

Разработанная методика позволяет рассчитывать запас устойчивости по показателю колебательности систем с распределёнными параметрами. Полученные с помощью представленной методики расширенные частотные характеристики и M_n -окружности позволяют рассчитывать настройки распределённых регуляторов, реализующих различные законы управления. При этом обеспечивается расположение всех корней характеристического полинома замкнутой системы внутри сектора, определяемого требуемой степенью колебательности m , а, следовательно, и требуемой степенью затухания переходного процесса.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дудников Е.Г. Основы автоматического регулирования тепловых процессов: Учебное пособие для вузов. – М.–Л.: Госэнергоиздат, 1956. – 264 с
2. Ляшенко А.Л. Частотный анализ объектов с распределёнными параметрами с помощью расширенных частотных характеристик // Материалы 6-й научной конференции «Управление и информационные технологии» (УИТ-2010). – СПб.: ОАО «Концерн «ЦНИИ Электроприбор», 2010. – С. 65-70.
3. Першин И.М. Анализ и синтез систем с распределенными параметрами. – Пятигорск: РИА-КМВ, 2007. – 244 с.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Н.Н. Ефимов.

Ляшенко Александр Леонидович

Северо-западный государственный заочный технический университет.

E-mail: akuna_matata_kmv@mail.ru.

191186, г. Санкт-Петербург, ул. Миллионная, д. 5.

Тел.: 89111878180.

Кафедра процессов управления и информационных систем; доцент.

Золотов Олег Иванович

Кафедра процессов управления и информационных систем; профессор.

Lyashenko Alexander Leonidovich

North-West State Technical University.

E-mail: akuna_matata_kmv@mail.ru.

5, Millionnaya Street, Saint-Petersburg, 191186, Russia.

Phone: +79111878180.

The Department of Management Processes and Information Systems; Associate Professor.

Zolotov Oleg Ivanovich

The Department of Management Processes and Information Systems; Professor.

УДК 681.5.01

В.А. Коваль, О.Ю. Торгашова

**СИНТЕЗ H_2 -ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА
ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ,
ОПИСЫВАЕМОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ**

На основе доказанного свойства о представлении интеграла с переменным верхним пределом в спектральной форме [1] осуществлен переход от интегродифференциального уравнения с частными производными к бесконечномерной системе дифференциальных уравнений в форме пространства состояний. Исследована сходимость полученного решения по ограниченному числу дифференциальных уравнений. Проведен синтез регулятора для объекта управления, описываемого интегродифференциальным уравнением, на основе метода H_2 -оптимизации.

Распределенная система; интегродифференциальное уравнение с частными производными; анализ; синтез; H_2 -оптимизация; сингулярная задача фильтрации.

V.A. Koval', O.Yu. Torgashova

H₂-OPTIMAL CONTROL SYNTHESIS FOR THE DISTRIBUTED SYSTEM DESCRIBED BY INTEGRO-PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

The transition from the integro-partial differential equations to an infinite system in the state-space form is realized on the basis of the proved property on the representation of the integral with variable upper limit in the spectral form [1]. The convergence of the solution on a limited number of differential equations is investigated. The control law is constructed using the method of H₂-optimization.

Distributed system, integro-partial differential equation, analysis, synthesis, H₂-optimization, singular problem of filtration.

Введение. Распределенные объекты управления, в которых происходят тепловые, диффузионные, магнитогидродинамические и радиационные процессы, во многих случаях описываются интегродифференциальными уравнениями с частными производными, в которые входят интегралы с переменным верхним пределом по пространству. Коэффициенты интегродифференциального уравнения, как правило, зависят от пространственной переменной.

Известные аналитические и численные методы дают возможность синтезировать регулятор для рассматриваемого объекта управления, в основном, путем подбора параметров регулятора и его структуры. В данной работе предлагается спектральный метод решения задачи [1]. При этом с использованием процедуры разложения регулируемой переменной в ряд Фурье по ортонормированной системе функций в области пространственных переменных осуществляется переход от интегродифференциального уравнения в частных производных к бесконечномерной системе дифференциальных уравнений в форме Коши. Полученная система записывается относительно вектора спектральной характеристики, составляющими которого являются коэффициенты разложения регулируемой переменной в ряд Фурье по пространственной координате. Данная математическая модель открывает возможность применения методов пространства состояний, используемых в сосредоточенных системах, для синтеза регуляторов распределенных систем.

1. Постановка задачи и предварительные результаты. Доказать новое свойство спектральных характеристик о представлении интеграла с переменным верхним пределом в спектральной форме.

На основе доказанного положения и полученных ранее свойств [1] осуществить переход от интегродифференциального уравнения с частными производными к бесконечномерной системе дифференциальных уравнений в форме Коши.

Обосновать сходимость полученного решения по усеченной модели, которая необходима для выполнения вычислительных процедур.

Синтезировать регулятор для рассматриваемого распределенного объекта управления на основе метода H₂-оптимизации.

