Раздел II. Акустические методы и приборы в медико-биологической практике

УДК 621.396

Б.А. Сальников, Е.Н. Сальникова

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СИНТЕЗА УЛЬТРАЗВУКОВЫХ АНТЕНН В КОРРЕКТНОЙ ПОСТАНОВКЕ*

Показано, что некорректность задачи синтеза заключена в её постановке. В математическом описании граничных условий для дальнего поля отсутствует информация о волновых размерах и геометрии антенны.

Синтез излучающих антенн; корректная постановка задачи; взвешенное суммирование.

B.A. Salnikov, E.N. Salnikova

THE DECISION OF TASKS OF SYNTHESIS OF ULTRASONIC ANTENNAS IN CORRECT STATEMENT

It is shown, that the incorrectness of a synthesis problem lies in its statement. In the mathematical description of boundary conditions for a distant field there is no information on the wave sizes and geometry of the antenna.

Synthesis of radiating antennas; correct statement of a task; the weighed summation.

Задача определения поля, создаваемого излучающей системой, по заданной функции возбуждения на ее поверхности, или задача анализа, относится к числу прямых задач излучения. Обратная задача – задача синтеза антенн заключается в определении по известным требованиям к диаграмме направленности (ДН) и известной геометрии излучающей (приемной) системы функции возбуждения на её поверхности. В общем случае задачи синтеза антенн относят к некорректным задачам математической физики, которые успешно решаются с использованием методов регуляризации по А.Н. Тихонову [1].

Методы регуляризации по Тихонову являются мощным инструментом при решении большинства обратных задач экспериментальной физики, и могут быть использованы при решении практически любых задач синтеза антенн. Однако применение методов регуляризации в антенном синтезе, по существу является устранением “следствия”, а не “причин”, породивших некорректность задач расчета антенн по заданным ДН.

Причины возникновения некорректности в задачах синтеза с точки зрения физического смысла задачи и формальной математики не нашли достаточно полного отражения в современной литературе по данной тематике, хотя прямая и обратная задачи антенной техники представляют собой лишь два разных подхода к

* Работа выполнена при поддержке федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» мероприятие 1.2.2. «Проведение научных исследований научными группами под руководством кандидатов наук» (Гос. контракт № 2524 от 20.11.09 г.).

одному и тому же явлению. На наш взгляд, в обратных технических задачах, к которым относятся и задачи синтеза криволинейных антенн с аналитическими поверхностями, в отличие от обратных задач экспериментальной физики, возможно избежать некорректности в постановке, если выявить причину её возникновения с наиболее полным учетом естественных предположений, отражающих физическое содержание и взаимосвязь происходящих процессов в прямых и обратных задачах. Этим проблемам применительно к ультразвуковым непрозрачным антеннам с замкнутой аналитической поверхностью посвящена данная работа.

Задачи анализа и синтеза являются граничными и решаются аналогично, если точное решение уравнения Гельмгольца получено в виде рядов по собственным функциям. Неизвестные коэффициенты общего решения определяются из граничных условий: в задачах анализа – на излучающей поверхности антенны, в задачах синтеза – в дальней зоне.

В задачах анализа (определение неизвестных коэффициентов поля давления по заданной функции возбуждения на поверхности антенны) в структуру выражений для неизвестных коэффициентов входят собственные функции уравнения Гельмгольца, аргументы которых характеризуют волновые размеры, а тип собственной функции – геометрию излучающей системы, что отвечает полному формальному соответствию физической и математической модели задачи анализа.

Иная ситуация возникает при классическом решении общей задачи синтеза. На первом этапе общее решение уравнения Гельмгольца для дальнего поля приравнивается к заданной ДН, представленной, в большинстве случаев, в виде ряда Фурье в соответствующей координатной системе. Математическое выражение определенных таким образом неизвестных коэффициентов общего решения уравнения Гельмгольца функционально не зависит ни от геометрии, ни от волнового размера антенны. Эта информация появляется лишь на втором этапе решения задачи синтеза, когда определяется непрерывная функция возбуждения на поверхности антенны заданной геометрии и волнового размера.

По существу некорректность задачи синтеза (решение для непрерывной функции возбуждения описывается в виде расходящихся рядов Фурье) заключена в её постановке. В математическом описании граничных условий для дальнего поля (заданная ДН) отсутствует информация о конфигурации и волновых размерах антенны.

Ниже приведён сравнительный анализ решения задач анализа и синтеза для цилиндрических антенн с круговым поперечным сечением радиуса r = a в цилиндрической системе координат.

