Веселов Геннадий Евгеньевич
Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.
E-mail: deanfib@tti.sfedu.ru.
347900, г. Таганрог, ул. Чехова, 2.
Тел.: 88634360450.
Факультет информационной безопасности; декан.

Никифоров Арсений Михайлович
E-mail: nikiforovwork@mail.ru.
Тел.: 88634318090.
Кафедра синергетики и процессов управления; студент.

Veselov Gennady Evgen'evich
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education "Southern Federal University".
E-mail: deanfib@tti.sfedu.ru.
2, Chexova Street, Taganrog, 347900, Russia.
Phone: +78634360450.
College of Informational Security; Dean.

Nikiforov Arseniy Mixajlovich
E-mail: nikiforovwork@mail.ru.
Phone: +78634318090.
The Department of Synergetics and Control; Student.

УДК 681.51

Ал.А. Колесников

МЕТОД СИНЕРГЕТИЧЕСКОГО СИНТЕЗА СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ «ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА НА ПОДВИЖНОЙ ТЕЛЕЖКЕ»

В докладе в полной нелинейной постановке решена известная своей сложностью проблема стабилизации «перевернутого маятника на подвижной тележке». Методом аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР) синтезированы законы управления движением тележки, обеспечивающие стабилизацию или автоколебания маятника с максимальным отклонением ($\pm 0{,}5\pi$) от верхнего неустойчивого положения. Рассматриваемая двухмассовая модель «перевернутый маятник на подвижной тележке» отражает поведение различных реальных механических систем – от ориентации космических аппаратов до поведения манипуляционных роботов и маятниковых транспортных систем. В литературе уделяется важное внимание проблеме управления такого рода механическими системами, что и указывает на существенную прикладную значимость предложенного в докладе эффективного решения этой проблемы теории управления.

«Перевернутый маятник на подвижной тележке»; инвариантное многообразие; синтез; законы управления.

Al.A. Kolesnikov

METHOD OF SYNERGETICS SYNTHESIS OF "INVERTED PENDULUM ON MOBILE CART" OSCILLATION CONTROL SYSTEM

In the report we solve nonlinear complex problem of stabilization of "inverted pendulum on mobile cart". By using method of analytical design of aggregated regulators (ADAR) we have designed control laws for cart movement providing pendulum stabilization or self-oscillation with max.

amplitude of ($\pm 0,5\pi$) from top unstable position. The explored double-mass model of "inverted pendulum on mobile cart" reflects behavior of various mechanical systems, including orientation of space vehicle and movement of manipulated robots and pendulum transport systems. Other authors attend problem of such mechanical systems control. This proves the essential applied significance for proposed in the report the effective solution of this problem of control theory.

Inverted pendulum on mobile cart; invariant manifold; synthesis; control law.

Введение. В современной нелинейной динамике к числу фундаментальных относится сложная проблема управления колебательными процессами в системах самой разнообразной природы. В зарубежной и российской научно-технической литературе публикуются десятки статей и многие монографии, а также проводятся крупные международные конференции и симпозиумы, посвященные проблеме изучения регулярных и хаотических колебаний [1–4] и др. Эта проблема стала одним из источников развития синергетики – науки о процессах самоорганизации в сложных системах. Некоторые российские авторы к одной из ветвей и даже предтечий синергетики относят известную горьковскую школу автоколебаний [4–7], развивающую традиции Л.И. Мандельштама и А.А. Андронова. В работах этой школы идеология теории нелинейных колебаний переносится на широкий круг физических явлений. Авторы сборника [8] отмечают: «В нашей стране школой Л.И. Мандельштама был создан междисциплинарный подход, развиваемый как теория колебаний. В рамках этой теории были разработаны основные механизмы организации, которые теперь органически влились в современное, более широкое представление о различных типах организации в природе. И именно эти работы следовало бы назвать предшествующими новому подходу к теории качественных переходов – синергетике».

Поток публикаций по проблеме управления колебаниями непрерывно растет. Основное внимание продолжает уделяться колебательным системам маятникового типа. При этом наибольший интерес продолжает вызывать известная нелинейная проблема управления «перевернутым маятником» в верхнем неустойчивом состоянии, а также проблема управления «перевернутым маятником на подвижной тележке». Решение этих проблем стало своего рода тестом на эффективность применения того или иного метода управления. Первая из этих проблем в полной мере решена в работе [9]. В этом докладе решается проблема управления «перевернутым маятником на подвижной тележке».

