

УДК 537.877.01; 621.391.01

Л.А. Рассветалов

ОДНОЧАСТИЧНАЯ МОДЕЛЬ НЕЛИНЕЙНОЙ РЕЗОНАНСНОЙ СРЕДЫ

Исследованы отклики нелинейной резонансной среды, представленной набором осцилляторов с различным типом нелинейности. Получены решения нелинейных уравнений осциллятора в виде конечных рядов Вольтерра во временной и частотной областях, соответствующие анагармонизму. Показано, что отклики имеют характер интегральных преобразований входных сигналов. Обращено внимание на дуальность рассматриваемых сред и классических нелинейных цепей и возможность реализации в таких средах обработки сигналов в реальном масштабе времени.

Осциллятор; резонансная среда; ряд Вольтерра; нелинейность; дуализм; обработка сигналов.

L.A. Rassvetalov

SINGLE-PARTIAL MODEL OF THE NONLINEAR RESONANT MEDIUM

Responses of the nonlinear resonant medium represented by set oscillators with various types of nonlinearity are investigated. Solutions of the nonlinear equations of oscillator in the form of final Volterra series in the time and frequency domains, corresponding to anharmonicity are received. Integral transformation of input signals responses' character is displayed. Both the duality of mediums under consideration as well as classical nonlinear circuits and the opportunity of realization of signals real time processing in those mediums attention is paid to.

Oscillator; resonance medium; Volterra series; nonlinearity; dualism; signal processing.

Введение. Нелинейная резонансная среда (НРС) благодаря частотно-временному дуализму позволяет организовать в частотном пространстве вычислительные интегральных преобразований типа свертки с такой же связностью, как и умножение во временном пространстве.

Нелинейные эффекты при этом будут приводить не к смешению частот, в результате чего возникают колебания с комбинационными частотами, а к смешению времени, т.е. к возникновению сигналов (импульсов) в комбинационные моменты времени [1, 3]. Это яркое проявление частотно-временного дуализма иллюстрирует рис. 1.

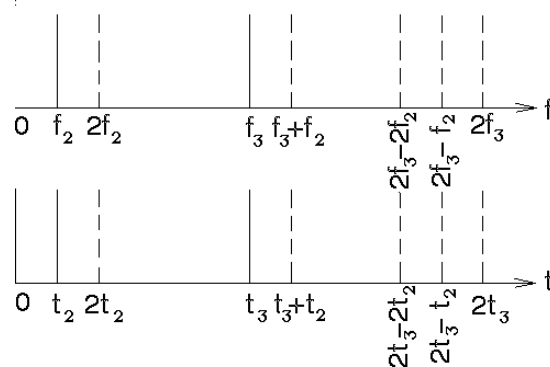


Рис. 1. Отклики нелинейных систем на многосигнальное воздействие: сверху – нелинейной цепи на ряд гармонических воздействий, внизу – нелинейной резонансной среды на воздействие в виде дельта-функций

Так же, как возникающие в нелинейной цепи комбинационные частоты жестко связаны с частотами воздействия, в нелинейном частотном пространстве временные положения откликов жестко связаны с временным положением воздействующих импульсов.

Определим резонансную среду как набор высокочастотных осцилляторов, резонирующих в некоторой полосе частот, что отображает ее локальную неоднородность. Термин «осциллятор» здесь охватывает такие понятия, как отдельные микрочастицы или коллективные возбуждения среды – квазичастицы – при квантово-механическом рассмотрении, молекулы или даже макроскопические частицы, сохраняющие все свойства вещества, при классическом подходе. В такой модели нелинейные свойства среды могут быть обусловлены как взаимодействием внешнего воздействия с отдельным осциллятором, так и взаимодействием между отдельными возбужденными осцилляторами, и сводятся к следующим видам:

- ◆ ангармонизм;
- ◆ нелинейное возбуждение;
- ◆ нелинейное затухание;
- ◆ нелинейное взаимодействие между осцилляторами.

В последнем случае для описания модели требуется решить проблему многих частиц, тогда как для первых трех видов нелинейности достаточно решение одночастичной задачи, а реакция среды на внешнее возмущение найдется как сумма реакций отдельных осцилляторов с учетом их плотности распределения по частотам $g(\omega)$. Уместно заметить, что резонансная среда, представленная набором осцилляторов, является реальным частотным пространством, и её описание удобно проводить в частотном представлении.

Отклик подобной нелинейной резонансной среды – эхо-сигнал – является результатом синфазного сложения колебаний возбужденных осцилляторов, поэтому для его обозначения часто используют термин «фазированное эхо».

В исследованиях эха различного типа применяются конкретные физические и математические модели, отличающиеся как большим разнообразием, так и значительной сложностью. В прикладном плане наиболее разработана теория спинового эха [2] и соответственно спиновых эхо-процессоров (ЭП); но даже и для них анализ ограничивается малосигнальным режимом, т.е. линейной областью амплитудной характеристики ЭП. Статистический анализ известных физических и математических моделей явления эха в различных средах, не ограниченный рамками малосигнального приближения, представляет значительные математические трудности. Объем таких расчетов еще более увеличивается вследствие большого разнообразия конкретных физических механизмов образования эхо-сигналов.

Цель данной публикации состоит в создании единого описания явления эха независимо от конкретного физического механизма его образования, пригодного для анализа работы ЭП в составе различных радиотехнических систем, находящихся под воздействием сигналов и помех произвольной интенсивности. Упомянутые выше механизмы нелинейности имеют особенности, связанные с амплитудным поведением откликов и зависимостью их фаз от фаз возбуждающих сигналов. Форма откликов для всех типов нелинейности определяется одинаковыми зависимостями от формы сигналов возбуждения. Поэтому в данном сообщении рассматривается один вид нелинейности, а именно ангармонизм.