Свойство о представлении интеграла с переменным верхним пределом в спектральной форме. Полагаем, что есть интеграл вида

$$J(x, t) = \int_a^x k(x, \xi) \varphi(\xi, t) d\xi, \quad (1)$$

где $k(x, \xi)$ – весовая функция, вещественная, однозначная, непрерывная и регулярируемая на интервале $\xi \in [a, b]$, $x \in [a, b]$; $\varphi(\xi, t)$ – регулируемая или изменяемая переменная объекта управления, вещественная, однозначная, непрерывная, дифференцируемая на интервале $\xi \in [a, b]$, $t \in [0, \infty)$, которая может быть разложена в ряд Фурье по ортонормированной системе функций $\{P(h, \xi)\}$, т.е.

$$\varphi(\xi, t) = \sum_{h=1}^{\infty} \phi(h, t) P(h, \xi), \quad (2)$$

$$\phi(h, t) = \int_a^b \varphi(\xi, t) P(h, \xi) d\xi, \quad h = \overline{1, \infty}. \quad (3)$$

Найдем спектральную характеристику от интеграла (1) по переменной x . Согласно [1]

$$S_x[J(x, t)] = \int_a^b P(\bar{h}, x) \left[\int_a^x k(x, \xi) \varphi(\xi, t) d\xi \right] dx, \quad \bar{h} = \overline{1, \infty}. \quad (4)$$

Подставим (2) в (4), интегралы и сумму поменяем местами, функцию $\phi(h, t)$ вынесем за знаки интегрирования. Получим

$$S_x[J(x, t)] = \sum_{h=1}^{\infty} \left\{ \int_a^b P(\bar{h}, x) \left[\int_a^x k(x, \xi) P(h, \xi) d\xi \right] dx \right\} \phi(h, t), \quad (5)$$

$$h = \overline{1, \infty}, \quad \bar{h} = \overline{1, \infty}.$$

Введем обозначение

$$P_u^x(\bar{h}, h) = \int_a^b P(\bar{h}, x) \left[\int_a^x k(x, \xi) P(h, \xi) d\xi \right] dx, \quad h = \overline{1, \infty}, \quad \bar{h} = \overline{1, \infty}. \quad (6)$$

Внутренний интеграл в (6) представляет собой спектральную характеристику от весовой функции $k(x, \xi)$ по ортонормированной системе $\{P(h, \xi)\}$ и может быть обозначен как

$$\phi_k(h, x) = \int_a^x k(x, \xi) P(h, \xi) d\xi, \quad h = \overline{1, \infty}. \quad (7)$$

С учетом (7) выражение (6) для $P_u^x(\bar{h}, h)$ может быть представлено в виде

$$P_u^x(\bar{h}, h) = \int_a^b P(\bar{h}, x) \phi_k(h, x) dx, \quad h = \overline{1, \infty}, \quad \bar{h} = \overline{1, \infty}. \quad (8)$$

Выражение (1.5) с учетом (1.6), (1.8) может быть записано следующим образом:

$$S_x[J(x, t)] = \sum_{h=1}^{\infty} P_u^x(\bar{h}, h) \phi(h, t), \quad h = \overline{1, \infty}, \quad \bar{h} = \overline{1, \infty}. \quad (9)$$

Выражение (9) можно представить в матричной форме, если положить $h = \overline{1, \infty}$, $\bar{h} = \overline{1, \infty}$, $h = \bar{h}$. При этом $S_x[J(x, t)]$ можно обозначить как матрицу-столбец ϕ_u^x размерности $\bar{h} \times 1$, $P_u^x(\bar{h}, h)$ представить квадратной матрицей размерности $\bar{h} \times h$, $\Phi_\varphi(h, t)$ представить матрицей-столбцом размерности $h \times 1$. Тогда для спектральной характеристики с переменным верхним пределом (9) справедливо

$$\phi_u^x = P_u^x \phi. \quad (10)$$

Анализ распределенного объекта управления, описываемого интегро-дифференциальными уравнениями с частными производными. Рассмотрим объект управления, описываемый интегродифференциальным уравнением вида

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \alpha_2(x) \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} + \alpha_1(x) \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} + \alpha_0(x) \int_a^x k(x, \xi) \varphi(\xi, t) d\xi + f(x, t), \quad x \in [a, b], \quad t \in [0, \infty), \quad (11)$$

где $\alpha_0(x)$, $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ – безразмерные коэффициенты уравнения, зависящие от пространственной переменной x ; $k(x, \xi)$ – ядро интегрального преобразования; $f(x, t)$ – внешнее воздействие.

Функции $f(x, t)$, $\varphi(x, t)$ – однозначные, непрерывные, ограниченные с интегрируемым квадратом, всюду дифференцируемые на интервале $x \in [a, b]$, $t \in [0, \infty)$.

Управление объектом (1.11) осуществляется с границ

$$\varphi(a, t) = \varphi_a(t), \quad t \in [0, \infty), \quad (12)$$

$$\varphi(b, t) = \varphi_b(t), \quad t \in [0, \infty). \quad (13)$$

Начальные условия:

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad x \in [a, b]. \quad (14)$$

Разложим функцию $\varphi(x, t)$ в ряд Фурье по ортонормированной системе функций $\{P(h, x)\}$ в соответствии с (2), (3).