Звуковое поле, создаваемое цилиндром с заданным распределением нормальной компоненты колебательной скорости на его поверхности

$$v\left(a,\varphi_0\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i\,n\,\varphi_0\right), \tag{1}$$

где φ_0 – координата, принадлежащая поверхности цилиндра, можно представить в виде ряда с неизвестными коэффициентами A_n [2]:

$$p(r,\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(kr)\exp(in\varphi), \tag{2}$$

где $H_n^{(1)}(kr)$ – цилиндрическая функция Ханкеля 1-го рода, $k = \omega/c$ – волновое число, ω – круговая частота излучения, c – скорость звука в среде распространения, A_n – неизвестные коэффициенты, требующие своего определения исходя из граничных условий:

$$v\left(a,\varphi_0\right)=\frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial\, p\left(r,\varphi\right)}{\partial\, r}\,\Big|_{r=a;\varphi\in\varphi_0}, \tag{3}$$

где ρ – плотность среды распространения ультразвука.

Подставляя (1), (2) в (3), имеем

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(in\varphi_0\right)=\frac{k}{i\omega\rho}\sum_{-\infty}^{\infty} A_n\, H_n^{(1)'}\left(ka\right)\exp\left(in\varphi_0\right), \tag{4}$$

откуда связь между неизвестными A_n и заданными a_n определится как

$$A_n=\frac{i\rho\, c a_n}{H_n^{(1)'}\left(ka\right)}\ , \tag{5}$$

а общее решение задачи анализа в виде

$$p\left(\,r,\varphi\right)=i\rho\, c\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{a_n H_n^{(1)}\left(kr\right)}{H_n^{(1)'}\left(ka\right)}\exp\left(in\,\varphi\right). \tag{6}$$

Решение задач синтеза заключается в следующем: заданной является ДН $R(\varphi)\in L_2$

$$R(\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n\exp(in\varphi)\ , \tag{7}$$

необходимо определить функцию возбуждения $v(a,\varphi_0)$ цилиндрической антенны, на поверхности которой выполняются граничные условия (3).

Используя асимптотическое разложение функции Ханкеля при $kr\to\infty$, (2) определится в виде

$$p(r,\phi)=\sqrt{\frac{2}{k\pi r}}\exp\left[i\left(kr-\pi/4\right)\right]\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(-i\pi n/2)\,A_n\exp\left(in\varphi\right)=$$

$$=Q(kr)\cdot G(\varphi), \tag{8}$$

где $Q(kr)$ – множитель цилиндрического распространения, $G(\varphi)$ – угловая зависимость поля давления в дальней зоне (ненормированная диаграмма направленности).

Решение задач синтеза выполняется в два этапа. На первом этапе $G(\varphi)$ приравнивается к заданной ДН $R(\varphi)$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-i)^n A_n\exp(in\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n\exp(in\varphi)\ , \tag{9}$$

откуда следует, что неизвестные коэффициенты A_n определяются через заданные B_n в виде

$$B_n=(i)^n A_n. \tag{10}$$

Непосредственное решение задачи синтеза выполняется на втором этапе, с учётом связи между гармониками функции возбуждения колебательной скорости a_n и гармониками поля давления цилиндрической антенны A_n (5): общее решение задачи синтеза определится в виде

$$v(a,\varphi_0) = (\rho c)^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{n-1} H_n^{(1)'}(ka) B_n \exp(in\varphi_0)\,. \tag{11}$$

Из (11) следует, что условие принадлежности заданных ДН к классу функций интегрируемых в квадрате во всей области определения (класс L_2) является недостаточным, так как ряд (11) в общем случае является расходящимся, так как производная функции Ханкеля при n > ka и при увеличении n может расти быстрее, чем убывает B_n:

$$\underset{ka>>1;\ ka<n;}{H_n^{(1)'}(ka)} \approx \frac{i\,n!\cdot 2^n}{\pi\,(ka)^{n+1}}\,. \tag{12}$$

Условием существования и единственности решения задач синтеза для цилиндрических антенн с непрерывной функцией возбуждения на излучающей поверхности является

$$\lim_{n\to\infty} \left| H_n^{(1)'}(ka) B_n \right|^2 < \infty\,. \tag{13}$$

Обозначим этот класс B_L. Из вышеизложенного следует, что некорректность общей задачи синтеза антенн с аналитическими замкнутыми поверхностями уже заложена при формулировке самой задачи, так как “требовать” от антенны сформировать диаграмму направленности, которая по своему виду не отвечает возможностям антенны данной конфигурации, некорректно. Таким образом, требование конечности энергии в дальней зоне является необходимым, но не достаточным условием корректного общего решения задач синтеза антенн по заданным ДН. Необходима также принадлежность функции, описывающей заданную ДН, к классу B_L.