Модель НРС с ангармоническими осцилляторами. Уравнение i -го ангармонического осциллятора представим в виде

$$D_i y_i(t) + F_i [y_i(t)] = x(t), \quad (1)$$

где $x(t)$ – внешнее воздействие (возбуждение), $D_i = \frac{d^2}{dt^2} + 2\sigma_i \frac{d}{dt} + \omega_{0i}^2$ – линейный оператор, σ_i и ω_{0i} имеют обычный смысл характеристики потерь и резонансной частоты линейного приближения, $y_i(t)$ – реакция i -го осциллятора, $F[y(t)] = \sum_{k=2}^p a_k y^k(t)$ – полином степени p , a_k – постоянные, включающие в себя силовые константы и геометрические величины. Далее индекс i опущен вследствие равноправия всех осцилляторов. Для решения (1) перейдем к интегральному соотношению

$$y(t) = \int_{t_0}^T h(\tau) x(t-\tau) d\tau - \int_{t_0}^T h(\tau) F[y(t-\tau)] d\tau, \quad (2)$$

где

$$h(\tau) = \int_0^{\infty} [F\{y\}]^{-1} e^{j\omega\tau} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (3)$$

– импульсная функция линейной части (1), $F\{\cdot\}$ – преобразование Фурье. Подстановка конкретного оператора D в (3) дает

$$h(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_0} e^{-\sigma\tau} \sin \omega_y \tau, & \tau > 0, \\ 0, & \tau \leq 0, \end{cases} \quad (4)$$

где $\omega_y = \sqrt{\omega_0^2 - \sigma^2} \approx \omega_0$.

Решение (2) находим итерационным методом, что приводит к представлению $y(t)$ в виде конечного ряда Вольтерра в случае слабой нелинейности ($a_k \ll 1, k = 2, 3, \dots, p$):

$$y(t) = h_p + \sum_{p=1}^n \int_{E^p} h_p(\tau_1, \dots, \tau_p) \prod_{i=1}^p x(t-\tau_i) d\tau_i, \quad (5)$$

где E^p – p -мерное евклидово пространство, в котором определены ядра Вольтерра $h_p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p)$, представляющие собой импульсные функции нелинейного преобразования p -го порядка. Так, например,

$$h_2(\tau_1, \tau_2) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) h(\tau_1 - \tau) h(\tau_2 - \tau) d\tau, & \tau_1, \tau_2 \geq 0, \\ 0 & \text{для всех остальных значений } \tau. \end{cases}$$

Если отойти от рассмотренной простой модели изотропной среды, в которой отсутствует нелокальная связь в пространстве, то в (4) $y(t)$ и $x(t-\tau_i)$ должны быть векторами, а $h_p(\tau_1, \dots, \tau_p)$ – тензором $p + 1$ ранга, имеющим в качестве констант такие величины, как заряды, массы, геометрические и силовые постоянные, а также величины, характеризующие диссипацию энергии. Здесь не рассматривается этот более общий случай, не приводящий к какому-либо изменению конечных выводов, переход к которому, впрочем, вполне очевиден.

Найдем явный вид ядра Вольтерра третьего порядка:

$$h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \int_{E^1} h(\tau) h(\tau_1 - \tau) h(\tau_2 - \tau) h(\tau_3 - \tau) d\tau.$$

Область интегрирования, соответствующая причинному ядру, показана штриховкой на рис. 2, в соответствии с которым

$$h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \int_0^{\min\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}} h(\tau)h(\tau_1 - \tau)h(\tau_2 - \tau)h(\tau_3 - \tau)d\tau.$$

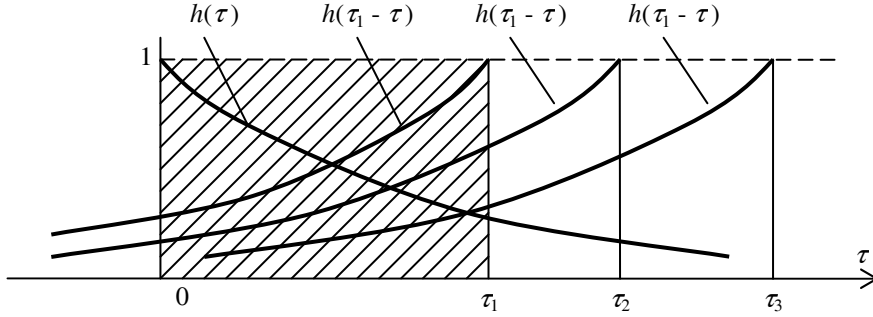


Рис. 2. Область интегрирования, соответствующая причинному ядру

Обозначим $a = \min\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ и с учетом (4) получим

$$h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = -\frac{1}{16\sigma\omega_3^4} e^{-\sigma(\tau_1+\tau_2+\tau_3)} (e^{2\sigma a} - 1) \times \\ \times [\cos \omega_3(\tau_1 - \tau_2 - \tau_3) + \cos \omega_3(\tau_1 + \tau_2 - \tau_3) + \cos \omega_3(\tau_1 - \tau_2 + \tau_3)];$$

здесь отброшены члены, имеющие множитель $1/16\omega_3^5$, в соответствии с условием $\omega_3 \gg \sigma$.

