

УДК 681.51

**А.А. Фоменко****СИНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ЗАКОНОВ ВЕКТОРНОГО УПРАВЛЕНИЯ  
ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ДВИЖЕНИЕМ БЕСПИЛОТНОГО  
ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА**

*Представлен синергетический синтез законов векторного управления пространственным движением беспилотного летательного аппарата. Получен вектор управляющих воздействий в обобщенной форме с применением метода аналитического конструирования агрегированных регуляторов. Проведено моделирование замкнутой нелинейной системы в среде программного пакета Maple. При моделировании были использованы параметры реального амфибийного беспилотного летательного аппарата. Продемонстрировано точное выполнение заданных технологических инвариантов.*

*Синергетический синтез; векторное управление; агрегированный регулятор; математическая модель движения летательного аппарата.*

**A.A. Fomenko****SYNERGISTIC SYNTHESIS OF THE VECTOR CONTROL LAWS  
OF SPATIAL MOVEMENT OF THE UNMANNED AERIAL VEHICLE**

*This paper presents synergistic synthesis of the vector control laws of spatial movement of the unmanned aerial vehicle. The controls vector in the generalized form with application of method of analytical construction of aggregated regulators is received. The simulation of the closed nonlinear system in Maple software environment is produced. The parameters of the real amphibian unmanned aerial vehicle are used in the simulation. Exact performance of the set technological invariants is shown.*

*Synergistic synthesis; vector control; aggregated regulator; mathematical model of aircraft motion.*

**Введение.** Автоматическое управление летательными аппаратами остается весьма актуальной научно-технической проблемой. Это обусловлено существенной нелинейностью, многомерностью, многосвязностью и нестационарностью летательного аппарата как объекта управления на многих эксплуатационных режимах полета. В работе рассматривается синтез законов управления пространственным движением беспилотного летательного аппарата (БЛА) с применением синергетического подхода [1, 2]. Суть такого подхода состоит в разработке универсальных законов взаимосвязанного управления пространственным движением БЛА, которые всесторонне и в полном объеме учитывают естественные динамические свойства этих сложных динамических объектов.

Для задачи синтеза и моделирования выбран амфибийный беспилотный летательный аппарат, предназначенный для мониторинга очагов лесных пожаров.