Более 30 лет в мировой литературе по теории нелинейных колебаний и системам управления рассматривается модель «перевернутого маятника на тележке» (inverted pendulum) [10–15]. Дело в том, что эта двухмассовая модель в определенной мере отражает разнообразные реальные механические системы – от ориентации космических аппаратов до поведения различных манипуляционных роботов и маятниковых, например транспортных, систем. Эта модель из-за своих отличительных динамических особенностей стала своего рода «пробным камнем», тестом на эффективность для методов теории управления – от классических линейных методов, опиравшихся в основном на ПИД-регуляторы, до современных методов, базирующихся на технологии FNN – *Fuzzy Neural Networks* с использованием некоторой комбинации нечеткого регулятора совместно с ПИД-регулятором [11–13]. Следует отметить, что в большинстве работ, за исключением [14, 15], рассматриваются линеаризованные модели перевернутого маятника и тележки, что, разумеется, существенно ограничивает динамические свойства соответствующих систем управления положением маятника и тележки. Так, максимальный угол отклонения маятника от вертикального неустойчивого положения обычно не превышал 20–30°.

1. Синтез законов управления. Возникает достаточно сложная задача управления полной нелинейной моделью «маятника на управляемой тележке» с достижением предельно допустимых углов отклонения маятника от верхнего неустойчивого положения с учетом ограничений на положение тележки, величину управляющей силы и др. Для решения указанной задачи применим метод аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР) [16–18].

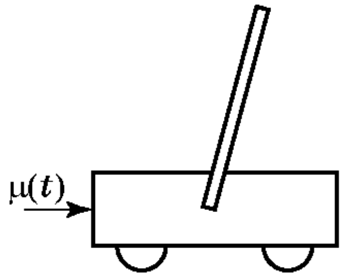

Рис. 1. Система «перевернутый маятник на тележке»

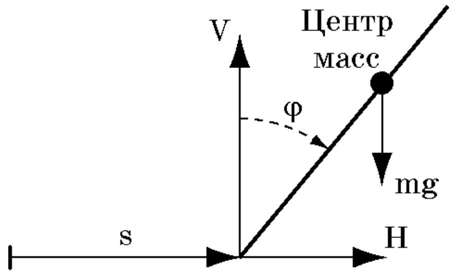

Рис. 2. Кинематическая схема

Рассмотрим перевернутый маятник, ось которого укреплена на тележке (рис. 1,2). Тележка приводится в движение силой $\mu(t)$, являющейся управляющим воздействием системы. На основании анализа сил и перемещений можно получить нелинейную математическую модель системы:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_3; \\ \dot{x}_2(t) &= x_4; \\ \dot{x}_3(t) &= u; \\ \dot{x}_4(t) &= \frac{g}{L'}\sin(x_2) - \frac{1}{L'}\cos(x_2)\cdot u. \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь $x_1 = s$ – горизонтальное перемещение тележки; $x_2 = \varphi$ – угловое отклонение маятника от вертикального положения; $x_3 = \dot{s}(t)$, $x_4 = \varphi(t)$; m, L – масса маятника и расстояние между осью и центром тяжести; J – момент инерции относительно центра тяжести; M – масса тележки; $L' = \dfrac{J + mL^2}{mL}$ – эффективная длина маятника;

$$u = \frac{1}{M + m - \dfrac{mL\cos^2(x_2)}{L'}} \times \left(\mu - D_s x_3 - \frac{mLg\sin(2x_2)}{2L'} + mLx_4^2\sin(x_2)\right). \qquad (2)$$

Нелинейные дифференциальные уравнения (1), (2) описывают поведение системы «перевернутый маятник – управляемая тележка». Из этих уравнений следует, что одно и то же управление $u(t)$ приложено к разным каналам системы, разделенным динамическими звеньями. В линейной теории управления это приводит к проблеме минимально-фазовости, что, как известно из условий общности положения принципа максимума, ограничивает управляемость системы. Именно это свойство явилось, на наш взгляд, причиной многолетних недостаточно успешных попыток решить задачу синтеза эффективных законов управления верхним положением маятника путем воздействия на положение тележки.

