УДК 551.466

А.Е. Чистяков

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ВОДНОЙ СРЕДЫ

При построении математических моделей основной сложностью является описание поведения сложных физических процессов на границах области. Значения функции в граничных узлах должны удовлетворять не только уравнению, описывающему физический процесс, но и граничным условиям. При построении дискретной модели основным источником погрешности, как правило, является аппроксимация граничных условий. В работе приведена дискретная математическая модель движения водной среды и рассматривается аппроксимация граничных условий.

Погрешность аппроксимации; граничные условия; уравнение Навье-Стокса.

A.E. Chistyakov

ABOUT APPROXIMATION OF BOUNDARY CONDITIONS OF THREE-DIMENSIONAL MODEL OF AQUATIC ENVIRONMENT MOVING

Describing of complex physical processes behavior on boundaries of area is the main complexity in building of mathematical model. Values of function in boundary nodes must suffice for equation, describing physical process, and boundary conditions. Approximation of boundary conditions is the main source of fallibility in building of discrete model. Discrete mathematical model of aquatic environment moving is describing in this work. Also approximation of boundary conditions is considered in this work.

Fallibility of approximation; boundary conditions; Navier–Stokes equation.

1. Введение. Математическая модель, принятая для описания данного процесса или явления, может внести существенные погрешности, если в ней не учтены какие-либо важные черты рассматриваемой задачи. В частности, математическая модель может прекрасно работать в одних условиях и быть совершенно неприемлемой в других, поэтому важно правильно учитывать область ее применимости.

Входные данные задачи часто являются основным источником погрешностей. Это так называемые неустранимые погрешности, поскольку они не могут быть уменьшены вычислителем ни до начала решения задачи, ни в процессе ее решения. Следует стремиться к тому, чтобы все исходные данные были примерно одинаковой точности. Сильное уточнение одних исходных данных при наличии больших погрешностей в других не приводит к повышению точности результатов.

2. Непрерывная трехмерная модель движения водной среды. Исходными уравнениями гидродинамики являются[1]:

Уравнение движения (Навье – Стокса):

$$u'_t + uu'_x + vu'_y + wu'_z = -\frac{1}{\rho}P'_x + \left(\mu u'_x\right)'_x + \left(\mu u'_y\right)'_y + \left(\nu u'_z\right)'_z + 2\Omega(v\sin\theta - w\cos\theta), \quad (1)$$

$$v'_t + uv'_x + vv'_y + wv'_z = -\frac{1}{\rho}P'_y + \left(\mu v'_x\right)'_x + \left(\mu v'_y\right)'_y + \left(\nu v'_z\right)'_z - 2\Omega u\sin\theta, \quad (2)$$

$$w'_t + uw'_x + vw'_y + ww'_z = -\frac{1}{\rho}P'_z + \left(\mu w'_x\right)'_x + \left(\mu w'_y\right)'_y + \left(\nu w'_z\right)'_z + 2\Omega u\cos\theta + g \cdot \quad (3)$$

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости

$$u'_x + v'_y + w'_z = 0. \tag{4}$$

Полное гидродинамическое давление связано с глубиной соотношением:

$$P(x, y, z, t) = p(x, y, z, t) + \rho g z. \tag{5}$$

Для покоящейся жидкости поле $p(x, y, z, t)$ не зависит от координаты z.

Запишем уравнения (1) – (3) с учетом (5)

$$u'_t + uu'_x + vu'_y + wu'_z = -\frac{1}{\rho} p'_x + \left(\mu u'_x\right)'_x + \left(\mu u'_y\right)'_y + \left(\nu u'_z\right)'_z + 2\Omega(v\sin\theta - w\cos\theta), \tag{6}$$

$$v'_t + uv'_x + vv'_y + wv'_z = -\frac{1}{\rho} p'_y + \left(\mu v'_x\right)'_x + \left(\mu v'_y\right)'_y + \left(\nu v'_z\right)'_z - 2\Omega u\sin\theta, \tag{7}$$

$$w'_t + uw'_x + vw'_y + ww'_z = -\frac{1}{\rho} p'_z + \left(\mu w'_x\right)'_x + \left(\mu w'_y\right)'_y + \left(\nu w'_z\right)'_z + 2\Omega u\cos\theta. \tag{8}$$