**1. Математическая модель объекта.** Для синтеза выбрана нелинейная математическая модель пространственного движения летательного аппарата, записанная относительно углов атаки и скольжения [3]:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= g(u_1 \cos(x_2) \cos(x_3) - u_2 \sin(x_2) \cos(x_3) + u_3 \sin(x_3) - \\
 &\quad - \cos(x_2) \cos(x_3) \sin(x_{10}) + \sin(x_2) \cos(x_3) \cos(x_{10}) \cos(x_{11}) + \\
 &\quad + \sin(x_3) \cos(x_{10}) \sin(x_{11})); \\
 \dot{x}_2(t) &= x_6 + \tan(x_3)(x_5 \sin(x_2) - x_4 \cos(x_2)) + \\
 &\quad + \frac{g}{x_1 \cos(x_3)} (\cos(x_2) \cos(x_{10}) \cos(x_{11}) - \\
 &\quad - u_1 \sin(x_2) - u_2 \cos(x_2) + \sin(x_2) \sin(x_{10})); \\
 \dot{x}_3(t) &= \frac{g}{x_1} ((u_3 + \cos(x_{10}) \sin(x_{11})) \cos(x_3) + (\cos(x_2) \sin(x_{10}) - \\
 &\quad - u_1 \cos(x_2) + u_2 \sin(x_2) - \sin(x_3) \cos(x_{10}) \sin(x_{11})) \sin(x_3)) + \\
 &\quad + x_4 \sin(x_2) + x_5 \cos(x_2)); \\
 \dot{x}_4(t) &= a_1 x_5 x_6 + a_2 u_4; \\
 \dot{x}_5(t) &= a_3 x_4 x_6 + a_4 u_5; \\
 \dot{x}_6(t) &= a_5 x_4 x_5 + a_6 u_6; \\
 \dot{x}_7(t) &= x_1 (\cos(x_3) (\cos(x_2) \cos(x_{10}) \cos(x_{12}) - \sin(x_2) (\sin(x_{11}) \sin(x_{12}) - \\
 &\quad - \sin(x_{10}) \cos(x_{11}) \cos(x_{12}))) + \sin(x_3) (\cos(x_{11}) \sin(x_{12}) + \\
 &\quad + \sin(x_{10}) \sin(x_{11}) \cos(x_{12}))); \\
 \dot{x}_8(t) &= x_1 (\cos(x_3) (\cos(x_2) \sin(x_{10}) - \sin(x_2) \cos(x_{10}) \cos(x_{11})) - \\
 &\quad - \sin(x_3) \cos(x_{10}) \sin(x_{11})); \\
 \dot{x}_9(t) &= x_1 (\cos(x_3) (-\cos(x_2) \cos(x_{10}) \sin(x_{12}) - \sin(x_2) (\sin(x_{11}) \cos(x_{12}) + \\
 &\quad + \sin(x_{10}) \cos(x_{11}) \cos(x_{12}))) + \sin(x_3) (\cos(x_{11}) \cos(x_{12}) - \\
 &\quad - \sin(x_{10}) \sin(x_{11}) \sin(x_{12}))); \\
 \dot{x}_{10}(t) &= x_5 \sin(x_{11}) + x_6 \cos(x_{11}); \\
 \dot{x}_{11}(t) &= x_4 - x_5 \tan(x_{10}) \cos(x_{11}) + x_6 \tan(x_{10}) \sin(x_{11}); \\
 \dot{x}_{12}(t) &= \frac{x_5 \cos(x_{11})}{\cos(x_{10})} - \frac{x_6 \sin(x_{11})}{\cos(x_{10})},
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $x_1 = V$  – вектор линейной скорости;  $x_2 = \alpha$  – угол атаки;  $x_3 = \beta$  – угол скольжения;  $x_4 = \omega_x$ ,  $x_5 = \omega_y$ ,  $x_6 = \omega_z$  – проекции вектора угловой скорости на оси связанной системы координат;  $x_7 = X$ ,  $x_8 = Y$ ,  $x_9 = Z$  – координаты центра масс БЛА в земной системе координат;  $x_{10} = \vartheta$ ,  $x_{11} = \gamma$ ,  $x_{12} = \psi$  – углы тангажа, крена и рыскания, соответственно;  $u_1 = n_x = F_x / G$ ,  $u_2 = n_y = F_y / G$ ,  $u_3 = n_z = F_z / G$  – продольная, нормальная и боковая перегрузки в связанной сис-

теме координат;  $u_4 = M_x$ ,  $u_5 = M_y$ ,  $u_6 = M_z$  – проекции результирующего вектора моментов сил на оси связанной системы координат (техническая система единиц);  $a_1 = (J_y - J_z)/J_x$ ,  $a_2 = 1/J_x$ ,  $a_3 = (J_z - J_x)/J_y$ ,  $a_4 = 1/J_y$ ,  $a_5 = (J_x - J_y)/J_z$ ,  $a_6 = 1/J_z$ ;  $J_x, J_y, J_z$  – моменты инерции (техническая система единиц);  $G$  – вес аппарата;  $g$  – ускорение свободного падения.

**2. Синергетический синтез законов векторного управления БЛА.** Динамика БЛА описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений 12-го порядка (1). Все переменные состояния в модели измеряемые, так как с помощью современных средств авионики можно получить текущие значения практически всех координат. Искомый вектор управления содержит шесть компонент, которые входят линейно в первые шесть уравнений системы (1). Требуется найти в аналитической форме вектор управлений  $U$ , обеспечивающий перевод объекта (1) из произвольного начального состояния в области допустимых значений фазовых координат на пересечение введенных притягивающих инвариантных многообразий, а затем в заданное состояние, определяемое следующими целями:

- ◆ стабилизация БЛА в горизонтальном положении с заданными углами атаки и скольжения;
- ◆ движение БЛА с заданной воздушной скоростью и высотой.