Возникает идея поиска такого нелинейного преобразования координат, которое позволило бы расширить допустимый диапазон отклонения угла x_2 до предельного: $-0{,}5\pi < x_2 < 0{,}5\pi$ и, кроме того, чтобы на положение каретки x_1 ограничений не накладывалось. Это исчерпывающим образом решает поставленную задачу управления системой «перевернутый маятник на тележке». Перейдем к рассмотрению такого преобразования координат.

Рассмотрим важную самостоятельную задачу выбора макропеременной. Введем некоторую макропеременную в следующем виде:

$$\psi = x_1 + F(x_2) + \xi \int F(x_2)\,dt\,, \tag{3}$$

продифференцировав которую дважды по времени, получим:

$$\dot{\psi}(t) = \dot{x}_1(t) + \frac{\partial F}{\partial x_2}\dot{x}_2(t) + \xi F(x_2)$$

и

$$\ddot{\psi}(t) = \ddot{x}_1(t) + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}\dot{x}_2^2(t) + \frac{\partial F}{\partial x_2}\ddot{x}_2(t) + \xi\frac{\partial F}{\partial x_2}\dot{x}_2(t).$$

Подставив $\ddot{x}_1(t)$ и $\ddot{x}_2(t)$ из (1) в $\ddot{\psi}(t)$, найдем выражение

$$\ddot{\psi}(t) = \left(1 - \frac{1}{L'}\frac{\partial F}{\partial x_2}\cos x_2\right)u + \frac{g}{L'}\frac{\partial F}{\partial x_2}\sin x_2 + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}\dot{x}_2^2(t) + \xi\frac{\partial F}{\partial x_2}\dot{x}_2(t).$$

Очевидно, чтобы избавиться от функции $\cos x_2$ в первом члене этого выражения, необходимо положить

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{\rho}{\cos x_2}.$$

Откуда следует искомая функция преобразования

$$F = -\rho \ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x_2}{2}\right)\right|.$$

С учетом этого преобразования макропеременная (3) принимает вид

$$\psi = x_1 - \rho \ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x_2}{2}\right)\right| - \gamma \int \ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x_2}{2}\right)\right| dt, \tag{4}$$

где $\gamma = -\rho\xi$. Тогда, дифференцируя (4), получим

$$\dot{\psi}(t) = \dot{x}_1(t) + \frac{\rho\,\dot{x}_2(t)}{\cos x_2} - \gamma \ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x_2}{2}\right)\right|. \tag{5}$$

Дифференцируя (5), находим

$$\ddot{\psi}(t) = \ddot{x}_1(t) + \frac{\rho}{\cos x_2}\ddot{x}_2(t) + \frac{\rho\,\dot{x}_2^2(t)}{\cos x_2} tg x_2 + \frac{\gamma\,\dot{x}_2(t)}{\cos x_2}. \tag{6}$$

Подставим вторые производные координат $\ddot{x}_1(t)$ и $\ddot{x}_2(t)$ в (6) из исходных уравнений (1), т.е.

$$\ddot{x}_1(t) = u\,; \tag{7}$$

$$\ddot{x}_2(t) = \frac{g}{L'}\sin x_2 - \frac{1}{L'}\cos(x_2)u\,. \tag{8}$$

В результате, подставляя (7) и (8) в (6), имеем:

$$\ddot{\psi}(t) = Bu + \frac{\rho\, g}{L'}tgx_2 + \frac{\rho\, \dot{x}_2^2(t)}{\cos x_2}tgx_2 + \frac{\gamma\, \dot{x}_2(t)}{\cos x_2}, \tag{9}$$

где $B = 1 - \frac{\rho}{L'}$. Образуем теперь, согласно методу АКАР, функциональное уравнение

$$\ddot{\psi}(t) + \alpha_1\dot{\psi}(t) + \alpha_2\psi = 0, \quad \alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0\,. \tag{10}$$

Подставив $\ddot{\psi}(t)$ (9) в (10), найдем управление

$$u = -\frac{\rho\, g}{BL'}tgx_2 - \frac{\rho\, \dot{x}_2^2(t)}{B\cos x_2}tgx_2 - \frac{\gamma\, \dot{x}_2(t)}{B\cos x_2} - \frac{\alpha_1}{B}\dot{\psi}(t) - \frac{\alpha_2}{B}\psi. \tag{11}$$