На основе доказанных ранее в [1] свойств спектральных характеристик и полученного нового свойства спектральных характеристик о представлении интеграла с переменным верхним пределом уравнение (11) может быть представлено в виде бесконечномерной системы дифференциальных уравнений в форме Коши относительно спектральной характеристики регулируемой переменной $\phi(h, t)$ (3). $\phi(h, t)$ – вектор, составленный из коэффициентов ряда Фурье для регулируемой переменной $\varphi(x, t)$ по пространственной переменной x на основе ортонормированной системы функций $\{P(h, x)\}$.

$$\frac{d\phi}{dt} = \Phi_{12}(P_2\phi + \Gamma_2^{0a} + \Gamma_2^{0b}) + \Phi_{11}(P_1\phi + \Gamma_1^{0a} + \Gamma_1^{0b}) + \Phi_{10}P_u^x\phi + \phi_f, \quad (15)$$

$$\phi(0) = \phi_0$$

где ϕ – вектор спектральной характеристики размерности $h \times 1$; Φ_{12} , Φ_{11} , Φ_{10} – матрицы первого сомножителя, определяемые по [1], размерности $h \times \bar{h}$, $h = \bar{h}$; P_1 , P_2 – операционные матрицы дифференцирования функции $\varphi(x, t)$ по пространственной переменной первого и второго порядка соответственно, определяемые по [1], размерности $\bar{h} \times h$, $h = \bar{h}$; P_u^x – операционная матрица интегрального преобразования, определяемого по (7), (8), размерности $\bar{h} \times h$,

$h = \bar{h}$; $\Gamma_1^{0a}, \Gamma_1^{0b}, \Gamma_2^{0a}, \Gamma_2^{0b}$ – матрицы граничных условий, определяемые по [1], размерности $\bar{h} \times 1$; ϕ_f – вектор спектральной характеристики внешнего воздействия $f(x, t)$ по пространственной переменной x , определяемый в соответствии с выражением (1.3), размерности $h \times 1$; ϕ_0 – вектор начальных условий, определяемый с учетом выбранной системы разложения и (1.14). Для всех векторов и матриц из (15) справедливо $h = 1, \infty, \bar{h} = 1, \infty$.

Дополняя систему (15) уравнениями для измеряемых и регулируемых выходов, получим

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t) &= A\phi(t) + Bu(t) + Gw(t), \\ y(t) &= C\phi(t), \quad \theta(t) = D\phi(t), \end{aligned} \quad (16)$$

где $A = \Phi_{12}P_2 + \Phi_{11}P_1 + \Phi_{10}P_u^x$; $B = [\Phi_{11}\Gamma_1^{0a} + \Phi_{12}\Gamma_2^{0a} \quad \dots \quad \Phi_{11}\Gamma_1^{0b} + \Phi_{12}\Gamma_2^{0b}]$; $u(t) = colon\{\varphi_a(t), \varphi_b(t)\}$; матрица G и внешнее воздействие $w(t)$ определяются исходя из удобства представления ϕ_f произведением $\phi_f = Gw(t)$; y – вектор измеряемых выходов размерности $r \times 1$; θ – вектор регулируемых выходов размерности 2×1 ; матрицы C и D составлены из элементов ортонормированной системы разложения (2), (3), вычисленных для фиксированных значений пространственных координат из открытого интервала $x \in (0, 1)$, размерностей $r \times h$ и $2 \times h$ соответственно.

Решая систему (16), находим ϕ . Решение исходной задачи определяется как сумма ряда Фурье по пространственной переменной на основе ортонормированной системы функций $\{P(h, x)\}$, т.е.

$$\varphi(x, t) = \sum_{h=1}^{\infty} \phi(h, t)P(h, x).$$

2. Синтез H_2 -оптимального закона управления. Рассмотрим уравнения объекта управления в отклонениях, представленные в форме Коши

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t) &= A\phi(t) + Bu(t) + Gw(t), \\ y(t) &= Cx(t), \quad \theta(t) = Dx(t) + Su(t), \end{aligned} \quad (17)$$

где $\phi \in \mathbf{R}^n$ ($n \rightarrow \infty$) – бесконечномерный вектор состояний; $u \in \mathbf{R}^m$ ($m = 2$) – вектор управляющих воздействий, которые представляют собой изменение граничных условий; $y \in \mathbf{R}^r$ ($r < n, r \geq m$) – вектор измеряемых выходов; $\theta \in \mathbf{R}^q$ ($q = m = 2$) – вектор регулируемых выходов; $w \in \mathbf{R}^l$ ($l \geq r$) – возмущающее воздействие, которое будем считать неопределенным векторным сигналом с ограниченной L_2 -нормой; A, B, G, C, S – числовые матрицы соответствующих размеров, причем B, G и C и D имеют полные ранги, пары (A, B) и (A, G) являются полностью управляемыми, а пара (C, A) – полностью наблюдаемой. Также будем полагать, что матрица C имеет структуру $C = [I_r \quad \dots \quad 0]$.

Такая постановка задачи соответствует описанию объектов управления для вырожденной задачи H_2 -оптимизации, или сингулярной задаче фильтрации, когда отсутствуют помехи в канале измерения.

В качестве обратной связи будем рассматривать динамический компенсатор, состоящий из наблюдателя Люенбергера и регулятора полного состояния:

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}(t) &= W\zeta(t) + Ky(t) + TBu(t), \\ u(t) &= F\hat{\phi}(t) = F(V\zeta(t) + Uy(t)),\end{aligned}\quad (18)$$

где $\zeta \in \mathbf{R}^{n-r}$ – вектор состояний наблюдателя; $\hat{\phi} \in \mathbf{R}^n$ – вектор оценок переменных состояния объекта; F – матрица передаточных коэффициентов регулятора полного состояния; матрицы W, K, T, V, U удовлетворяют соотношениям [2]

$$T = [L \ \vdots \ I_{n-r}], \quad U = \begin{bmatrix} I_r \\ \vdots \\ -L \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ I_{n-r} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$W = TAV = A_{22} + LA_{12}, \quad K = TAU = -(A_{22} + LA_{12})L + A_{21} + LA_{11},$$

где L – некоторая матрица размерности $(n-r) \times r$; I_α – здесь и далее единичная матрица размерности α ; A_{ij} ($i, j = 1, 2$) – блоки матрицы A , соответствующие разбиению вектора ϕ на составляющие $\phi_1 = y \in \mathbf{R}^r$ и $\phi_2 \in \mathbf{R}^{n-r}$.

