-223.
6. *Полников В.Г.* Относительная роль нелинейности и рефракции в эволюции спектра волн на мелкой воде // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. – 2005. – Т. 41, № 1. – С. 114-124.
7. *Janssen T.T., Herbers T.H. C. & Battjes J.A.* Generalized evolution equations for nonlinear surface gravity waves over two-dimensional topography // *Journal Fluid Mechanic*. – 2006. – Vol. 552. – P.393-418.
8. *Лемб Г.* Гидродинамика. – М.: Гостехиздат, 1947. – 524 с.
9. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. – М., Мир, 1976. – 622 с.
10. *Richtmyer R., Morton K.* Difference methods for initial-value problems. New York., Wiley, 2nd edn. – 1967. – 309 p.
11. *Вольцингер Н.Е., Пяковский Р.В.* Теория мелкой воды. Океанологические задачи и численные методы. – Л.: Гидрометеоздат, 1977. – 207 с.
12. *Самарский А.А.* Введение в численные методы: Учеб. пос. для вузов. – 2-е изд. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 288 с.
13. *Гидрометеорология и гидрохимия морей СССР. Т. 5. Азовское море.* – СПб.: Гидрометеоздат, 1991. – С. 75-88.

14. *Аббасов И.Б.* Исследование и моделирование рефракции нелинейных поверхностных гравитационных волн в заливе // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. – 2004. – Т. 40, № 3. – С. 423-426.
15. *Аббасов И.Б.* Моделирование рефракции нелинейных поверхностных гравитационных волн на береговых склонах разной крутизны // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6 (107). – С.149-154.

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н., профессор Г.В. Куповых.

Аббасов Ифтихар Балакишиевич

Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: igkd@egf.tsure.ru.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 88634371794.

Кафедра инженерной графики и компьютерного дизайна; к.ф.-м.н.; доцент.

Неверов Алексей Александрович

Армавирская государственная педагогическая академия.

E-mail: agpu_kaf_inf@mail.ru.

352901, г. Армавир, ул. Р. Люксембург, 159.

Тел.: 8613737307.

Кафедра информатики и информационных технологий обучения; ассистент.

Abbasov Iftikhar Balakishi

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: igkd@egf.tsure.ru.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: +78634371794.

The Department of Engineering Drawing and Computer Design; Cand. of Phys.-Math. Sc.; Associate Professor.

Neverov Alexey Aleksandrovich

Armavir State Pedagogical Academy.

E-mail: agpu_kaf_inf@mail.ru.

159, R. Luxemburg Street, Armavir, 352901, Russia.

Phone: 8613737307.

The Department of Computer Science and Information Technologies of Training; Assistant.

УДК 550.348

А.Г. Клово, Г.В. Куповых, О.В. Новикова

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА ПОДПОЧВЕННОГО РАДОНА В ГРУНТЕ И ЕГО ЭКСХАЛЯЦИИ В ПРИЗЕМНЫЙ СЛОЙ АТМОСФЕРЫ

Построена единая математическая модель процесса массопереноса эманации (^{222}Rn) в рыхлых отложениях и в приземном слое атмосферы с учетом диффузии и конвекции. Для корректной постановки задачи на границе раздела двух сред земли и воздуха задача была поставлена в общей области земля – атмосфера. Была реализована возможность получить прямой безытерационный алгоритм расчета необходимых параметров. Построенная разностная схема позволяет исследовать пространственно-временные распределения радона в различных физических условиях.

Математическое моделирование; радон; промежуточные граничные условия.