Таким образом:

1) если $\min\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\} = \tau_1$, то

$$h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \frac{1}{16\sigma\omega_3^4} [e^{-\sigma(\tau_1+\tau_2+\tau_3)} - e^{-\sigma(-\tau_1+\tau_2+\tau_3)}] \times \\ \times [\cos \omega_3(\tau_1 - \tau_2 - \tau_3) + \cos \omega_3(\tau_1 + \tau_2 - \tau_3) + \cos \omega_3(\tau_1 - \tau_2 + \tau_3)]; \quad (6)$$

2) если $\min\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\} = \tau_3$, то

$$h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \frac{1}{16\sigma\omega_3^4} [e^{-\sigma(\tau_1+\tau_2+\tau_3)} - e^{-\sigma(\tau_1+\tau_2-\tau_3)}] \times \\ \times [\cos \omega_3(\tau_1 - \tau_2 - \tau_3) + \cos \omega_3(\tau_1 + \tau_2 - \tau_3) + \cos \omega_3(\tau_1 - \tau_2 + \tau_3)];$$

3) если $\min\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\} = \tau_2$, то

$$h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \frac{1}{16\sigma\omega_3^4} [e^{-\sigma(\tau_1+\tau_2+\tau_3)} - e^{-\sigma(\tau_1-\tau_2+\tau_3)}] \times \\ \times [\cos \omega_3(\tau_1 - \tau_2 - \tau_3) + \cos \omega_3(\tau_1 + \tau_2 - \tau_3) + \cos \omega_3(\tau_1 - \tau_2 + \tau_3)].$$

Другая форма записи ядра третьего порядка:

$$h_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) = \int_{\max\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}}^t h(t-\tau)h(t-\tau_1)h(t-\tau_2)h(t-\tau_3)d\tau =$$

$$= \frac{1}{16\sigma\omega_y^4} \left[e^{-\sigma(3t-\tau_1-\tau_2-\tau_3)} - e^{-\sigma(t+\tau_1-\tau_2-\tau_3)} \right] \theta,$$

если $\tau_1 = \max\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$;

$$h_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) = \frac{1}{16\sigma\omega_y^4} \left[e^{-\sigma(3t-\tau_1-\tau_2-\tau_3)} - e^{-\sigma(t-\tau_1+\tau_2-\tau_3)} \right] \theta,$$

если $\tau_2 = \max\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$;

$$h_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) = \frac{1}{16\sigma\omega_y^4} \left[e^{-\sigma(3t-\tau_1-\tau_2-\tau_3)} - e^{-\sigma(t-\tau_1-\tau_2+\tau_3)} \right] \theta, \quad (7)$$

если $\tau_3 = \max\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$.

Здесь $\theta = \cos \omega_y$

$$(t + \tau_1 - \tau_2 - \tau_3) + \cos \omega_y (t - \tau_1 + \tau_2 - \tau_3) + \cos \omega_y (t - \tau_1 - \tau_2 + \tau_3).$$

Найдем отклик осциллятора на воздействие в виде трех δ -функций (рис. 3, при $t_1 = 0$):

$$x(t) = c_1 \delta(t) + c_2 \delta(t-t_2) + c_3 \delta(t-t_3).$$

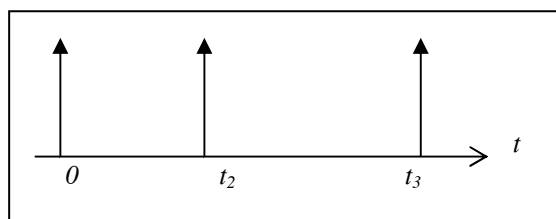


Рис. 3. Трехимпульсное воздействие

В третьем приближении решения

$$y_3(t) = \int_{E^1} h(t, \tau) x(\tau) d\tau - a_3 \int_{E^3} h_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) \prod_{r=1}^3 x(\tau_r) d\tau_r =$$

$$= c_1 h(t) + c_2 h(t-t_2) + c_3 h(t-t_3) -$$

$$- c_1 c_2 c_3 \{ a_3 [h_3(t, t_3, 0, t_2) + h_3(t, t_3, t_2, 0)]_{\tau_1 = \max\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}} +$$

$$+ a_3 [h_3(t, 0, t_3, t_2) + h_3(t, t_3, t_2, 0)]_{\tau_2 = \max\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}} +$$

$$+ a_3 [h_3(t, 0, t_2, t_3) + h_3(t, t_2, 0, t_3)]_{\tau_3 = \max\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}} \} -$$

$$- a_3 c_1 c_2^2 [h_3(t, 0, t_2, t_2)_{\tau_2, \tau_3 = \max\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}} + h_3(t, t_2, 0, t_2)_{\tau_1, \tau_3 = \max\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}} +$$

$$+ h_3(t, t_2, t_2, 0)_{\tau_1, \tau_2 = \max\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}}] + \dots$$

Здесь первые три слагаемых соответствуют реакции линейной цепи с импульсной характеристикой $h(t)$ и не представляют интереса с точки зрения эхо-явлений. Выражение, стоящее в первых фигурных скобках, определяет трехимпульсный отклик $y_3^{(123)}$, возникающий в момент времени $t = t_2 + t_3$ (верхний индекс относится к номерам возбуждающих импульсов):

$$y_3^{(123)} = \frac{6a_3c_1c_2c_3}{16\sigma\omega_3^4} \left[e^{-\sigma(3t-t_2-t_3)} - e^{-\sigma(t-t_2+t_3)} \right] \cos \omega_3 (t-t_2-t_3).$$