В [3] показано, что при выполнении условий

$$S^T D = 0, \quad S^T S = I_m \quad (20)$$

решение задачи синтеза регулятора (18) для объекта (17), при условии минимума H_2 -нормы передаточной матрицы замкнутой системы, сводится к решению двух уравнений Риккати

$$XA + A^T X - XBB^T X + D^T D = 0, \quad (21)$$

$$A_{22}Y + YA_{22}^T - (YA_{12}^T + G_2G_1^T)(G_1G_1^T)^{-1}(A_{12}Y + G_1G_2^T) + G_2G_2^T = 0, \quad (22)$$

из которых определяются матрицы X, Y , а затем матрицы F, L в соответствии с выражениями:

$$F = -B^T X, \quad (23)$$

$$L = -(YA_{12}^T + G_2G_1^T)(G_1G_1^T)^{-1}. \quad (24)$$

В (22) и (24) G_1, G_2 – блоки матрицы G , соответствующие разбиению вектора состояний объекта на составляющие: ϕ_1, ϕ_2 .

Кроме того, в [3] отмечено, что при выполнении условия $H_G = 0$, где $G_2(I_l - G_1^T(G_1G_1^T)^{-1}G_1)G_2^T = H_G H_G^T$ решением уравнения (22) является $Y = 0$. При этом синтезируемый регулятор будет устойчивым лишь в случае устойчивости матрицы $A_G = A_{22} - G_2G_1^T(G_1G_1^T)^{-1}A_{12}$.

Выполним синтез регулятора для распределенного объекта (16). Для матрицы C распределенного объекта в общем случае не выполняется условие $C = [I_r \ \vdots \ 0]$, поэтому выполним преобразование координат $\bar{\phi} = N\phi$, где $N = colon\{C, R\}$, матрица R размерности $(n-r) \times n$ выбирается таким образом, чтобы выполнялось условие $\det N \neq 0$. Выберем матрицу R в виде

$R = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & I_{n-r} \end{bmatrix}$. С учетом введенного преобразования координат уравнения объекта преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\phi}}(t) &= NAN^{-1}\bar{\phi}(t) + NBu(t) + NGw(t), \\ y(t) &= CN^{-1}\bar{\phi}(t), \quad \theta(t) = DN^{-1}\bar{\phi}(t). \end{aligned} \quad (25)$$

Для распределенного объекта управления, представленного в форме (25), регулируемый выход $\theta(t) = CN^{-1}\bar{\phi}(t)$ не содержит составляющую по управлению, которая должна присутствовать в формальном описании объекта в задаче H_2 -оптимизации (17). Для погружения исходной задачи в рамки сингулярной задачи фильтрации расширим вектор регулируемых выходов, добавив в него вектор управлений:

$$\bar{\theta}(t) = colon\{\theta(t), u(t)\} = \begin{bmatrix} DN^{-1} \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \bar{\phi}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ I_r \end{bmatrix} u(t), \quad (26)$$

Учитывая (25) и (26), получим описание объекта управления, погруженного в сингулярную задачу фильтрации:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\phi}}(t) &= \bar{A}\bar{\phi}(t) + \bar{B}u(t) + \bar{G}w(t), \\ y(t) &= \bar{C}\bar{\phi}(t), \quad \theta(t) = \bar{D}\bar{\phi}(t) + \bar{S}u(t). \end{aligned} \quad (27)$$

где $\bar{A} = NAN^{-1}$, $\bar{B} = NB$, $\bar{G} = NG$, $\bar{C} = CN^{-1}$, $\bar{D} = colon\{DN^{-1}, 0\}$, $\bar{S} = colon\{0, I_r\}$. Отметим, что матрицы \bar{D} , \bar{S} удовлетворяют условиям (20).

Согласно постановке задачи H_2 -оптимизации, вектор внешних возмущений w должен иметь размерность $l \geq r$, поэтому в описании распределенного объекта (11) выберем внешнее возмущение $f(t)$ в виде суммы l функций $f(t) = \sum_{i=1}^l f_i(t)$. Для

функций $f_i(t)$, $i = \overline{1, l}$ определим спектральные характеристики $\phi_{f_1}, \dots, \phi_{f_l}$ соответственно и составим матрицу G , исходя из выражения $\phi_f = \begin{bmatrix} \phi_{f_1} \\ \vdots \\ \dots \\ \vdots \\ \phi_{f_l} \end{bmatrix} = Gw$.

Если выбрать $l = r = 2$, то блок G_1 будет иметь размерность 2×2 , а блок G_2 – размерность $(n-2) \times 2$. Это означает выполнение условия $H_G = 0$. Поэтому матрица G должна выбираться таким образом, чтобы обеспечивалась устойчивость матрицы $A_G = A_{22} - G_2G_1^T(G_1G_1^T)^{-1}A_{12}$.