В соответствии с методом АКАР, управление u (11) переводит систему (7), (8) на многообразия $\psi = 0$ (4) и $\dot{\psi}(t) = 0$ (5) из произвольных начальных условий. Движение координаты x_2 на многообразиях $\psi = \dot{\psi}(t) = 0$ описывается уравнениями (8), (11), т.е.

$$\ddot{x}_{2\psi}(t) = \frac{g}{L'}\sin x_{2\psi} + \frac{\rho\, g}{B(L')^2}\sin x_{2\psi} + \frac{\rho}{BL'}\dot{x}_{2\psi}^2(t)tgx_{2\psi} + \frac{\gamma}{BL'}\dot{x}_{2\psi}(t). \tag{12}$$

Для устойчивости решений уравнения (12) положим $B = -\lambda < 0$, тогда

$$\rho = (\lambda + 1)L', \quad \frac{\rho\, g}{B(L')^2} = -\frac{(1+\lambda)}{\lambda L'}g, \quad \frac{\rho}{BL'} = -\frac{1+\lambda}{\lambda}. \tag{13}$$

С учетом (13) уравнение (12) принимает вид

$$\ddot{x}_{2\psi}(t) + a_1\sin x_{2\psi} + a_2\dot{x}_{2\psi}^2(t)tgx_{2\psi} + a_3\dot{x}_{2\psi}(t) = 0\,, \tag{14}$$

где

$$a_1 = \frac{g}{\lambda L'},\ a_2 = \frac{(1+\lambda)}{\lambda},\ a_3 = \frac{\gamma}{\lambda L'}. \tag{15}$$

Уравнение (14) при $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$ является асимптотически устойчивым относительно $x_{2\psi} = 0$, в диапазоне $-0{,}5\pi < x_{2\psi} < 0{,}5\pi$. В зависимости от величин коэффициентов a_1, a_2, a_3 уравнение (14) может иметь различный характер переходных процессов, на который наибольшее влияние оказывает коэффициент γ (15).

Запишем закон управления (11), используя обозначения (13), в следующей форме:

$$u = -\frac{(1+\lambda)g}{\lambda}tgx_2 + \frac{(1+\lambda)L'}{\lambda}\frac{\dot{x}_2^2(t)}{\cos x_2}tgx_2 + \frac{\gamma}{\lambda}\frac{\dot{x}_2(t)}{\cos x_2} + \frac{\alpha_1}{\lambda}\dot{\psi}(t) + \frac{\alpha_2}{\lambda}\psi, \tag{16}$$

где

$$\psi = x_1 + (1+\lambda)L'\ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x_2}{2}\right)\right| - \gamma\int\ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x_2}{2}\right)\right|dt\,, \tag{17}$$

$$\dot{\psi}(t) = \dot{x}_1(t) + \frac{(1+\lambda)L'}{\cos x_2}\dot{x}_2(t) - \gamma \ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x_2}{2}\right)\right|. \tag{18}$$

Используя выражения (1) и (2), на основе (16)–(18) запишем управление:

$$\mu = D_s x_3 - mLx_4^2 \sin x_2 + \frac{mLg\sin(2x_2)}{2L'} + \left(M + m - \frac{mL\cos^2 x_2}{L'}\right) \times$$
$$\times\frac{1}{\lambda}\left[\begin{aligned}&(1+\lambda)\left(\frac{L'}{\cos x_2}x_4^2 - g\right)\mathrm{tg}\, x_2 + \frac{\gamma x_4}{\cos x_2} + \\ &+\alpha_1\left(x_2 + \frac{(1+\lambda)L'}{\cos x_2}x_4 - \gamma\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x_2}{2}\right)\right|\right) + \\ &+\alpha_2\left(x_1 + (1+\lambda)L'\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x_2}{2}\right)\right| - \gamma\int\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x_2}{2}\right)\right|dt\right)\end{aligned}\right]. \tag{19}$$

В (12) следует выбрать такие α_i, чтобы $\psi(t)$ имела желаемый характер изменения. Так, при апериодическом процессе

$$\alpha_2 = \frac{1}{T_1 T_2}, \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = T_1 + T_2, \tag{20}$$

тогда

$$\psi(t) = C_1 e^{-t/T_1} + C_2 e^{-t/T_2},$$

что обеспечивается соответствующим выбором T_1 и T_2. При отличном от (20) выборе α_1, α_2 возникает затухающий колебательный переходной процесс.