В момент времени $t = t_2 + t_3$ все осцилляторы колеблются в одной фазе и наводят сигнал с амплитудой

$$y_3^{(123)}(t_2 + t_3) = \frac{3}{8} a_3c_1c_2c_3 e^{-2\sigma(t_3-t_2)} e^{-2\sigma t_2} (1 - e^{-2\sigma t_2}).$$

Последние слагаемые, стоящие в квадратных скобках, описывают двухимпульсное эхо $y_3^{(12)}$ от первых двух импульсов:

$$y_3^{(12)}(t) = \frac{3a_3c_1c_2^2}{8\sigma\omega_3^4} \left[e^{-\sigma t} - e^{-\sigma(3t-2t_2)} \right] \cos \omega_3 (t-2t_2).$$

Имеются еще два эха двухимпульсного типа от второго и третьего импульсов $y_3^{(23)}(t)$ и от первого и третьего импульсов $y_3^{(13)}(t)$:

$$y_3^{(13)}(t) = \frac{3a_3c_1c_2^2}{8\sigma\omega_3^4} \left[e^{-\sigma t} - e^{-\sigma(3t-2t_3)} \right] \cos \omega_3 (t-2t_3),$$

$$y_3^{(23)}(t) = \frac{3a_3c_2c_3^2}{8\sigma\omega_3^4} \left[e^{-\sigma(t-t_2)} - e^{-\sigma(3t-t_2-2t_3)} \right] \cos \omega_3 (t+t_2-2t_3).$$

Характерной особенностью эхо-сигналов, обусловленных ангармонизмом, является возрастание амплитуды эха при увеличении задержки t_{12} между первым и вторым импульсами возбуждения вплоть до достижения максимума, за которым следует почти экспоненциальный спад (рис. 4) [4].

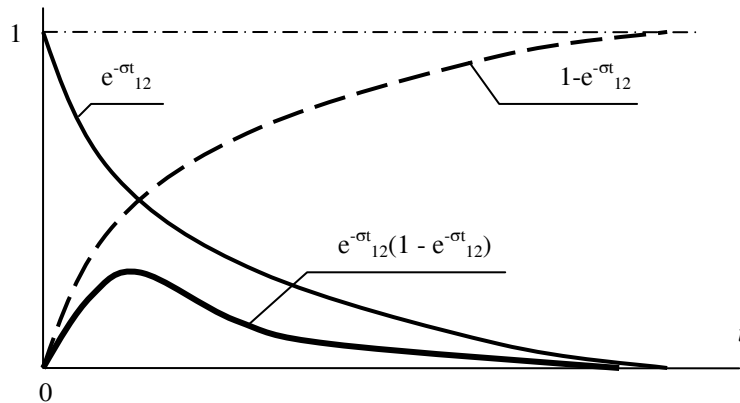


Рис. 4. Амплитудные зависимости откликов

Исследуем в рамках третьего приближения отклик системы ангармонических осцилляторов на воздействие трех финитных сигналов произвольной формы.

В этом расчете будут продемонстрированы особенности, связанные с записью ядра преобразования для различных сочетаний $\min\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ и $\max\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ и сформулированы правила вычисления функционалов Вольтерра.

Решение основного уравнения в третьем порядке приближения содержит функционалы первого и третьего порядков:

$$y_3(t) = \int_E h(t, \tau) x(\tau) d\tau - a_3 \int_E h_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) \prod_{r=1}^3 x(\tau_r) d\tau_r, \quad (8)$$

из которых только последний содержит эхо-отклики.

Поскольку нас будет интересовать отклик всей системы осцилляторов, отметим в аргументе y , что решение (8) принадлежит осциллятору с резонансной частотой ω . Опуская линейный функционал, будем иметь:

$$y_3(t, \omega) = -a_3 \int_E h_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) \prod_{r=1}^3 x(\tau_r) d\tau_r. \quad (9)$$

Полный отклик системы с учетом плотности распределения по частотам:

$$y_3(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) y_3(t, \omega) d\omega.$$

Найдем сначала выражение для трехимпульсного эха, которое обусловлено произведением в (9) всех трех входных сигналов. С этой целью из всей совокупности слагаемых, получающихся после раскрытия скобок в произведении

$$\prod_{r=1}^3 x(\tau_r) = [x_1(\tau_1) + x_2(\tau_1 - \tau) + x_3(\tau_1 - T)] [x_1(\tau_2) + x_2(\tau_2 - \tau) + x_3(\tau_2 - T)] \times [x_1(\tau_3) + x_2(\tau_3 - \tau) + x_3(\tau_3 - T)],$$

запишем интересующие нас члены:

$$\begin{aligned} \prod_{r=1}^3 x(\tau_r) = & \dots + x_1(\tau_1)x_2(\tau_1 - \tau)x_3(\tau_1 - T) + x_1(\tau_1)x_2(\tau_3 - \tau)x_3(\tau_2 - T) + \\ & + x_1(\tau_2)x_2(\tau_1 - \tau) + x_3(\tau_3 - T) + x_1(\tau_2)x_2(\tau_3 - \tau)x_3(\tau_1 - T) + \\ & + x_1(\tau_3)x_2(\tau_1 - \tau)x_3(\tau_2 - T) + x_1(\tau_3)x_2(\tau_2 - \tau)x_3(\tau_1 - T) + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Замечаем, что для первого слагаемого в (10) $\tau_3 = \max\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$, а $\tau_1 = \min\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$. Следовательно, с первым слагаемым нужно использовать ядро (7), в котором из суммы трех косинусов следует взять тот, в аргументе которого $\min\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ имеет знак «плюс», т.е. $\cos\alpha(t + \tau_1 - \tau_2 - \tau_3)$. Таким образом, ядром преобразования для первого слагаемого (10) $x_1(\tau_1)x_2(\tau_2 - \tau)x_3(\tau_3 - \tau)$ является