Для синтеза вектора управляющих воздействий применяем метод аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР) [1, 2, 4, 5]. Согласно данному методу, введем первую совокупность макропеременных в следующем виде:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= x_1 - x_1^*; & \psi_4 &= x_4 - \varphi_4; \\ \psi_2 &= x_2 - x_2^*; & \psi_5 &= x_5 - \varphi_5; \\ \psi_3 &= x_3 - x_3^*; & \psi_6 &= x_6 - \varphi_6, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $x_1^*, x_2^*, x_3^*$  – заданные технологические инварианты – желаемые значения воздушной скорости, углов атаки и скольжения, соответственно;  $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$  – некоторые неизвестные функции – "внутренние" управления, которые определяются в ходе дальнейшей процедуры синтеза.

Введенные макропеременные должны удовлетворять системе функциональных уравнений

$$T_m \dot{\psi}_m(t) + \psi_m = 0, \quad m = 1, 2, \dots, 6, \quad (3)$$

где  $T_m$  – постоянные времени, влияющие на качество динамики процессов в замкнутой системе.  $T_m > 0$  – условие асимптотической устойчивости в целом уравнений (3) относительно многообразий  $\psi_m = 0$ .

На пересечении инвариантных многообразий  $\psi_m = 0, m = 1, 2, \dots, 6$  реализуются динамические связи

$$\begin{aligned} x_1 - x_1^* &= 0; & x_4 - \varphi_4 &= 0; \\ x_2 - x_2^* &= 0; & x_5 - \varphi_5 &= 0; \\ x_3 - x_3^* &= 0; & x_6 - \varphi_6 &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

и наблюдается эффект динамического "сжатия" фазового пространства, когда размерность движения изображающей точки системы (1) понизится с 12 до 6. Соответствующие уравнения декомпозированной системы примут вид:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_7(t) &= x_1^* (\cos(x_3^*) (\cos(x_2^*) \cos(x_{10}) \cos(x_{12}) - \sin(x_2^*) (\sin(x_{11}) \sin(x_{12}) - \\
 &\quad - \sin(x_{10}) \cos(x_{11}) \cos(x_{12}))) + \sin(x_3^*) (\cos(x_{11}) \sin(x_{12}) + \\
 &\quad + \sin(x_{10}) \sin(x_{11}) \cos(x_{12}))); \\
 \dot{x}_8(t) &= x_1^* (\cos(x_3^*) (\cos(x_2^*) \sin(x_{10}) - \sin(x_2^*) \cos(x_{10}) \cos(x_{11})) - \\
 &\quad - \sin(x_3^*) \cos(x_{10}) \sin(x_{11})); \\
 \dot{x}_9(t) &= x_1^* (\cos(x_3^*) (-\cos(x_2^*) \cos(x_{10}) \sin(x_{12}) - \sin(x_2^*) (\sin(x_{11}) \cos(x_{12}) + \\
 &\quad + \sin(x_{10}) \cos(x_{11}) \cos(x_{12}))) + \sin(x_3^*) (\cos(x_{11}) \cos(x_{12}) - \\
 &\quad - \sin(x_{10}) \sin(x_{11}) \sin(x_{12}))); \\
 \dot{x}_{10}(t) &= \varphi_5 \sin(x_{11}) + \varphi_6 \cos(x_{11}); \\
 \dot{x}_{11}(t) &= \varphi_4 - \varphi_5 \tan(x_{10}) \cos(x_{11}) + \varphi_6 \tan(x_{10}) \sin(x_{11}); \\
 \dot{x}_{12}(t) &= \frac{\varphi_5 \cos(x_{11})}{\cos(x_{10})} - \frac{\varphi_6 \sin(x_{11})}{\cos(x_{10})}, \tag{5}
 \end{aligned}$$

Для декомпозированной системы (5) вводим вторую совокупность макропеременных:

$$\begin{aligned}
 \psi_{10} &= x_1^* (\cos(x_3^*) (\cos(x_2^*) \sin(x_{10}) - \sin(x_2^*) \cos(x_{10}) \cos(x_{11})) - \\
 &\quad - \sin(x_3^*) \cos(x_{10}) \sin(x_{11})) + x_8 - x_8^*; \\
 \psi_{11} &= x_{11} - x_{11}^*; \\
 \psi_{12} &= x_{12} - x_{12}^*.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Макропеременная  $\psi_{10}$  выбрана таким образом, чтобы на многообразии  $\psi_{10} = 0$  реализовывалось достижение требуемой высоты полета  $H = x_8^*$ , одной из поставленных целей управления. На многообразиях  $\psi_{11} = 0$  и  $\psi_{12} = 0$  обеспечивается достижение углов крена и рыскания, задаваемых из условия горизонтального полета.