В заключение раздела приведем выражения для стандартного представления регулятора (18) как динамической системы:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}(t) &= A_r \zeta(t) + B_r y(t), \\ u(t) &= C_r \zeta(t) + D_r y(t) \end{aligned} \quad (28)$$

с матрицами, определяемыми выражениями

$$\begin{aligned} A_r &= W + TBFV, \quad B_r = K + TBFU, \\ C_r &= FV, \quad D_r = FU. \end{aligned} \quad (29)$$

3. Аппроксимации бесконечномерных систем. Одной из основных проблем, связанных с использованием для анализа бесконечномерных систем, является

ся проблема аппроксимации – замены бесконечномерной системы адекватной конечномерной системой, так как любая вычислительная процедура, в конечном итоге, предполагает наличие ограниченного числа уравнений в решаемой системе. Анализ и синтез с использованием спектрального метода проводится по ограниченному, конечному числу уравнений системы.

На основании работ О.А. Жаутыкова [4], К.П. Персидского [5] были сформулированы достаточные условия, чтобы решение системы

$$\frac{d\chi_{0k}}{dt} = g_k(t, \chi_{01}, \chi_{02}, \chi_{03}, \dots; \mu), \quad (k = \overline{1, \infty}), \quad (30)$$

где μ – параметр системы, при достаточно большом значении s (порядок усечения), было близко на заданном временном интервале $[0, T]$ к решению «укороченной» системы дифференциальных уравнений, которая получается из первых s уравнений (30), если положить в них равными нулю все искомые функции, начиная с s -й.

Итак, полагаем, что правые части системы (30) заданы в замкнутой области D и при

$$t \in [0, T], \quad \sup_k |\chi_{0k}| \leq R, \quad (k = \overline{1, \infty}), \quad (31)$$

$$\mu \in [\lambda_0, \lambda_1].$$

Достаточные условия возможности усечения системы (30), согласно [4], могут быть сформулированы следующим образом:

1. Функции g_k непрерывны по переменным $t, \chi_{01}, \chi_{02}, \chi_{03}, \dots; \mu$.

2. Функции удовлетворяют относительно переменных $\chi_{01}, \chi_{02}, \chi_{03}, \dots$ усиленному условию Коши-Липшица:

$$\begin{aligned} & \left| g_k(t, \chi_{01}, \chi_{02}, \chi_{03}, \dots, \chi_{0m-1}, \chi'_{0m}, \chi'_{0m+1}, \dots; \mu) - \right. \\ & \left. - g_k(t, \chi_{01}, \chi_{02}, \chi_{03}, \dots, \chi_{0m-1}, \chi''_{0m}, \chi''_{0m+1}, \dots; \mu) \right| \leq \varepsilon_m \|\Delta_m \chi_0\|, \quad (32) \\ & (k = 1, 2, 3, \dots; m = 1, 2, 3, \dots); \quad \varepsilon_m \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad m \rightarrow \infty; \quad \varepsilon_1 = M, \end{aligned}$$

M – ограниченное число.

Аргументы функции находятся в области D

$$\|\Delta_m \chi_0\| = \sup_k \{ |\chi'_{0k} - \chi''_{0k}| \}, \quad (k = m, m+1 \dots), \quad (33)$$

где χ'_{0k} и χ''_{0k} – значения спектральных характеристик, разделенных интервалом $\Delta t \rightarrow 0$.

3. При любом $t \in [0, T]$, $\mu \in [\lambda_0, \lambda_1]$ и при $\chi_{01} = \chi_{02} = \chi_{03} = \dots = 0$ выполняется неравенство

$$|g_k(t, 0, 0, \dots; \mu)| \leq v(t), \quad (k = \overline{1, \infty}), \quad (34)$$

где $v(t)$ – ограниченная непрерывная функция на отрезке $[0, T]$.

Кроме того, в [4] доказана теорема о том, что если правые части исходной системы (30) удовлетворяют усиленному условию Коши-Липшица (32), то решение $\chi_{0k}(t, \mu)$ укороченной системы

$$\frac{d\bar{\chi}_{0k}}{dt} = g_k(t, \bar{\chi}_{01}, \bar{\chi}_{02}, \bar{\chi}_{03}, \dots, \bar{\chi}_{0s}, 0, 0, \dots; \mu), \quad (k = \overline{1, s}), \quad (35)$$

при $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ удовлетворяет условию

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \bar{\chi}_{0k}(t, \mu) = \chi_{0k}(t, \mu), \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (36)$$

где $\chi_{0k}(t, \mu)$ – решение исходной системы (3.1); δ – бесконечно малая величина. При этом предельный переход является равномерным по параметру μ при $\mu \in [\lambda_0, \lambda_1]$.

Система (35) получается из системы (30) путем приравнивания к нулю всех искомого функции, начиная с $(s+1)$ -й.

Приведенные достаточные условия и теорема дают возможность вынести суждение о правомочности рассмотрения ограниченного числа уравнений в бесконечной системе (25), составленных относительно спектральных характеристик, что, в конечном итоге, определяет достоверность использования ограниченного числа пространственных мод для описания процессов в распределенной системе управления.