Система уравнений (6)-(8), где V = {u,v,w} – компоненты вектора скорости, P – гидродинамическое давление, ρ – плотность, Ω – угловая скорость вращения земли, θ – угол между вектором угловой скорости и вертикалью, μ,ν – горизонтальная и вертикальная составляющая коэффициента турбулентного обмена, задана при следующих граничных условиях:

- на входе (устья рек Дон и Кубань, а также озеро Сиваш) –

$$u(x, y, z, t) = u(t) \quad v(x, y, z, t) = v(t) \quad p'_n(x, y, z, t) = 0 \quad V'_n(x, y, z, t) = 0, \tag{9}$$

- боковая граница (берега и дно Азовского моря) –

$$\begin{aligned} &\rho_v \mu (u')_n (x, y, z, t) = -\tau_x(t), \quad &&\rho_v \mu (v')_n (x, y, z, t) = -\tau_y(t), \\ &V_n(x, y, z, t) = 0, &&p'_n(x, y, z, t) = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

- верхняя граница (поверхность Азовского моря) –

$$\begin{aligned} &\rho \mu (u')_n (x, y, z, t) = -\tau_x(t), \quad &&\rho \mu (v')_n (x, y, z, t) = -\tau_y(t), \\ &w(x, y, t) = -\omega - \frac{p'_t}{\rho g}, &&p'_n(x, y, t) = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

- на выходе (выход в Черное море) –

$$p'_n(x, y, z, t) = 0 \quad V'_n(x, y, z, t) = 0, \tag{12}$$

где ω – интенсивность испарения жидкости, τ_x, τ_y – составляющие тангенциального напряжения (закон Ван-Дорна), ρ_v – плотность взвеси.

Составляющие тангенциального напряжения для свободной поверхности:

$$\tau_x = \rho_a C_p\left(\left|\vec{w}\right|\right) w_x \left|\vec{w}\right|,\ \tau_y = \rho_a C_p\left(\left|\vec{w}\right|\right) w_y \left|\vec{w}\right|, \tag{13}$$

где $\vec{w}$ – вектор скорости ветра относительно воды, ρ_a – плотность атмосферы,

$C_p\left(\left|\vec{w}\right|\right) = \begin{cases} 0{,}0088, \left|\vec{w}\right| < 6{,}6\ м/с \\ 0{,}0026, \left|\vec{w}\right| \ge 6{,}6\ м/с \end{cases}$ – безразмерный коэффициент.

Составляющие тангенциального напряжения для дна, с учетом введенных обозначений, могут быть записаны следующим образом:

$$\tau_x = \rho C_p\left(\left|\vec{V}\right|\right) u \left|\vec{V}\right|,\ \tau_y = \rho C_p\left(\left|\vec{V}\right|\right) v \left|\vec{V}\right|.$$

3. Дискретная модель движения водной среды [2]. Расчетная область по пространственным направлениям x, y, z представляет собой параллелепипед. Для построения решения разностной схемы будем использовать равномерную сетку:

$$w_h = \left\{ x_i = ih_x, y_i = jh_y, z_i = kh_z;\ i = \overline{1..N_x}, j = \overline{1..N_y}, k = \overline{1..N_z}; \right.$$
$$\left. N_x h_x = l_x, N_y h_y = l_y, N_z h_z = l_z \right\},$$

где i, j, k – индексы по направлениям x, y, z,

h_x, h_y, h_z – шаги по пространственным направлениям,

N_x, N_y, N_z – количество узлов по координатным направлениям,

l_x, l_y, l_z – пространственные размеры области.