Совместное аналитическое решение уравнений

$$T_k \dot{\psi}_k(t) + \psi_k = 0, \quad k = 10, 11, 12 \tag{7}$$

позволяет найти выражения для "внутренних" управлений  $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$  в виде функций от переменных состояния системы:

$$\varphi_4 = -\frac{(x_{12} - x_{12}^*)}{T_{12}} \sin(x_{10}) - \frac{(x_{11} - x_{11}^*)}{T_{11}};$$

$$\begin{aligned}
\varphi_5 = & \frac{1}{A} \left( -\frac{(x_{12} - x_{12}^*)}{T_{12}} (\sin(x_{10}) \cos(x_{10}) \cos^2(x_{11}) \sin(x_2^*) \cos(x_3^*) + \right. \\
& + \sin(x_{10}) \cos(x_{10}) \sin(x_{11}) \cos(x_{11}) \sin(x_3^*) + \\
& + \cos^2(x_{10}) \cos(x_{11}) \cos(x_2^*) \cos(x_3^*)) - \\
& - \frac{(x_{11} - x_{11}^*)}{T_{11}} (\cos(x_{10}) \cos^2(x_{11}) \sin(x_2^*) \cos(x_3^*) + \\
& + \cos(x_{10}) \sin(x_{11}) \cos(x_{11}) \sin(x_3^*) - \\
& - \cos(x_{10}) \sin(x_2^*) \cos(x_3^*)) - \frac{(x_8 - x_8^*)}{T_{10} x_1^*} \sin(x_{11}) + \\
& + \left( \frac{1}{T_{10}} + 1 \right) (\cos(x_{10}) \sin(x_{11}) \cos(x_{11}) \sin(x_2^*) \cos(x_3^*) - \\
& - \sin(x_{10}) \sin(x_{11}) \cos(x_2^*) \cos(x_3^*) + \cos(x_{10}) \sin^2(x_{11}) \sin(x_3^*)) \Big); \\
\varphi_6 = & \frac{1}{A} \left( \frac{(x_{12} - x_{12}^*)}{T_{12}} (\sin(x_{10}) \cos(x_{10}) \sin(x_{11}) \cos(x_{11}) \sin(x_2^*) \cos(x_3^*) + \right. \\
& + \sin(x_{10}) \cos(x_{10}) \sin^2(x_{11}) \sin(x_3^*) + \cos^2(x_{10}) \sin(x_{11}) \cos(x_2^*) \cos(x_3^*)) + \\
& + \frac{(x_{11} - x_{11}^*)}{T_{11}} (\cos(x_{10}) \sin(x_{11}) \cos(x_{11}) \sin(x_2^*) \cos(x_3^*) - \\
& - \cos(x_{10}) \cos^2(x_{11}) \sin(x_3^*)) - \frac{(x_8 - x_8^*)}{T_{10} x_1^*} \cos(x_{11}) + \\
& + \left( \frac{1}{T_{10}} + 1 \right) (\cos(x_{10}) \cos^2(x_{11}) \sin(x_2^*) \cos(x_3^*) - \\
& - \sin(x_{10}) \cos(x_{11}) \cos(x_2^*) \cos(x_3^*) + \cos(x_{10}) \sin(x_{11}) \cos(x_{11}) \sin(x_3^*)) \Big),
\end{aligned}$$

где обозначено:

$$\begin{aligned}
A = & \cos(x_{10}) \cos(x_2^*) \cos(x_3^*) + \sin(x_{10}) \cos(x_{11}) \sin(x_2^*) \cos(x_3^*) + \\
& + \sin(x_{10}) \sin(x_{11}) \sin(x_3^*).
\end{aligned}$$