4. Пример синтеза H_2 -оптимального регулятора для управления распределенным объектом. Зададимся следующими значениями параметров и функций, входящих в уравнение (11):

$$x, \xi \in [0, 1], \quad (37)$$

$$\alpha_0(x) = -2.71, \quad \alpha_1(x) = -0.78, \quad \alpha_2(x) = 0.37x,$$

$$k(x, \xi) = x \cdot \xi, \quad f(x, t) = f_1(x, t) + f_2(x, t) = -e^{-t} \sin(\pi x/2) - 1.$$

Перепишем (11) с учетом (37):

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = 0.37x \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} - 0.78 \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} -$$

$$- 2.71 \int_0^x x \cdot \xi \cdot \varphi(\xi, t) d\xi - e^{-t} \sin(\pi x/2) - 1, \quad (38)$$

$$x \in [0, 1], \quad t \in [0, \infty).$$

Управление осуществляется с границ $\varphi(0, t) = \varphi_0(t)$, $\varphi(1, t) = \varphi_1(t)$, $t \in [0, \infty)$. Будем считать, что до момента приложения внешнего воздействия $f(t)$ система находится в покое, поэтому $\varphi(x, 0) = 0$ и вектор спектральных характеристик начальных условий будет нулевым: $\phi_0 = 0$.

В качестве системы разложения в ряд Фурье выберем ортонормированную на интервале $x \in [0, 1]$ систему функций

$$P(h, x) = \{\sqrt{2} \sin \pi x, \sqrt{2} \sin 2\pi x, \sqrt{2} \sin 3\pi x, \dots\}. \quad (39)$$

Операционные матрицы дифференцирования первого и второго порядка вычисляются в соответствии с выражениями из [1]:

$$P_1 = P_1(\bar{h}, h) = \int_a^b P(\bar{h}, x) \left[\frac{\partial}{\partial x} P(h, x) \right] dx,$$

$$P_2 = P_2(\bar{h}, h) = P_1^2(\bar{h}, h), \quad h = \overline{1, \infty}, \quad \bar{h} = \overline{1, \infty}$$

и для выбранной системы разложения (39) имеют вид

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2.67 & 0 & -2.07 & 0 & -0.69 & 0 & \dots \\ 2.67 & 0 & -4.8 & 0 & -1.9 & 0 & -1.24 & \dots \\ 0 & 4.8 & 0 & -6.86 & 0 & -2.67 & 0 & \dots \\ 1.07 & 0 & 6.86 & 0 & -8.89 & 0 & -3.39 & \dots \\ 0 & 1.9 & 0 & 8.89 & 0 & -10.91 & 0 & \dots \\ 0.69 & 0 & 2.67 & 0 & 10.91 & 0 & -12.92 & \dots \\ 0 & 1.24 & 0 & 3.39 & 0 & 12.92 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} -9.71 & 0 & 0.47 & 0 & 0.79 & 0 & 1.11 & \dots \\ 0 & -38.84 & 0 & 1.28 & 0 & 1.93 & 0 & \dots \\ 0.47 & 0 & -87.41 & 0 & 2.36 & 0 & 3.32 & \dots \\ 0 & 1.28 & 0 & -155.34 & 0 & 3.87 & 0 & \dots \\ 0.79 & 0 & 2.36 & 0 & -242.79 & 0 & 5.54 & \dots \\ 0 & 1.93 & 0 & 3.87 & 0 & -329.49 & 0 & \dots \\ 1.11 & 0 & 3.32 & 0 & 5.54 & 0 & -475.83 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Матрица P_u^x , найденная в соответствии с (8) и с учетом вида ядра интегрального преобразования $k(x, \xi) = x \cdot \xi$, представляется выражением

$$P_u^x = 10^{-2} \begin{bmatrix} 10.13 & 0.94 & -0.84 & 0.30 & -0.17 & 0.09 & -0.06 & \dots \\ -11.08 & 2.53 & 1.13 & -0.84 & 0.35 & -0.21 & 0.12 & \dots \\ 7.60 & -4.50 & 1.13 & 1.02 & -0.76 & 0.35 & -0.22 & \dots \\ -5.36 & 3.38 & -2.71 & 0.63 & 0.90 & -0.68 & 0.33 & \dots \\ 4.22 & -2.38 & 2.11 & -1.91 & 0.41 & 0.79 & -0.60 & \dots \\ -3.47 & 1.90 & -1.47 & 1.52 & -1.47 & 0.28 & 0.71 & \dots \\ 2.96 & -1.57 & 1.18 & -1.05 & 1.18 & -1.19 & 0.21 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Матрица первого сомножителя в произведении $\alpha_2(x) \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2}$ вычисляется в соответствии с выражением, приведенным в [1]:

$$\Phi_{11}(\bar{h}, h, t) = \int_a^b P(\bar{h}, x) P(h, x) \alpha_2(x, t) dx, \quad h = \overline{1, \infty}, \quad \bar{h} = \overline{1, \infty}$$

и для $\alpha_2(x) = 0,37x - 0,03$, имеет вид

$$\Phi_{12} = 10^{-2} \begin{bmatrix} 35.29 & 0.50 & 0 & 0.04 & 0 & 0.01 & 0 & \dots \\ 0.50 & 35.29 & 0.54 & 0 & 0.05 & 0 & 0.02 & \dots \\ 0 & 0.54 & 35.29 & 0.55 & 0 & 0.06 & 0 & \dots \\ 0.04 & 0 & 0.55 & 35.29 & 0.55 & 0 & 0.06 & \dots \\ 0 & 0.05 & 0 & 0.55 & 35.29 & 0.56 & 0 & \dots \\ 0.01 & 0 & 0.06 & 0 & 0.56 & 35.29 & 0.56 & \dots \\ 0 & 0.02 & 0 & 0.06 & 0 & 0.56 & 35.29 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Матрицы первого сомножителя для произведений $\alpha_0(x) \int_0^x \xi \cdot \varphi(\xi, t) d\xi$ и

$\alpha_1(x) \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x}$, где $\alpha_0(x) = -2.71$, $\alpha_1(x) = -0,78$ определяются выражениями

$\Phi_{10} = -2,71 \cdot I$, $\Phi_{11} = -0,78 \cdot I$ соответственно, где I обозначает бесконечномерную единичную матрицу.