$$\begin{aligned} h_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) \Big|_{\substack{\tau_3 = \max(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \\ \tau_1 = \min(\tau_1, \tau_2, \tau_3)}} = & \frac{1}{16\sigma\omega^4} \times \\ & \times \left[e^{-\sigma(3t - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3)} - e^{-\sigma(t - \tau_1 - \tau_2 + \tau_3)} \right] \cos(t + \tau_1 - \tau_2 - \tau_3). \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогично следует искать ядра для других слагаемых (10). Например, в четвертом слагаемом $\tau_1 = \max\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$, а $\tau_2 = \min\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ и ядром для него является

$$h_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) \Big|_{\substack{\tau_1 = \max(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \\ \tau_2 = \min(\tau_1, \tau_2, \tau_3)}} = \frac{1}{16\sigma\omega_y^4} \times \quad (12)$$

$$\times \left[e^{-\sigma(3t - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3)} - e^{-\sigma(t + \tau_1 - \tau_2 - \tau_3)} \right] \cos(t - \tau_1 + \tau_2 - \tau_3).$$

Поскольку для рассматриваемой физической модели ядра Вольтерра симметричны, то соответствующей заменой аргументов в слагаемых (10) и в соответствующих им ядрах и сами слагаемые, и их ядра сводятся к одному. Действительно, ядро (12) сводится к ядру (11) последовательной заменой $\tau_1 \leftrightarrow \tau_3$, $\tau_2 \leftrightarrow \tau_1$. Одновременно при такой замене аргументов четвертое слагаемое сводится к первому.

Таким образом, свойство симметричности ядер оказывается весьма полезным, и его следует по возможности применять с целью сокращения довольно громоздких вычислений функционалов Вольтерра.

В выражении (10) все слагаемые приводятся к одному типу, поэтому (9) принимает вид

$$y_3(t, \omega) = -6a_3 \int_{E^3} h_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) \Big|_{\substack{\tau_3 = \max(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \\ \tau_1 = \min(\tau_1, \tau_2, \tau_3)}} \times$$

$$\times x_1(\tau_1) x_2(\tau_2 - \tau) x_3(\tau_3 - T) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3.$$

В данном случае оказывается более простым вычисление отклика всей системы осцилляторов, нежели одного, так как при этом появляется возможность использовать спектральные плотности входных сигналов:

$$y_3(t) = \operatorname{Re} \left\{ -e^{-\sigma t} \int_{-\infty}^{\infty} c g(\omega_y) e^{j\omega t} \int_0^{t_1} e^{(\sigma + j\omega)\tau_1} x_1(\tau_1) d\tau_1 \times \right. \quad (13)$$

$$\left. \int_{\tau}^{\tau'} e^{(\sigma - j\omega)\tau_2} x_2(\tau_2) d\tau_2 e^{-2\sigma t} \left[\int_T^{\tau'} e^{(\sigma - j\omega)\tau_3} x_3(\tau_3) d\tau_3 - \int_T^{\tau} e^{(\sigma + j\omega)\tau_3} x_3(\tau_3) d\tau_3 \right] d\omega_y \right\},$$

$$c = 6a_3 / 16\sigma\omega_y^4.$$

Внутренние интегралы (13) представляют собой спектральные плотности входных сигналов, умноженных на экспоненты $\exp(\pm\sigma\tau_i)$. Вводя обозначения

$$S_{\pm\sigma i}(\omega_y) = \int_z^{z'} x_i(t) e^{\pm\sigma t} e^{-j\omega_y t} dt = S_{\pm\sigma i}(\omega_y) e^{\pm\sigma z} e^{-j\omega_y z},$$

$$S_{\pm\sigma i}(\omega_y) = \int_z^{z'} x_i(t) e^{\pm\sigma t} e^{j\omega_y t} dt = S_{\pm\sigma i}^*(\omega_y) e^{\pm\sigma z} e^{j\omega_y z}$$

где $\tilde{S}_{\pm\sigma i}(\omega_y)$ – спектральная плотность сигнала $x_i(t)e^{\pm\sigma t}$, передний фронт которого совпадает с началом отсчета времени, запишем (13) в виде

$$y_3(t) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{3}{8} \frac{a_3}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\omega) \tilde{S}_{\sigma 1}^*(\omega) \tilde{S}_{\sigma 2}(\omega) \times \right.$$

$$\left. \times \left[\tilde{S}_{-\sigma 3}(\omega) e^{-\sigma T} - \tilde{S}_{\sigma 3}(\omega) e^{-\sigma(2t-T)} \right] e^{-\sigma(t-\tau)} e^{j\omega(t-T-\tau)} d\omega \right\},$$

где $g_1(\omega) = g(\omega)/\omega^4$.

Полагая длительности входных сигналов малыми по сравнению с постоянной времени затухания осцилляторов ($t_i \ll 1/\sigma, i = 1, 2, 3$), можно считать справедливым приближенное равенство $\tilde{S}_{\sigma i} \approx \tilde{S}_{-\sigma i}$. Тогда

$$y_3(t) = \text{Re} \left\{ \frac{3 a_3}{8 \sigma} e^{-\sigma(t-\tau+T)} \left[1 - e^{-2\sigma(t-T)} \right] \times \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\omega) \tilde{S}_{\sigma 1}^*(\omega) \tilde{S}_{\sigma 2}(\omega) \tilde{S}_{\sigma 3}(\omega) e^{j\omega(t-T-\tau)} d\omega \right\}. \quad (14)$$

Из выражения (14) следует, что форма сигнала трехимпульсного эха определяется произведением спектральных плотностей входных сигналов, причем спектр первого сигнала следует брать комплексно-сопряженным; зависимость его амплитуды от временного положения входных сигналов определяет состоящий из экспонент множитель перед знаком интеграла. Эхо-сигнал группируется около момента времени $t = T + \tau$.