Если заданными являются диаграммы направленности из более широкого класса L_2, форма поверхности и волновые размеры антенны, уместно в постановке задач отмечать, что требуется сформировать нереализуемую диаграмму направленности с минимальной или заданной погрешностью. В этом случае задача синтеза сводится к задаче аппроксимации функций класса L_2 обобщенными полиномами конечной степени из класса B_L, математически описывающими диаграммы направленности, которые может формировать антенна заданной конфигурации.

Для решения аппроксимационной задачи синтеза целесообразно воспользоваться методом взвешенного суммирования [3], заключающегося в том, что точные гармоники заданной ДН B_n (7) заменяются аппроксимированными B_n^* вида

$$B_n^* = \alpha^{-1} \cdot \sigma_n \cdot B_n, \tag{14}$$

где σ_n – сигма-множитель – весовая дискретная функция, вид которой зависит от требований, предъявляемых к B_n^*, α – нормирующая константа, определяемая из минимизации среднеквадратичной погрешности замены B_n на B_n^*. В общей теории взвешенного суммирования вид сигма-множителя выбирается таким образом, чтобы, с одной стороны, увеличить скорость сходимости бесконечного ряда по гармоникам B_n , а с другой – минимизировать среднеквадратичную погрешность замены точных гармоник B_n аппроксимируемыми B_n^*.

В нашем случае, кроме перечисленных требований, основная роль сигма-множителя, с одной стороны, заключается в ведении заданной ДН в класс функций B_L , в котором существует корректная постановка задачи синтеза, а с другой – в аналитическом выражении сигма-множителя должна быть заложена информация о волновых размерах и геометрии антенны, которой должна быть реализована заданная ДН. В этой связи, для решения задач синтеза антенн с криволинейной аналитической поверхностью, было предложено сигма-множитель выбирать в виде модуля производной по аргументу собственных функций уравнения Гельмгольца в степени минус единица. Для цилиндрических антенн сигма-множитель был выбран в виде

$$\sigma_n(ka) = \left|H_n^{(1)'}(ka)\right|^{-1}. \tag{15}$$

Суммарная погрешность решения задачи синтеза δ_Σ будет состоять из погрешности замены заданной ДН полиномом конечной степени и погрешности замены B_n на B_n^*:

$$\delta_\Sigma = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|R(\varphi)\right|^2 d\varphi - \sum_{n=-N}^{N}\left|B_n\right|^2 + \sum_{n=-N}^{N}\left|B_n - \frac{B_n}{\alpha\left|H_n^{(1)'}(ka)\right|}\right|^2, \tag{16}$$

а нормирующая константа α определится как

$$\alpha = \frac{\sum\limits_{n=-N}^{N}\left|B_n\right|^2 \Big/ \left|H_n^{(1)'}(ka)\right|^2}{\sum\limits_{n=-N}^{N}\left|B_n\right|^2 \Big/ \left|H_n^{(1)'}(ka)\right|}. \tag{17}$$

Решение задачи синтеза для нормальной компоненты функции возбуждения колебательной скорости с точностью до постоянного множителя определится в виде

$$v(a,\varphi_0) = \alpha^{-1}\sum_{n=-N}^{N} i^{n-1}\exp\{i\arg[H_n^{(1)'}(ka)]\cdot B_n\cdot\exp(in\varphi_0), \tag{18}$$

а ДН, точно реализуемая цилиндрической антенной, с возбуждением в виде (18) определится выражением

$$R^*(\varphi) = \sum_{n=-N}^{n=N}\alpha^{-1}\cdot\left|H_n^{(1)'}(ka)\right|^{-1}\cdot B_n\cdot\exp(in\varphi). \tag{19}$$

Нетрудно убедиться, что задачи синтеза цилиндрических антенн всегда будут корректно поставлены, если структуры выражений для заданных ДН будут соответствовать (19), так как функция возбуждения колебательной скорости на излучающей поверхности всегда будет принадлежать к классу функций интегрируемых в квадрате, так как нереализуемые ДН (7) принадлежат к классу L_2.

Следует отметить, что сигма-множитель выбранный в виде (15), есть ни что иное, как модуль передаточной функции преобразования функции возбуждения с излучающей поверхности цилиндрической антенны в поле давления дальней зоны [4]. Там же показано, что гармоники функций возбуждения с номерами n от –∞ до –N и от +N до +∞, при $|N| \geq ka$, не трансформируются в гармоники поля давления в дальней зоне, а переходят в реактивную энергию антенны, в том числе и тепловую, за счет дифракционных эффектов на непрозрачной излучающей поверхности.