Первая задача представлена уравнением диффузии – конвекции, на основе которого вычисляется поле скорости на промежуточном временном шаге

$$\frac{\tilde{u}-u}{\tau} + u\overline{u}_{\overset{0}{x}} + v\overline{u}_{\overset{0}{y}} + w\overline{u}_{\overset{0}{z}} = \left(\mu \overline{u}_{\overline{x}}\right)_x + \left(\mu \overline{u}_{\overline{y}}\right)_y + \left(\nu \overline{u}_{\overline{z}}\right)_z + 2\Omega(v\sin\theta - w\cos\theta), \tag{14}$$

$$\frac{\tilde{v}-v}{\tau} + u\overline{v}_{\overset{0}{x}} + v\overline{v}_{\overset{0}{y}} + w\overline{v}_{\overset{0}{z}} = \left(\mu \overline{v}_{\overline{x}}\right)_x + \left(\mu \overline{v}_{\overline{y}}\right)_y + \left(\nu \overline{v}_{\overline{z}}\right)_z - 2\Omega u\sin\theta, \tag{15}$$

$$\frac{\tilde{w}-w}{\tau} + u\overline{w}_{\overset{0}{x}} + v\overline{w}_{\overset{0}{y}} + w\overline{w}_{\overset{0}{z}} = \left(\mu \overline{w}_{\overline{x}}\right)_x + \left(\mu \overline{w}_{\overline{y}}\right)_y + \left(\nu \overline{w}_{\overline{z}}\right)_z + 2\Omega u\cos\theta, \tag{16}$$

Наиболее трудоемкой задачей является расчет давления, представленный уравнением Пуассона

$$p_{\overline{x}x} + p_{\overline{y}y} + p_{\overline{z}z} = \frac{\rho}{\tau}\left(\left(\tilde{u}\right)_{\overset{0}{x}} + \left(\tilde{v}\right)_{\overset{0}{y}} + \left(\tilde{w}\right)_{\overset{0}{z}}\right). \tag{17}$$

По явной схеме в третьей задаче определяется поле скоростей на следующем шаге по времени:

$$\frac{\hat{u}-\tilde{u}}{\tau} = -\frac{1}{\rho} p_{\overset{0}{x}}, \tag{18}$$

$$\frac{\hat{v}-\tilde{v}}{\tau} = -\frac{1}{\rho} p_{\overset{0}{y}}, \tag{19}$$

$$\frac{\hat{w}-\tilde{w}}{\tau}=-\frac{1}{\rho}p_{0\,z}. \qquad (20)$$

Таким образом, осуществляется переход на следующий временной слой. Условием окончания перехода между временными слоями является установление значений поля скорости.

4. Аппроксимация граничных условий. Рассмотрим систему уравнений для расчета поля скоростей без учёта влияния давления.

$$\frac{\tilde{u}-u}{\tau}+u\overline{u}_{0\,x}+v\overline{u}_{0\,y}+w\overline{u}_{0\,z}=\left(\mu\overline{u}_{\overline{x}}\right)_x+\left(\mu\overline{u}_{\overline{y}}\right)_y+\left(\nu\overline{u}_{\overline{z}}\right)_z+2\Omega(v\sin\theta-w\cos\theta), \qquad (21)$$

$$\frac{\tilde{v}-v}{\tau}+u\overline{v}_{0\,x}+v\overline{v}_{0\,y}+w\overline{v}_{0\,z}=\left(\mu\overline{v}_{\overline{x}}\right)_x+\left(\mu\overline{v}_{\overline{y}}\right)_y+\left(\nu\overline{v}_{\overline{z}}\right)_z-2\Omega u\sin\theta, \qquad (22)$$

$$\frac{\tilde{w}-w}{\tau}+u\overline{w}_{0\,x}+v\overline{w}_{0\,y}+w\overline{w}_{0\,z}=\left(\mu\overline{w}_{\overline{x}}\right)_x+\left(\mu\overline{w}_{\overline{y}}\right)_y+\left(\nu\overline{w}_{\overline{z}}\right)_z+2\Omega u\cos\theta. \qquad (23)$$

Система уравнений (21)-(23) задана при следующих граничных условиях:

- на входе (устья рек Дон и Кубань, а также озеро Сиваш)

$$u(x,y,z,t)=u(t),\quad v(x,y,z,t)=v(t),\quad w(x,y,z,t)=w(t), \qquad (24)$$

- боковая граница (берега и дно Азовского моря)

$$\rho_v\mu(u')_n(x,y,z,t)=-\tau_x(t),\quad \rho_v\mu(v')_n(x,y,z,t)=-\tau_y(t),\quad w'_n(x,y,z,t)=0, \qquad (25)$$