Выражение (14) можно записать в другом виде:

$$y_3(t) = \frac{3 a_3}{8 \sigma} e^{-\sigma(t-\tau+T)} \left[1 - e^{-2\sigma(t-T)} \right] g_1(t) * x_{\sigma 1}(t) \otimes x_{\sigma 2}(t-\tau) * x_{\sigma 3}(t-T),$$

где знак * означает свертку, а \otimes – корреляцию.

Вводя вместо ядер Вольтерра их многомерные преобразования Фурье

$$K_n(\omega_1, \dots, \omega_n) = \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) e^{-j(\omega_1 \tau_1 + \dots + \omega_n \tau_n)} d\tau_1, \dots, d\tau_n, \quad (15)$$

можно перейти к частотному представлению для $y(t)$:

$$y(t) = \sum_{p=1}^n \frac{1}{2^p} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} K_p(\omega_1, \dots, \omega_p) \prod_{k=1}^p S(\omega_k) e^{j\omega_k t} d\omega_k, \quad (16)$$

где $S(\omega)$ – спектральная плотность возбуждения $x(t)$, использование которой определяется предполагаемым импульсным характером $x(t)$. В (16) применена используемая в [5] сокращенная форма записи, при которой общее число членов в подынтегральном выражении равно $(C_p^0 + C_p^1 + \dots + C_p^p) = 2^p$, где C_p^k – число сочетаний из p элементов по k , содержащих k знаков «минус» в аргументе коэффициентов передачи. Первое слагаемое в (16) описывает прохождение сигнала $x(t)$ через линейный четырехполосник с коэффициентом передачи $K_1(\omega)$, остальные – нелинейное преобразование сигнала. Свойства коэффициентов передачи (16) приведены в [5].

Если частоты в аргументах коэффициента передачи неодинаковы, т.е. $\omega_1 \neq \omega_2 \neq \dots \neq \omega_p$, то соотношение (16) описывает возникновение новых спектральных компонент с частотами $\pm\omega_1 \pm \dots \pm \omega_k \pm \dots \pm \omega_p$, пропускаемых через фильтры с коэффициентами передачи $K_p(\pm\omega_1 \pm \dots \pm \omega_k \pm \dots \pm \omega_p)$. В предположении высокой добротности осцилляторов $\omega_0 \gg \sigma$ можно считать, что $K_p(\omega_1, \dots, \omega_k, \dots, \omega_p) = 0$ при $\omega_1 \neq \dots \neq \omega_k \neq \dots \neq \omega_p$. Для исключения высших гармоник сигнала число знаков «плюс» и «минус» в аргументе K_p должно отличаться на единицу. Такое ядро интегрального преобразования (16) названо в [5] ядром с суммарно-разностным аргументом. В этом случае

$$y(t) = \sum_{p=1}^n \frac{C_{2p-1}^{p-1}}{2^{2p-1}} \int_{-\infty}^{\infty} K_{2p-1}(\omega) S(\omega) |S(\omega)|^{2p-2} e^{j\omega t} d\omega + \text{к. с.}, \quad (17)$$

где *к.с.* – комплексно-сопряженная часть приведенного выражения. Здесь также применена сокращенная форма записи; полное описание, например, второго члена ряда (17) имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^3} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} K_3(\omega, \omega, -\omega) S(\omega) S(\omega) S^*(\omega) d\omega + \right. \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} K_3(\omega, -\omega, \omega) S(\omega) S^*(\omega) S(\omega) d\omega + \\ & \left. + \int_{-\infty}^{\infty} K_3(-\omega, \omega, \omega) S^*(\omega) S(\omega) S(\omega) d\omega + \text{к.с.} \right\}. \end{aligned}$$

Структурная схема устройства, реализующая преобразование (17) с учетом всех осцилляторов, представлена на рис. 5. Фильтры $\Phi_i(\omega)$, $i = 1, 2, \dots, m$, $m=N$, выделяют спектральные полосы сигнала шириной $\Delta\omega$; выходные колебания этих фильтров подвергаются безынерционному нелинейному преобразованию в нелинейных блоках с мгновенными характеристиками $a_{2k-1}\xi^{2k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$, линейные фильтры $K_{2k-1}^{(i)}(\omega)$ выделяют первые спектральные полосы преобразованных колебаний, в сумматорах производится линейное суммирование всех выходных колебаний.