Для того чтобы найти внешние управления, необходимо совместно решить систему функциональных уравнений (3) с учетом полученных выражений для  $\varphi_i$  (8). Таким образом, в результате процедуры синтеза методом АКАР, получаем искомый вектор управляющих воздействий, зависящий от переменных состояния системы, постоянных времени и заданных инвариантов, который обеспечивает желаемое движение замкнутой системы "объект-регулятор". Составляющие этого вектора управляющих воздействий имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{1}{g} \left[ -\frac{1}{T_1} \cos(x_2) \cos(x_3) (x_1 - x_1^*) + \frac{1}{T_2} \sin(x_2) \cos(x_3) (x_2 - x_2^*) x_1 + \right. \\
 &\quad + \frac{1}{T_3} \cos(x_2) \sin(x_3) (x_3 - x_3^*) x_1 + \sin(x_3) x_1 x_5 + \sin(x_2) \cos(x_3) x_1 x_6 + \\
 &\quad \left. + g \sin(x_{10}) \right]; \\
 u_2 &= \frac{1}{g} \left[ \frac{1}{T_1} \sin(x_2) \cos(x_3) (x_1 - x_1^*) + \frac{1}{T_2} \cos(x_2) \cos(x_3) (x_2 - x_2^*) x_1 - \right. \\
 &\quad - \frac{1}{T_3} \sin(x_2) \sin(x_3) (x_3 - x_3^*) x_1 - \sin(x_3) x_1 x_4 + \cos(x_2) \cos(x_3) x_1 x_6 + \\
 &\quad \left. + g \cos(x_{10}) \cos(x_{11}) \right]; \\
 u_3 &= -\frac{1}{g} \left[ \frac{1}{T_1} \sin(x_3) (x_1 - x_1^*) + \frac{1}{T_3} \cos(x_3) (x_3 - x_3^*) x_1 + \right. \\
 &\quad \left. + \sin(x_2) \cos(x_3) x_1 x_4 + \cos(x_2) \cos(x_3) x_1 x_5 + g \cos(x_{10}) \sin(x_{11}) \right]; \\
 u_4 &= \frac{1}{a_2} \left( \sum_{i=1}^{12} \frac{\partial \varphi_4}{\partial x_i} \dot{x}_i - \frac{x_4 - \varphi_4}{T_4} - a_1 x_5 x_6 \right); \\
 u_5 &= \frac{1}{a_4} \left( \sum_{i=1}^{12} \frac{\partial \varphi_5}{\partial x_i} \dot{x}_i - \frac{x_5 - \varphi_5}{T_5} - a_3 x_4 x_6 \right); \\
 u_6 &= \frac{1}{a_6} \left( \sum_{i=1}^{12} \frac{\partial \varphi_6}{\partial x_i} \dot{x}_i - \frac{x_6 - \varphi_6}{T_6} - a_5 x_4 x_5 \right).
 \end{aligned}$$

**3. Результаты моделирования.** На основе полученных законов управления было выполнено моделирование замкнутой системы с использованием параметров амфибийного БЛА. Моменты инерции:  $J_x = 200$ ,  $J_y = 540$ ,  $J_z = 450$  [кг·м·с<sup>2</sup>]. Параметры регулятора:  $T_1 = T_3 = 5$ ,  $T_2 = 6$ ,  $T_4 = 3,5$ ,  $T_5 = T_6 = 10$ ,  $T_{10} = 5$ ,  $T_{11} = 1$ ,  $T_{12} = 2$ . Инварианты движения: воздушная скорость  $V = x_1^* = 50$  м/с; угол атаки  $\alpha = x_2^* = 2^\circ$ ; угол скольжения  $\beta = x_3^* = 0$ ; высота полета  $H = x_8^* = 200$  м; углы крена и рыскания  $x_{11}^* = x_{12}^* = 0^\circ$ .

На рис. 1–10 представлены переходные процессы изменения координат замкнутой системы, а также переходные процессы относительно управляющих воздействий.

На рис. 11–12 представлены фазовые портреты проекций фазовых траекторий изображающей точки системы на плоскости, образованные некоторыми координатами состояния, входящими в модель объекта. Фазовые траектории стягиваются в точку к желаемому значению координат.