Аналогичные соотношения нетрудно получить и для сферических зональных антенн волнового радиуса ka, распределение поля, на излучающей поверхности которых однородно по углу φ и четно по углу θ (плоская задача). Заданную, точно нереализуемую ДН $R(\theta)\in L_2$ можно представить в виде ряда Фурье по полиномам Лежандра

$$R(\theta)=\sum_{m=0}^{\infty} B_m P_m(\cos\theta), \tag{20}$$

где

$$B_m=\left(m+1/2\right)\int_0^{\pi} R\left(\theta\right) P_m(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta. \tag{21}$$

Точные заданные гармоники Фурье (21) заменяются гармониками вида

$$B_m^{*} = \alpha^{-1}\cdot\sigma_m\cdot B_m, \tag{22}$$

а сигма-множитель σ_m выбирается в виде

$$\sigma_m(ka)=\left|h_m^{(1)\prime}(ka)\right|^{-1}. \tag{23}$$

Таким образом, структура выражений для заданных диаграмм направленности, для которых существует точное единственное и устойчивое решение задачи синтеза для сферических антенн с непрерывной функцией возбуждения определится в виде

$$R^{*}(\theta)=\sum_{m=0}^{m=M} \alpha^{-1}\cdot\left|h_m^{(1)\prime}(ka)\right|^{-1}\cdot B_m\cdot P_m(\cos\theta). \tag{24}$$

Как и для случая цилиндрических антенн, сигма-множитель позволяющий сформулировать задачу синтеза для сферических антенн в корректной постановке, аналогичен выражению для модуля передаточной функции преобразования функции возбуждения с излучающей поверхности сферической антенны в поле давления в дальней зоне [5].

Результаты работы позволяют формулировать в корректной постановке обратные задачи синтеза любых антенн с аналитическими замкнутыми поверхностями, для которых существует аналитическое решение уравнения Гельмгольца. Получаемое при этом решение для непрерывной функции возбуждения на излучающей поверхности всегда единственно и устойчиво. В частности, для цилиндрических круговых антенн корректная постановка задачи синтеза может быть сформулирована следующим образом.

Определить непрерывную функцию распределения нормальной составляющей колебательной скорости на излучающей поверхности цилиндрической антенны, формирующей диаграмму направленности вида

$$R^{*}(\varphi)=\sum_{n=-N_{opt}}^{N_{opt}} \frac{A_n}{\alpha\left|H_n^{(1)\prime}(ka)\right|}\exp(in\varphi), \tag{25}$$

где количество суммируемых гармоник N_{opt}, константу α и волновой размер антенны ka, следует определить из заданного уровня среднеквадратичного уклонения $R^{*}(\varphi)$ от нереализуемой диаграммы направленности вида

$$R(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp(in\varphi), \qquad (26)$$

где A_n – гармоники Фурье диаграммы направленности R(φ), для которой не существует точного и устойчивого решения задачи синтеза.

Специфика разработанного метода аппроксимации заключается, с одной стороны, в универсальности и формализме введения заданных диаграмм направленности в класс функций, для которого существует единственное и устойчивое решение обратной задачи, а с другой – требует осознанного выбора конкретной величины волнового размера антенны при математической постановке задачи, согласованного с предельными возможностями «полосы пропускания» излучающей антенны с точки зрения выбора количества суммируемых гармоник [4,5], которое определяет погрешность замены бесконечного ряда Фурье нереализуемой ДН полиномом конечной степени (16).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 286 с.
2. *Шендеров Е.Л.* Волновые задачи гидроакустики. – Л.: Судостроение, 1972. – 348 с.
3. *Хемминг Т.В*. Численные методы. – М.: Наука. 1968. – 300 с.
4. *Сальников Б.А., Сальникова Е.Н.* Использование аппарата передаточных функций для исследования процессов формирования звуковых полей непрозрачными антеннами // Сб. трудов XX сессии Российского акустического общества / Распространение и дифракция волн. – М.: ГЕОС, 2008.
5. *Б.А. Сальников, Е.Н. Сальникова.* Исследование процессов формирования поля давления акустических излучателей с помощью аппарата передаточных функций // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2008. – № 5 (82). – С. 167-170.

Сальников Борис Александрович
Дальневосточный государственный технический университет.
E-mail: salnikovb@mail.ru.
690950, г. Владивосток, ул. Пушкинская, 10.
Тел.: +79242425100.

Сальникова Евгения Николаевна
E-mail: en_salnikova@mail.ru.
Тел.: +79147235843.

Salnikov Boris Aleksandrovich
Far Eastern State Technical University.
E-mail: salnikovb@mail.ru.
10, Pushkinskaya street, Vladivostok, 690950, Russia.
Phone: +79242425100.

Salnikova Evgeniya Nikolaevna
E-mail: en_salnikova@mail.ru.
Phone: +79147235843.