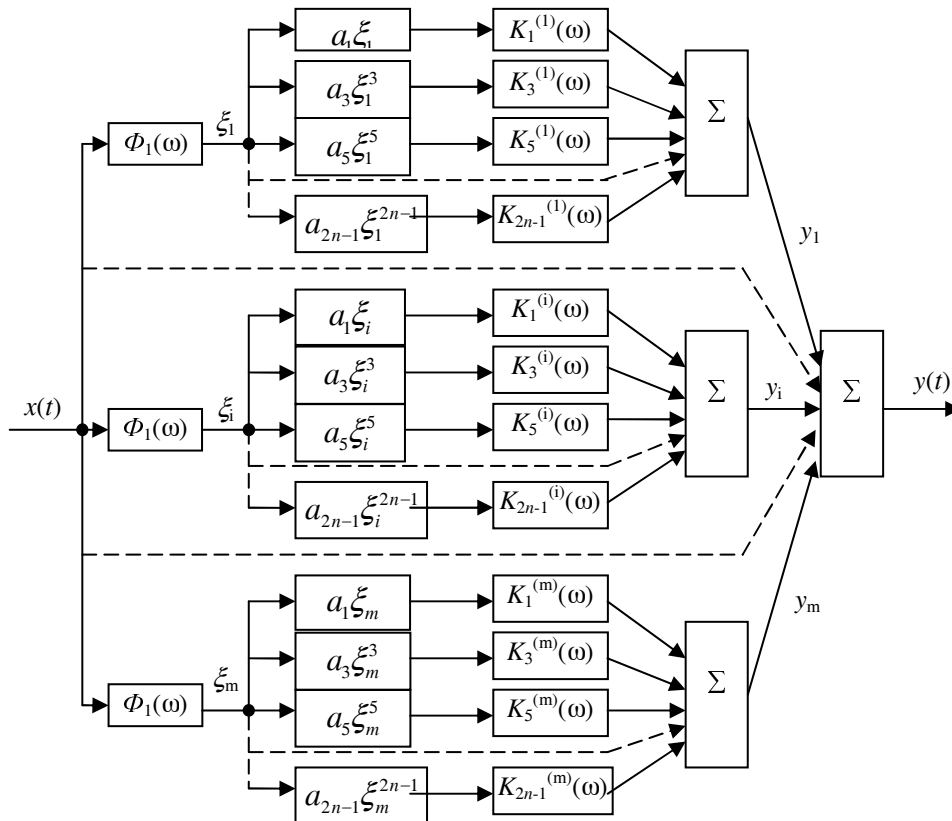


Рис. 5. Структурная схема устройства, реализующего преобразование (17)

Минимальный порядок нелинейности в уравнении (1), при котором существует эффект эха, равен трем. Это кубическая среда, и она может быть представлена радиотехническим эквивалентом, изображенным на рис. 6. Если же не интересоваться тонкими отличиями во временных зависимостях эха высших порядков, общую структурную схему рис. 5 можно существенно упростить, придав ей вид, показанный на рис. 7.

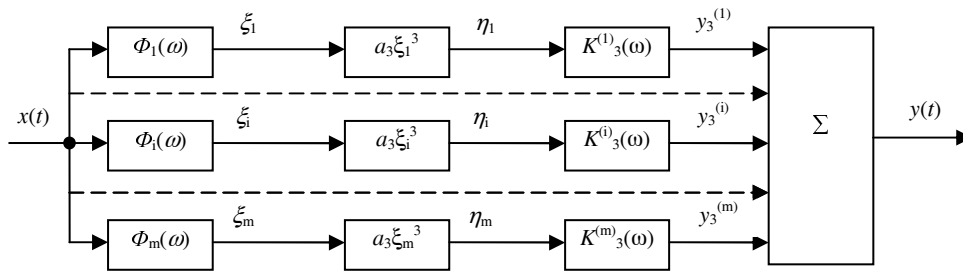


Рис. 6. Схема радиотехнического эквивалента

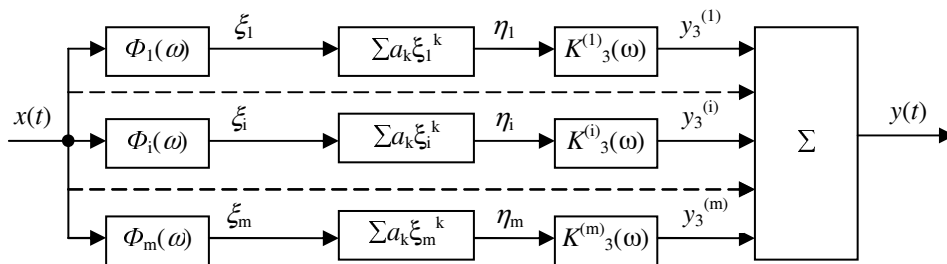


Рис. 7. Упрощенная структурная схема устройства

Найдем явный вид коэффициента передачи третьего порядка $K_3(-\omega, \omega, \omega)$, для чего воспользуемся соответствующим ядром функционала Вольтерра (6):

$$h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = c \left[e^{-\sigma(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)} - e^{-\sigma(-\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)} \right] \cos \omega_y (\tau_1 - \tau_2 - \tau_3),$$

$$\tau_1 = \min \{ \tau_1, \tau_2, \tau_3 \}, \quad \tau_3 = \max \{ \tau_1, \tau_2, \tau_3 \}.$$

Тогда, обозначив $\omega_0 = \omega$, запишем:

$$\begin{aligned} \dot{K}_3(-\omega, \omega, \omega) &= \int_0^{\infty} d\tau_3 \int_0^{\tau_3} d\tau_2 \int_0^{\tau_2} d\tau_1 h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) e^{-j\omega(-\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)} = \\ &= \dot{F}(\omega - \omega_0) + \dot{F}(\omega + \omega_0) = \\ &= \frac{1}{[\sigma + j(\omega - \omega_0)]^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sigma - j(\omega - \omega_0)} + \frac{1}{\sigma + j(\omega - \omega_0)} \right] \right\} + \dot{F}(\omega + \omega_0). \end{aligned}$$

Ограничиваясь областью положительных частот и учитывая, что $\sigma \gg 1$, запишем $K_3(-\omega, \omega, \omega)$ в следующем виде:

$$K_3(-\omega, \omega, \omega) \approx \frac{1}{[\sigma + j(\omega - \omega_0)]^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sigma + j(\omega - \omega_0)} + \frac{1}{\sigma - j(\omega - \omega_0)} \right] \right\}.$$

Поправка, которую дает сумма сопряженных коэффициентов в квадратных скобках, имеет максимальное значение $(1 + 1/\sigma)$ при $\omega - \omega_0 = 0$ и, таким образом,

$$K_3(-\omega, \omega, \omega) \approx \frac{1}{[\sigma + j(\omega - \omega_0)]^2},$$

что и отображает рис. 7.