- верхняя граница (поверхность Азовского моря)

$$\rho\mu(u')_n(x,y,z,t)=-\tau_x(t),\quad \rho\mu(v')_n(x,y,z,t)=-\tau_y(t),\quad w'_n(x,y,z,t)=0, \qquad (26)$$

- на выходе (выход в Черное море)

$$u'_n(x,y,z,t)=0,\quad v'_n(x,y,z,t)=0,\quad w'_n(x,y,z,t)=0, \qquad (27)$$

Каждое из уравнений системы (21)–(23) имеет одинаковый порядок погрешности аппроксимации и отличается только лишь правой частью, следовательно, достаточно рассмотреть погрешность на примере одного из уравнений. Возьмём для исследования первое уравнение.

Введем обозначения для граничных условий по координате x.

γ_{x-} – множество узлов, для которых выполняется следующее условие: узел (i,j,k) находится внутри расчетной области, (i-1,j,k) – лежит вне области.

γ_{x+} – множество узлов, для которых выполняется следующее условие: узел (i,j,k) находится внутри расчетной области, (i+1,j,k) – лежит вне области.

Аналогично поступим для оставшихся координатных направлений.

$$\gamma_x=\gamma_{x-}\cup\gamma_{x+},\ D_x=D/\gamma_x.$$

D – множество узлов, принадлежащих области. Аналогичным образом введем обозначения для граничных условий γ_y, γ_z по координатам y, z.

Для уравнений (1) получим аппроксимацию для граничного условия

$$\rho_v \mu (u')_n (x,y,z,t)\Big|_{(i,j,k)\in\gamma_{x-}} = -\tau_x(t). \tag{28}$$

Будем интегрировать операторы по тем же ячейкам, что и в случае внутренних узлов, при этом аппроксимация оператора конвективного переноса uu'_x имеет вид

$$uu'_x \approx \left(\frac{1}{h_x}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{dx}{u(x,y,z)}\right)^{-1}\frac{u_{i+1,j,k}-u_{i,j,k}}{2h_x}+\left(\frac{1}{h_x}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{u(x,y,z)}\right)^{-1}\frac{u_{i,j,k}-u_{i-1,j,k}}{2h_x}=$$

$$=\left(\frac{1}{h_x}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{dx}{u(x,y,z)}\right)^{-1}\frac{u_{i+1,j,k}-u_{i,j,k}}{2h_x}\approx u_{i+1/2,j,k}\frac{u_{i+1,j,k}-u_{i,j,k}}{2h_x}.$$

Аппроксимация оператора диффузионного переноса $\left(\mu u'_x\right)'_x$ имеет вид:

$$\left(\mu u'_x\right)'_x=\frac{1}{h_x}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\left(\mu u'_x\right)'_x dx=\frac{1}{h_x}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1/2}}\left(\mu u'_x\right)'_x dx=\frac{1}{h_x}\left(\left(\mu u'_x\right)_{i+1/2,j,k}-\left(\mu u'_x\right)_{i,j,k}\right)\approx$$

$$\approx\frac{1}{h_x}\left(\left(\frac{1}{h_x}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{dx}{\mu(x,y,z)}\right)^{-1}\frac{u_{i+1,j,k}-u_{i,j,k}}{h_x}+\frac{\tau_x(t)}{\rho_v}\right)\approx\mu_{i+1/2,j,k}\frac{u_{i+1,j,k}-u_{i,j,k}}{h^2_x}+\frac{\tau_x(t)}{\rho_v h_x}.$$

Аппроксимация уравнения (21) в случае использования граничного условия (28) запишется

$$\frac{\tilde u-u}{2\tau}+u_{i-1/2,j,k}\frac{\bar u_{i,j,k}-\bar u_{i-1,j,k}}{2h_x}+\frac{1}{2}v\bar u_{\overset{0}{y}}+\frac{1}{2}w\bar u_{\overset{0}{z}}=-\frac{\tau_x(t)}{\rho h_x}-\mu_{i-1/2,j,k}\frac{\bar u_{i,j,k}-\bar u_{i-1,j,k}}{h^2_x}+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\mu\bar u_{\bar y}\right)_y+\frac{1}{2}\left(\nu\bar u_{\bar z}\right)_z+\Omega(v\sin\theta-w\cos\theta)\cdot$$