2. Результаты моделирования. На рис. 3 и 4 приведены результаты моделирования ($\alpha_1 = \alpha_2 = 1$) с законом управления (19) соответственно для подсистем маятника и тележки. На рис. 5 изображены графики переходных процессов для $x_{10} = 0{,}5$, $x_{20} = -0{,}5$.

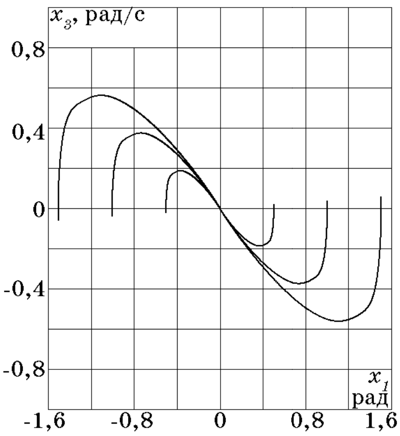

Рис. 3. Фазовый портрет подсистемы тележки

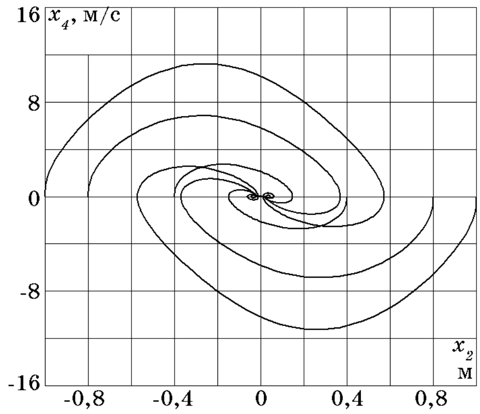

Рис. 4. Фазовый портрет подсистемы маятника

Вместо (10) можно использовать и другие уравнения, например, вида

$$\ddot{\psi}(t)-\xi\left(1-\beta\psi^2\right)\dot{\psi}(t)+\psi=0. \qquad (21)$$

Уравнение (21) является известным уравнением Ван-дер-Поля и описывает режим автоколебаний. Тогда закон управления принимает вид

$$u=\frac{(1+\lambda)g}{\lambda}tgx_2+\frac{(\lambda+1)L'}{\lambda}\frac{\dot{x}_2(t)}{\cos x_2}tgx_2+\frac{\gamma}{\lambda}\frac{\dot{x}_2(t)}{\cos x_2}+\xi\left(1-\beta\psi^2\right)\dot{\psi}(t)-\psi. \qquad (22)$$

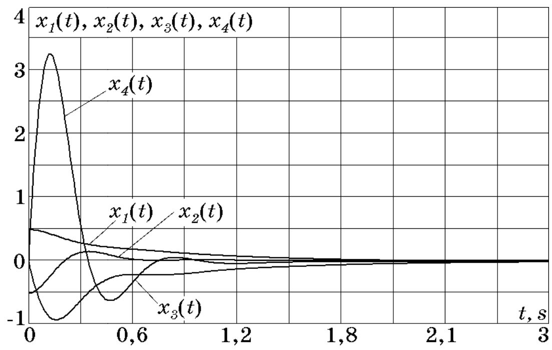

Рис. 5. Переходные процессы

На рис. 6 и 7 изображены соответствующие фазовые портреты подсистем маятника и тележки с законом управления u (22). Моделирование производилось с параметрами $L=0{,}1$, $L'=0{,}1$, $M=1$, $m=0{,}1$, $g=9{,}8$, $D_s=100$, $\gamma=1$, $\lambda=1$, $\beta=2$, $\xi=0{,}5$.