Найдем отклик всей системы осцилляторов на сигнал $x(t)$:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=1}^n a_{2p-1} \frac{C_{2p-1}^{p-1}}{2^{2p-1}} \int_{-\infty}^{\infty} g'(j\omega) S(j\omega) |S(j\omega)|^{2p-2} e^{j\omega t} d\omega + \text{к.с.}, \quad (18)$$

$$\text{где } g'(j\omega) = g(\omega) \sum_i K_{2p-2}^{(i)}(j\omega)$$

Суммарная резонансная характеристика системы осцилляторов, функция $g(\omega)$ имеют смысл плотности распределения осцилляторов по частотам. Первый член выражения (18) описывает линейное прохождение сигнала $x(t)$ через фильтр с коэффициентом передачи $g'(j\omega)$; второй член соответствует нелинейному преобразованию третьего порядка и достаточно полно характеризует процессы, происходящие в нелинейной резонансной среде:

$$y(t | p = 2) = 2 \frac{3}{8} \frac{a_3}{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g'(j\omega) S(j\omega) |S(j\omega)|^2 e^{j\omega t} d\omega \right\}. \quad (19)$$

Спектральная плотность выходного сигнала, соответствующего этому преобразованию

$$S_y(j\omega | p = 2) = \frac{3a_3}{8} [S(j\omega) |S(j\omega)|^2] g'(j\omega), \quad (20)$$

определяет возможные отклики среды.

Во временной области отклик среды на воздействие $x(t)$, определяемый вторым приближением решения основного уравнения среды, в соответствии с (20) можно представить в виде

$$y(t | p = 2) = \frac{3a_3}{8} x(t) * x(t) \otimes x(t) * g'(t).$$

где $g'(t)$ – импульсная характеристика системы, имеющей коэффициент передачи $g'(j\omega)$.

Последнее выражение определяет функциональные возможности устройств, которые могут использовать свойства НРС: получение свертки и корреляционной функции сигналов в реальном масштабе времени.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Корнел А., Чаттерджи М. Труды института электро-радиоинженеров (ТИИЭР), 1981. – Т. 69, № 12. – С. 22-43.
2. Hahn E.L. Physical Revue. – 1950. – Vol. 80. – P. 580-594.
3. Рассветалов Л.А. Радиотехника и электроника. – 1987. – Т. 31, № 1. – С. 8-14.
4. Gould R.W. American Journal Physic. – 1969. – Vol. 37, 6. – P. 595-597.
5. Кашкин В.Б. Функциональные полиномы в задачах статистической радиотехники. – Новосибирск: Наука, 1981. – С. 145.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор А.А. Колесников.

Рассветалов Леонид Александрович

Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого.

E-mail: leonid.rassvetalov@novsu.ru.

173003, г. Великий Новгород, ул. Б.С.-Петербургская, 41.

Тел.: 88162626862.

Кафедра радиосистем.

Rassvetalov Leonid Alexandrovich

Novgorod State University.

E-mail: leonid.rassvetalov@novsu.ru.

41, B.S-Petersburgskaya Street, Veliky Novgorod, 173003, Russia.

Phone: +78162626862.

The Department of Radio Systems.

УДК 681.51

А.Н. Попов

**СИНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ СИСТЕМ ЭНЕРГОСБЕРЕГАЮЩЕГО
УПРАВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ***

Рассматривается применение методов синергетической теории управления для решения задач проектирования систем энергосберегающего управления электромеханическими процессами. Излагаются вопросы поиска энергетических инвариантов электромеханики – соотношений, соответствующих минимуму потерь энергии. Обсуждаются особенности процедуры синергетического синтеза энергосберегающих регуляторов электромеханических систем. Приводится пример применения предлагаемого подхода для синтеза систем энергосберегающего управления асинхронным электроприводом.

Электромеханическое преобразование энергии; энергосбережение; автоматическое управление; энергетические инварианты; синергетический синтез регуляторов.

A.N. Popov

**SYNERGETIC SYNTHESIS OF ENERGY SAVING CONTROL SYSTEMS
FOR ELECTROMECHANICAL PROCESSES**

The paper is devoted to using of synergetic control theory for synthesis of energy saving control for electromechanical processes. The questions of energy invariants finding and synergetic synthesis procedure of energy saving control are considered. Proposed approach application for induction motor is demonstrated.

Electromechanical energy conversion; energy saving; automatic control; energy invariants; synergetic feedback synthesis.

Введение. Процессы электромеханического преобразования энергии имеют чрезвычайно широкое распространение в технологической деятельности человека. Электрические машины остаются не только основным типом генераторов механического движения, но и являются основным потребителем электроэнергии. В этой связи проблема максимально эффективного электромеханического преобразования энергии имеет приоритетное значение в рамках общей стратегии рационального использования энергетических ресурсов и развития энергосберегающих технологий.

Успешное решение указанной проблемы предполагает проведение комплекса мероприятий организационно-правового, научно-технического и экономического

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-08-00912-а).