В соответствии с формулой $A = \Phi_{12}P_2 + \Phi_{11}P_1 + \Phi_{10}P_u^x$ вычислим матрицу A :

$$A = \begin{bmatrix} -3.79 & 1.86 & 0.19 & 0.77 & 0.28 & 0.51 & 0.39 & \dots \\ -1.83 & -13.77 & 3.24 & 0.47 & 1.37 & 0.69 & 0.92 & \dots \\ -0.04 & -3.82 & -30.88 & 4.47 & 0.85 & 1.91 & 1.18 & \dots \\ -0.68 & 0.36 & -5.74 & -54.83 & 5.57 & 1.38 & 2.41 & \dots \\ 0.16 & -1.42 & 0.78 & -7.72 & -85.68 & 6.56 & 1.97 & \dots \\ -0.43 & 0.63 & -2.06 & 1.32 & -9.79 & -123.33 & 7.43 & \dots \\ 0.31 & -0.92 & 1.14 & -2.69 & 1.92 & -12.00 & -167.91 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Матрицы граничных условий Γ_1^{0a} , Γ_1^{0b} , вычисленные для выбранной системы функций (4.3) в точках $a = 0$ и $b = 1$, будут нулевыми [1]:

$$\Gamma_1^{0a} = P(h, x)|_{x=a} \varphi_a(t) = P(h, x)|_{x=0} \varphi_0(t) = 0,$$

$$\Gamma_1^{0b} = P(h, x)|_{x=b} \varphi_b(t) = P(h, x)|_{x=1} \varphi_1(t) = 0.$$

Матрицы Γ_2^{0a} , Γ_2^{0b} для $a = 0$ и $b = 1$ определяются выражениями

$$\Gamma_2^{0a} = \frac{\partial P(h, x)}{\partial x} \Big|_{x=0} \varphi_a(t) = \text{colon} \{4.44, 8.89, 13.33, 17.77, 22.21, 26.66, 31.10, \dots\} \varphi_0(t),$$

$$\Gamma_2^{0b} = -\frac{\partial P(h, x)}{\partial x} \Big|_{x=1} \varphi_b(t) = \text{colon} \{4.44, -8.89, 13.33, -17.77, 22.21, -26.66, 31.10, \dots\} \varphi_1(t).$$

Матрица B , определяемая из выражения

$$B = \begin{bmatrix} \Phi_{11}\Gamma_1^{0a} + \Phi_{12}\Gamma_2^{0a} & \vdots & \Phi_{11}\Gamma_1^{0b} + \Phi_{12}\Gamma_2^{0b} \end{bmatrix},$$

имеет вид:

$$B = \begin{bmatrix} 1.62 & 3.25 & 4.86 & 6.49 & 8.09 & 9.71 & 11.14 & \dots \\ 1.51 & -3.02 & 4.54 & -6.05 & 7.59 & -9.10 & 10.81 & \dots \end{bmatrix}^T.$$

Представим в спектральном виде функции $f_1(x, t) = -e^{-t} \sin(\pi x/2)$ и $f_2(x, t) = -1$:

$$\phi_{f_1} = \text{colon}\{0.60, -0.24, 0.15, -0.11, 0.09, -0.08, 0.06, \dots\} \cdot e^{-t},$$

$$\phi_{f_2} = \text{colon}\{0.90, 0, 0.30, 0, 0.18, 0, 0.13, \dots\}.$$

Определим вектор внешних воздействий следующим образом:
 $w(t) = \text{colon}\{e^{-t}, 1(t)\}$. Матрица G будет иметь вид:

$$G = \begin{bmatrix} 0.60 & -0.24 & 0.15 & -0.11 & 0.09 & -0.08 & 0.06 & \dots \\ 0.90 & 0 & 0.30 & 0 & 0.18 & 0 & 0.13 & \dots \end{bmatrix}^T.$$

Если полагать, что измеряемыми и регулируемыми переменными являются $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.9$, то матрицы C и D будут иметь вид:

$$C = D = \begin{bmatrix} 0.83 & 1.35 & 1.35 & 0.83 & 0 & -0.83 & -1.35 & \dots \\ 0.44 & -0.83 & 1.14 & -1.35 & 1.41 & -1.35 & 1.14 & \dots \end{bmatrix}.$$

Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений в форме Коши является бесконечномерной. Для выполнения вычислительных процедур ограничимся рассмотрением первых семи спектральных мод.