Аналогично можем получить аппроксимацию для граничного условия

$$\rho_v \mu (u')_n (x,y,z,t)\Big|_{(i,j,k)\in\gamma_{x+}} = -\tau_x(t), \tag{29}$$

которая будет выглядеть следующим образом:

$$uu'_x \approx \left(\frac{1}{h_x}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{dx}{u(x,y,z)}\right)^{-1}\frac{u_{i+1,j,k}-u_{i,j,k}}{2h_x}+\left(\frac{1}{h_x}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{u(x,y,z)}\right)^{-1}\frac{u_{i,j,k}-u_{i-1,j,k}}{2h_x}=$$

$$=\left(\frac{1}{h_x}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{u(x,y,z)}\right)^{-1}\frac{u_{i,j,k}-u_{i-1,j,k}}{2h_x}\approx u_{i-1/2,j,k}\frac{u_{i,j,k}-u_{i-1,j,k}}{2h_x},$$

$$\left(\mu u_x'\right)_x' = \frac{1}{h_x}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left(\mu u_x'\right)_x' dx = \frac{1}{h_x}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_i} \left(\mu u_x'\right)_x' dx = \frac{1}{h_x}\left(\left(\mu u_x'\right)_{i,j,k} - \left(\mu u_x'\right)_{i-1/2,j,k}\right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{h_x}\left(-\frac{\tau_x(t)}{\rho_v} - \left(\frac{1}{h_x}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{\mu(x,y,z)}\right)^{-1}\frac{u_{i,j,k}-u_{i-1,j,k}}{h_x}\right) \approx -\frac{\tau_x(t)}{\rho_v h_x} - \mu_{i-1/2,j,k}\frac{u_{i,j,k}-u_{i-1,j,k}}{h^2_x}.$$

Таким образом, получим аппроксимацию операторов частных производных по переменной x для уравнения (21) в случае граничных условий (28), (29).

Запишем аппроксимацию для оператора uu':

$$uu_x' \approx \begin{cases} u_{i+1/2,j,k}\dfrac{u_{i+1,j,k}-u_{i,j,k}}{2h_x} & (i,j,k)\in \gamma_{x-}, \\ u_{i+1/2,j,k}\dfrac{u_{i+1,j,k}-u_{i,j,k}}{2h_x} + u_{i-1/2,j,k}\dfrac{u_{i,j,k}-u_{i-1,j,k}}{2h_x} & (i,j,k)\in D_x, \\ u_{i-1/2,j,k}\dfrac{u_{i,j,k}-u_{i-1,j,k}}{2h_x} & (i,j,k)\in \gamma_{x+}. \end{cases} \tag{30}$$

Запишем аппроксимацию для оператора $\left(\mu u_x'\right)_x'$:

$$\left(\mu u_x'\right)_x' = \begin{cases} \mu_{i+1/2,j,k}\dfrac{u_{i+1,j,k}-u_{i,j,k}}{h^2_x} + \dfrac{\tau_x(t)}{\rho_v h_x} & (i,j,k)\in \gamma_{x-}, \\ \dfrac{\mu_{i+1/2,j,k}u_{i+1,j,k} - \left(\mu_{i+1/2,j,k}+\mu_{i-1/2,j,k}\right)u_{i,j,k} + \mu_{i-1/2,j,k}u_{i-1,j,k}}{h_x^2} & (i,j,k)\in D_x, \\ -\dfrac{\tau_x(t)}{\rho_v h_x} - \mu_{i-1/2,j,k}\dfrac{u_{i,j,k}-u_{i-1,j,k}}{h^2_x} & (i,j,k)\in \gamma_{x+}. \end{cases} \tag{31}$$

При замене τ_x на ноль в выражении (31) получим аппроксимацию для оператора $\left(\mu u_x'\right)_x'$:

$$\left(\mu u_x'\right)_x' = \begin{cases} \mu_{i+1/2,j,k}\dfrac{u_{i+1,j,k}-u_{i,j,k}}{h^2_x} & (i,j,k)\in \gamma_{x-}, \\ \dfrac{\mu_{i+1/2,j,k}u_{i+1,j,k} - \left(\mu_{i+1/2,j,k}+\mu_{i-1/2,j,k}\right)u_{i,j,k} + \mu_{i-1/2,j,k}u_{i-1,j,k}}{h_x^2} & (i,j,k)\in D_x, \\ -\mu_{i-1/2,j,k}\dfrac{u_{i,j,k}-u_{i-1,j,k}}{h^2_x} & (i,j,k)\in \gamma_{x+}, \end{cases}$$

в случае использования граничных условий (27), (30). В случае граничных условий первого рода переходим к непосредственной аппроксимации.