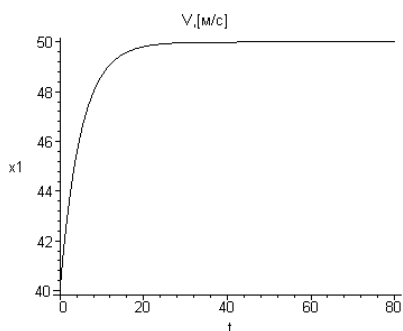


Рис. 1. Изменение линейной скорости полета

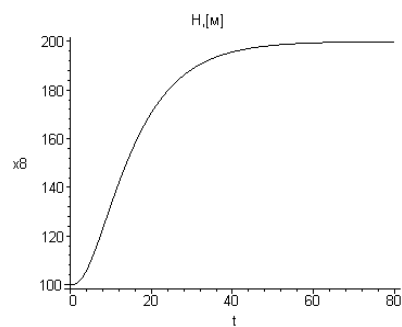


Рис. 2. Изменение высоты полета

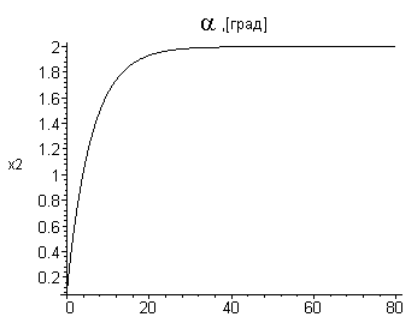


Рис. 3. Изменение угла атаки

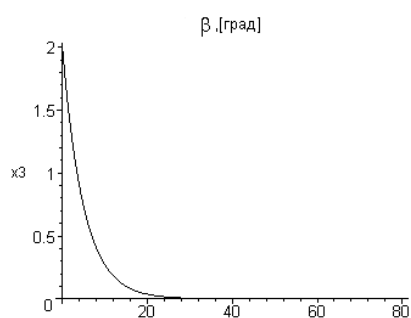


Рис. 4. Изменение угла скольжения

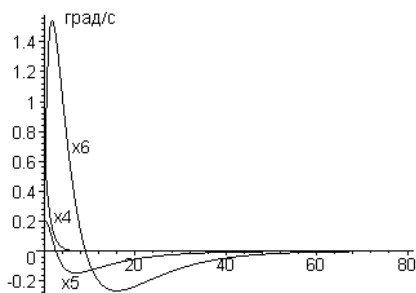


Рис. 5. Изменение составляющих угловой скорости

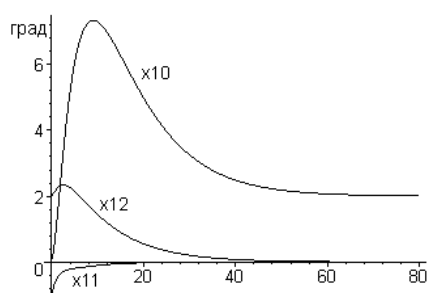


Рис. 6. Изменение углов тангажа, крена и рыскания

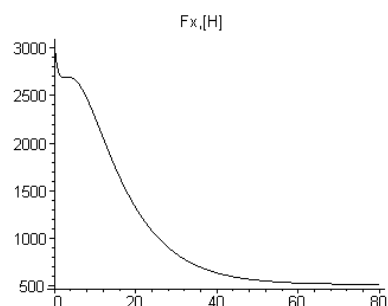


Рис. 7. Переходной процесс относительно управления  $u_1$ ,  $F_x = G \cdot u_1$ .

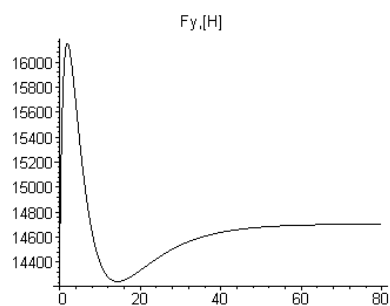


Рис. 8. Переходной процесс относительно управления  $u_2$ ,  $F_y = G \cdot u_2$ .

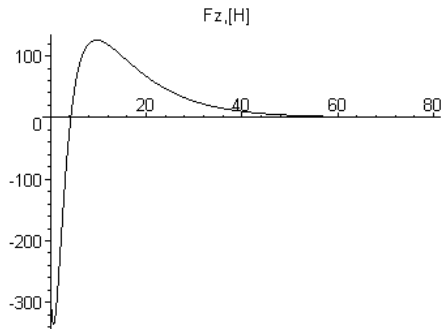


Рис. 9. Переходный процесс относительно управления  $u_3$ ,  $Fz = G \cdot u_3$ .