Вычисления показали, что пары (A, B) и (A, G) являются полностью управляемыми, а пара (C, A) – полностью наблюдаемой. Для выполнения условия $C = [I_r \ \vdots \ 0]$ выполнено преобразование координат. Далее в соответствии с (26) осуществлено погружение исходной задачи в рамки сингулярной задачи фильтрации. Для выбранной матрицы G проверка подтвердила выполнение тождества $H_G = 0$ и условия устойчивости матрицы A_G . Следовательно, можно принять $L = 0$, и задача сводится к проблеме H_2 -оптимизации при полной информации, решение которой дается выражениями (21), (23).

Матрица F регулятора полного состояния, входящего в состав регулятора (18):

$$F = \begin{bmatrix} -0.33 & -0.31 & 0.07 & -0.16 & 0.29 & -0.60 & -0.06 \\ -0.56 & -1.05 & -0.04 & -0.86 & 0.81 & -1.03 & 0.67 \end{bmatrix}.$$

Матрицы динамического регулятора (28):

$$A_r = \begin{bmatrix} -22.08 & 4.43 & 10.00 & -40.42 & -24.36 \\ -2.02 & -48.10 & -5.23 & -5.42 & -58.19 \\ 6.08 & -13.57 & -74.38 & -27.23 & -10.29 \\ 1.04 & 8.86 & -19.13 & -126.01 & -55.90 \\ 4.69 & -12.31 & 15.69 & -44.62 & -173.53 \end{bmatrix}, \quad B_r = \begin{bmatrix} -10.98 & -1.39 \\ -17.27 & -3.05 \\ -19.26 & -7.80 \\ -18.24 & 6.70 \\ -27.70 & -12.58 \end{bmatrix},$$

$$C_r = \begin{bmatrix} 0.07 & -0.16 & 0.29 & -0.60 & -0.06 \\ -0.04 & -0.86 & 0.81 & -1.03 & 0.67 \end{bmatrix}, \quad D_r = \begin{bmatrix} -0.38 & -0.21 \\ -0.67 & -0.76 \end{bmatrix}.$$

Результаты анализа замкнутой системы (37), (28), выполненного методом конечных разностей, представлены на рис. 1.

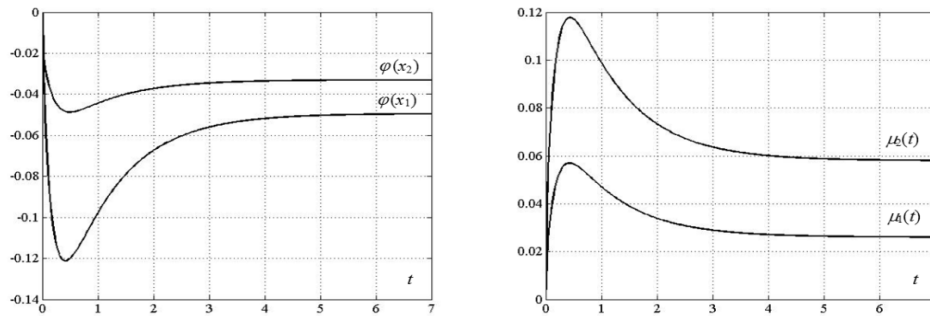


Рис. 1. Результаты анализа замкнутой системы: а – ошибки стабилизации в точках $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.9$; б – управляющие воздействия – границы объекта, распределенного в пространстве

Заключение. Переход от интегродифференциального уравнения к бесконечномерной системе в форме Коши дает возможность существенно формализовать процесс синтеза регулятора.

Усечение бесконечномерной системы является необходимой операцией для проведения вычислительных процедур.

С ростом числа уравнений полученный результат стремится к определенному пределу, если уравнения в форме Коши удовлетворяют приведенным в работе условиям сходимости решения бесконечномерной системы.

Синтез регулятора выполнен на основе метода H_2 -оптимизации. Результаты анализа замкнутой системы указывают на эффективность применения спектрального метода.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Коваль В.А. Спектральный метод анализа и синтеза распределенных систем. – Саратов: Изд-во Саратов. гос. техн. ун-та, 2010.
2. Blanvillain P.J., Johnson T.L. Specific-optimal control with a dual minimal-order observer-based compensator // Int. J. Control. – 1978. – Vol. 28. – № 2. – P. 277-294.
3. Луценко И.В. Синтез астатических регуляторов пониженной размерности на основе теорий H_2 - и H_∞ -оптимизации: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. – Саратов: Изд-во Саратов. гос. техн. ун-та, 2009.
4. Валеев Г.К. Бесконечные системы дифференциальных уравнений / Г.К. Валеев, О.А. Жаутыков. – Алма-Ата: Наука Казахской ССР, 1974.
5. Персидский К.П. Об устойчивости решений счетной системы дифференциальных уравнений // Известия АН Каз. ССР. Серия матем. и механ. – 1948. – Вып. 2.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Н.Н. Ефимов.

Торгашова Ольга Юрьевна

Коваль Владимир Александрович

Саратовский государственный технический университет.

E-mail: okb_sstu@sstu.ru.

410054, г. Саратов, ул. Политехническая, 77.

Тел.: 88452794433.

Кафедра технической кибернетики и информатики.

Torgashova Ol'ga Yuryevna

Koval' Vladimir Aleksandrovich

Saratov State Technical University.

E-mail: okb_sstu@sstu.ru.

77, Polytekhnicheskaya Street, 410054, Saratov, Russia.

Phone: +78452794433.

The Department of Engineering Cybernetics and Informatics.