Уравнения для расчета давления без учёта воздействия гравитации выглядит следующим образом:

$$p''_{xx} + p''_{yy} + p''_{zz} = \frac{\rho}{\tau}(\tilde{u}'_x + \tilde{v}'_y + \tilde{w}'_z). \qquad (32)$$

Уравнение (32) задано при следующих граничных условиях:

- на входе (устья рек Дон и Кубань, а также озеро Сиваш)

$$p'_n(x,y,z,t) = 0, \quad V(x,y,z,t) = V(t), \quad V'_n(x,y,z,t) = 0, \qquad (33)$$

- боковая граница (берега и дно Азовского моря)

$$p'_n(x,y,z,t) = 0, \quad V(x,y,z,t) = 0, \quad V'_n(x,y,z,t) = 0, \qquad (34)$$

- верхняя граница (поверхность Азовского моря)

$$p'_n(x,y,z,t) = 0, \quad V'_n(x,y,z,t) = 0, \quad w(x,y,z,t) = -\omega - \frac{p'_t}{\rho g}$$

или

$$p'_n(x,y,z,t) = -\frac{p'_t}{\tau g}, \quad V'_n(x,y,z,t) = 0, \quad w(x,y,z,t) = -\omega. \qquad (35)$$

В случае установившегося течения можно использовать условие

$$p'_n(x,y,z,t) = 0, \quad V'_n(x,y,z,t) = 0, \quad w(x,y,z,t) = -\omega, \qquad (36)$$

- на выходе (выход в Черное море)

$$p'_n(x,y,z,t) = 0, \quad V(x,y,z,t) = V(t), \quad V'_n(x,y,z,t) = 0. \qquad (37)$$

Граничное условие (15) требует комментариев. Рассмотрим поле давления жидкости в приповерхностном слое в случае отсутствия испарения:

$$p = \rho g (z - h).$$

Продифференцируем данное выражение по времени:

$$p'_t = -\rho g h'_t.$$

Физический смысл выражения h'_t – скорость подъема уровня жидкости, следовательно, для приповерхностного слоя справедливо равенство $h'_t = w$, тогда

$$p'_t = -\rho g w \text{ или } w = -\frac{p'_t}{\rho g}.$$

В случае наличия испарения вертикальная составляющая скорости для приповерхностного слоя запишется в виде (35).

Аппроксимация оператора p''_{xx} в случае граничного условия

$$p'_x(x,y,z,t)\Big|_{(i,j,k)\in\gamma_{x-}}=0 \tag{38}$$

запишется следующим образом:

$$p''_{xx}=\frac{1}{h_x}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}p''_{xx}dx=\frac{1}{h_x}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1/2}}p''_{xx}dx=\frac{1}{h_x}\Big(\big(p'_x\big)_{i+1/2,j,k}-\big(p'_x\big)_{i,j,k}\Big)\approx\frac{p_{i+1,j,k}-p_{i,j,k}}{h_x^{\ 2}}, \tag{39}$$

в случае граничного условия

$$p'_x(x,y,z,t)\Big|_{(i,j,k)\in\gamma_{x+}}=0 \tag{40}$$

получим:

$$p''_{xx}=\frac{1}{h_x}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}p''_{xx}dx=\frac{1}{h_x}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_i}p''_{xx}dx=\frac{1}{h_x}\Big(\big(p'_x\big)_{i,j,k}-\big(p'_x\big)_{i-1/2,j,k}\Big)\approx-\frac{p_{i,j,k}-p_{i-1,j,k}}{h_x^{\ 2}}. \tag{41}$$