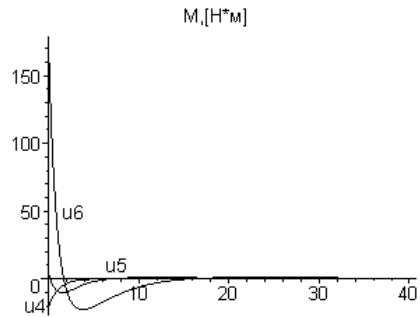


Рис. 10. Переходные процессы относительно управлений  $u_4, u_5, u_6$ .

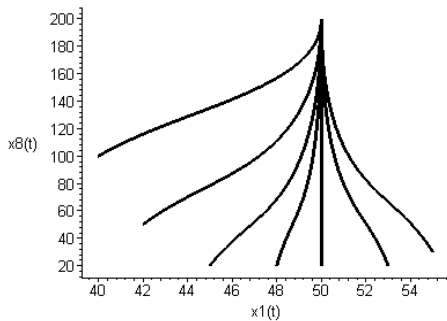


Рис. 11. Проекция фазовых траекторий на плоскость  $x_8x_1$  (инварианты:  $x_8^* = 200 \text{ } \dot{\text{л}}$ ,  $x_1^* = 50 \text{ } \dot{\text{л}} / \dot{\text{л}}$ ).

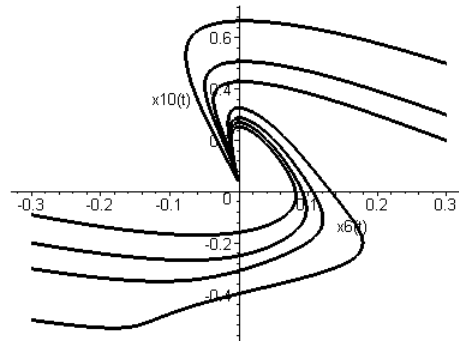


Рис. 12. Проекция фазовых траекторий на плоскость  $x_{10}x_6$  (инварианты:  $x_{10}^* = 2^\circ$ ,  $x_6^* = 0^\circ / \dot{\text{л}}$ ).

**Заключение.** Результаты моделирования показывают, что найденные законы управления обеспечивают асимптотическую устойчивость замкнутой нелинейной системы и реализуют поставленные цели управления. Продемонстрировано точное выполнение заданных технологических инвариантов. Полученные результаты позволяют выполнить анализ движения беспилотного летательного аппарата в рассматриваемом режиме полета с учетом использования нелинейного синергетического закона управления.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Колесников А.А. Синергетическая теория управления. – М.: Энергоатомиздат, 1994. – 344 с.
2. Колесников А.А. Синергетическая концепция системного синтеза: единство процессов самоорганизации и управления // Известия ТРТУ. – 2006. – № 6 (61). – С. 10-38.
3. Бюшгенс Г.С., Студнев Р.В. Аэродинамика самолета: Динамика продольного и бокового движения. – М.: Машиностроение, 1979. – 352 с.
4. Колесников А.А., Кобзев В.А. Динамика полета и управление: синергетический подход. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2009. – 198 с.
5. Колесников А.А., Кобзев В.А., Нгуен Ф. Синергетический синтез интеллектуальных систем управления движением самолетов-амфибий // Труды Конгресса по интеллектуальным системам и информационным технологиям «AIS-IT'10»: В 4 т. – М.: Физматлит, 2010. – Т. 2. – С. 99-118.



Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор В.Л. Заковоротный.

**Фоменко Андрей Александрович**

Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: fomenko.and@gmail.com.

347900, г. Таганрог, ул. Чехова, 2.

Тел.: 88634390937; +79185043846.

Кафедр синергетики и процессов управления; аспирант.

**Fomenko Andrey Alexandrovich**

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: fomenko.and@gmail.com.

2, Checkhov Street, Taganrog, 347928, Russia.

Phones: +78634390937; +79185043846.

The Department of Synergetics and Control; Postgraduate Student.