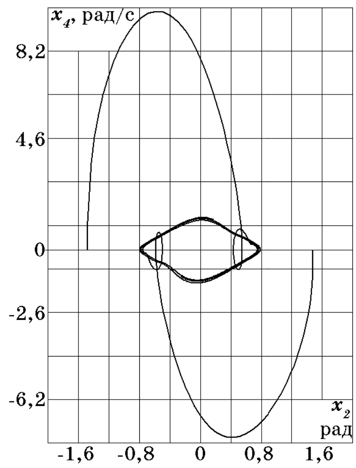

Рис. 6. Фазовый портрет подсистемы маятника

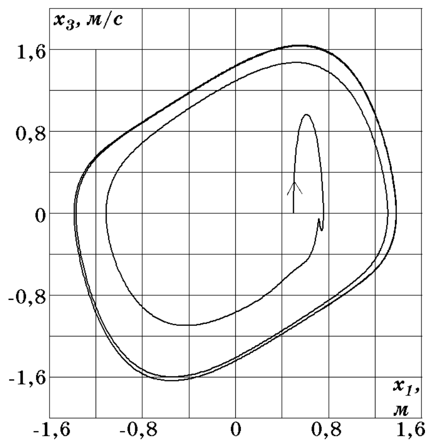

Рис 7. Фазовый портрет подсистемы тележки

Заключение. Необходимо отметить, что законы управления $\mu(x_1,...,x_4)$, получаемые в результате применения синергетических методов синтеза, физически представляют собой моменты, развиваемые электрическим двигателем перемещения тележки. Зная $\mu(x_1,...,x_4)$, нетрудно определить соответствующие законы управления напряжением на входе двигателя. Для этого следует представить

$\mu(x_1,...,x_4)$ как внутренние управления и затем на основе модели двигателя синтезировать соответствующие законы управления электроприводом тележки.

Таким образом, применение синергетического подхода к сложной задаче управления неустойчивой нелинейной двухмассовой системой «перевернутый маятник на подвижной тележке» впервые позволило исчерпывающим образом решить указанную задачу теории колебаний в полной нелинейной постановке.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Нелинейные проблемы теории колебаний и теории управления. Вибрационная механика. – СПб.: Наука, 2009.
2. Управление мехатронными вибрационными установками. – СПб.: Наука, 2001.
3. Анализ и управление нелинейными колебательными системами. – СПб.: Наука, 1998.
4. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. – М.: Наука, 1987.
5. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. – М.: Наука, 1981.
6. *Рабинович Р.С., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. – М.: Наука, 1992.
7. *Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И.* Автоструктуры. Хаотическая динамика ансамблей// Нелинейные волны. Структуры и бифуркации / Под ред. А.В. Гапонова-Грехова и М.И. Рабиновича. – М.: Наука, 1987.
8. *Валянский С.И., Илларионов С.В.* Физические основы самоорганизации // Самоорганизация и наука: опыт философского осмысления: Сб. науч. тр. – М.: Институт философии РАН, 1994.
9. *Колесников Ал.А.* Управление нелинейными колебаниями. Энергетический подход // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2009. – № 2.
10. *Квакернак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. – М.: Мир, 1977.
11. *Elgerol O.I.* Control Systems Theoy, – N. Y.: McGraw-Hill, 1967.
12. *Jang S., Araki M.* Mathematical analysis of fuzzy control systems and on possibility of industrial applications // Trans. Soc. Instrum. and Contr. Eng. – 1990. – Vol. 26. – № 11.
13. *Saito T., Togawa K.* Controls of inverted pendulum: By the technique using the analog control elements // Res. Repts Nagaoka Techn. Coll. – 1991. – Vol. 27. – № 2.
14. *Брусин В.А.* Глобальная стабилизация системы «обращенный маятник на тележке» при действии на маятник неизмеряемого возмущения // Известия РАН. Техническая кибернетика. – 1993. – № 3.
15. *Брусин В.А.* Глобальная стабилизация неустойчивой нелинейной двухмассовой системы // Известия РАН. Техническая кибернетика. – 1991. – № 4.
16. *Колесников А.А.* Синергетическая теория управления. – М.: Энергоатомиздат, 1994.
17. *Колесников А.А.* Синергетические методы управления сложными системами. Теория системного синтеза. – М.: URSS, 2006.
18. *Колесников А.А.* Прикладная синергетика: Основы системного синтеза. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2007.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор В.А. Терехов.

Колесников Александр Анатольевич
Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.
E-mail: office.ccsd@gmail.com.
347928, г. Таганрог, ул. Чехова, 2
Тел.: 88634318090.
Кафедра синергетики и процессов управления; к.т.н., доцент.

Kolesnikov Alexsandr Anatol'evich
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education "Southern Federal University".
E-mail: office.ccsd@gmail.com.
2, Checkhov Street, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: +78634318090.
The Department of Synergetics and Control; Cand. of Eng. Sc.; Associate Professor.