Таким образом, получим аппроксимацию оператора p''_{xx}:

$$p''_{xx}=\begin{bmatrix}\dfrac{p_{i+1,j,k}-p_{i,j,k}}{h_x^{\ 2}} & (i,j,k)\in\gamma_{x-},\\ \dfrac{p_{i+1,j,k}-2p_{i,j,k}+p_{i-1,j,k}}{h_x^{\ 2}} & (i,j,k)\in D_x,\\ -\dfrac{p_{i,j,k}-p_{i-1,j,k}}{h_x^{\ 2}} & (i,j,k)\in\gamma_{x+}.\end{bmatrix} \tag{42}$$

Запишем аппроксимацию оператора u'_x в случае комбинации граничных условий (34):

$$u'_x\approx\begin{bmatrix}\dfrac{u_{i+1/2,j,k}-u_{i,j,k}}{h_x} & (i,j,k)\in\gamma_{x-}\\ \dfrac{u_{i+1/2,j,k}-u_{i-1/2,j,k}}{h_x} & (i,j,k)\in D_x\\ \dfrac{u_{i,j,k}-u_{i-1/2,j,k}}{h_x} & (i,j,k)\in\gamma_{x+}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{u_{i+1/2,j,k}}{h_x} & (i,j,k)\in\gamma_{x-},\\ \dfrac{u_{i+1/2,j,k}-u_{i-1/2,j,k}}{h_x} & (i,j,k)\in D_x,\\ -\dfrac{u_{i-1/2,j,k}}{h_x} & (i,j,k)\in\gamma_{x+}.\end{bmatrix} \tag{43}$$

Запишем аппроксимацию оператора w'_z в случае комбинации граничных условий (36)

$$w'_z(x,y,z,t)\Big|_{(i,j,k)\in\gamma_{z-}}=\frac{1}{h_z}\int\limits_{z_k}^{z_{k+1/2}}w'_zdx=\frac{w_{i,j,k+1/2}-w_{i,j,k}}{h_z}=\frac{w_{i,j,k+1/2}+\omega}{h_z}. \tag{44}$$

Аппроксимация граничных условий (33),(37) для оператора u'_x имеет вид

$$u'_x \approx \begin{cases} \dfrac{u_{i+1/2,j,k} - u_{i,j,k}}{h_x} & (i,j,k) \in \gamma_{x-}, \\ \dfrac{u_{i,j,k} - u_{i-1/2,j,k}}{h_x} & (i,j,k) \in \gamma_{x+}. \end{cases} \tag{45}$$

Система уравнений для расчета поля скоростей на следующем шаге по времени выглядит следующим образом:

$$\frac{\hat{u} - \tilde{u}}{\tau} = -\frac{1}{\rho} p'_x, \tag{46}$$

$$\frac{\hat{v} - \tilde{v}}{\tau} = -\frac{1}{\rho} p'_y, \tag{47}$$

$$\frac{\hat{w} - \tilde{w}}{\tau} = -\frac{1}{\rho} p'_z. \tag{48}$$

Граничное условие для системы уравнений (46)-(48) имеет вид

$$p'_n(x, y, z, t) = 0. \tag{49}$$

Запишем аппроксимацию оператора p'_x с учетом граничного условия (49)

$$p'_x = \begin{cases} \dfrac{p_{i+1,j,k} - p_{i,j,k}}{h_x} & (i,j,k) \in \gamma_{x-}, \\ \dfrac{p_{i+1,j,k} - p_{i-1,j,k}}{2h_x} & (i,j,k) \in D_x, \\ \dfrac{p_{i,j,k} - p_{i-1,j,k}}{h_x} & (i,j,k) \in \gamma_{x+}. \end{cases} \tag{50}$$

Аналогично можно получить аппроксимацию оставшихся операторов системы уравнений (45)-(47).

Задача (32) с граничными условиями (33)-(34), (36)-(37) вычисляется с точностью до константы, в качестве константы желательно выбрать значение функции в произвольном узле сетки. Для вычисления задачи (46)-(48) с условием (49) не требуется знание поля давления, а достаточно значения градиента поля давления, что и обуславливает произвольность выбора константы. Данных проблем можно избежать в случае использования условия (35).

Найдем погрешность аппроксимации уравнения (21) в случае граничного условия (26). Для этого запишем данное уравнение, если $(i,j,k) \in \gamma_{x+} \cup D_y \cup D_z$

$$\frac{\tilde{u} - u}{2\tau} + u_{i-1/2,j,k}\frac{\bar{u}_{i,j,k} - \bar{u}_{i-1,j,k}}{2h_x} + \frac{1}{2}v\bar{u}_{\overset{0}{y}} + \frac{1}{2}w\bar{u}_{\overset{0}{z}} = -\frac{\tau_x(t)}{\rho h_x} - \mu_{i-1/2,j,k}\frac{\bar{u}_{i,j,k} - \bar{u}_{i-1,j,k}}{h^2{}_x} +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\mu\bar{u}_{\bar{y}}\right)_y + \frac{1}{2}\left(\nu\bar{u}_{\bar{z}}\right)_z + \Omega(v\sin\theta - w\cos\theta)\cdot \tag{51}$$

Доопределим задачу. Предположим, над верхней границей течет жидкость, которая не меняет картины течений внутри области. Тогда течение жидкости в приграничном слое внутри области будет описываться уравнением (52), а вне области – уравнением (21) с граничным условием (26), узел i, j, k принадлежит $\gamma_{x+} \cup D_y \cup D_z$

$$\frac{\tilde{u}-u}{2\tau}+u_{i+1/2,j,k}\frac{\bar{u}_{i+1,j,k}-\bar{u}_{i,j,k}}{2h_x}+\frac{1}{2}v\bar{u}_{\underset{y}{0}}+\frac{1}{2}w\bar{u}_{\underset{z}{0}}=\mu_{i+1/2,j,k}\frac{\bar{u}_{i+1,j,k}-\bar{u}_{i,j,k}}{h^2{}_x}+\frac{\tau_x(t)}{\rho h_x}+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\mu\bar{u}_{\bar{y}}\right)_y+\frac{1}{2}\left(\nu\bar{u}_{\bar{z}}\right)_z+\Omega(v\sin\theta-w\cos\theta)\cdot \quad (52)$$

Сложим уравнения (51) и (52)

$$\frac{\tilde{u}-u}{\tau}+u_{i+1/2,j,k}\frac{\bar{u}_{i+1,j,k}-\bar{u}_{i,j,k}}{2h_x}+u_{i-1/2,j,k}\frac{\bar{u}_{i,j,k}-\bar{u}_{i-1,j,k}}{2h_x}+v\bar{u}_{\underset{y}{0}}+w\bar{u}_{\underset{z}{0}}=\mu_{i+1/2,j,k}\frac{\bar{u}_{i+1,j,k}-\bar{u}_{i,j,k}}{h^2{}_x}-$$
$$-\mu_{i-1/2,j,k}\frac{\bar{u}_{i,j,k}-\bar{u}_{i-1,j,k}}{h^2{}_x}+\left(\mu\bar{u}_{\bar{y}}\right)_y+\left(\nu\bar{u}_{\bar{z}}\right)_z+2\Omega(v\sin\theta-w\cos\theta)\cdot \quad (53)$$

Из уравнений (51) и (53) следует

$$u_{i-1/2,j,k}\frac{\bar{u}_{i,j,k}-\bar{u}_{i-1,j,k}}{h_x}=u_{i+1/2,j,k}\frac{\bar{u}_{i+1,j,k}-\bar{u}_{i,j,k}}{2h_x}+u_{i-1/2,j,k}\frac{\bar{u}_{i,j,k}-\bar{u}_{i-1,j,k}}{2h_x}, \quad (54)$$

$$-\frac{\tau_x(t)}{\rho h_x}-\mu_{i-1/2,j,k}\frac{\bar{u}_{i,j,k}-\bar{u}_{i-1,j,k}}{h^2{}_x}=\mu_{i+1/2,j,k}\frac{\bar{u}_{i+1,j,k}-\bar{u}_{i,j,k}}{2h^2{}_x}-\mu_{i-1/2,j,k}\frac{\bar{u}_{i,j,k}-\bar{u}_{i-1,j,k}}{2h^2{}_x}. \quad (55)$$

Поле коэффициентов турбулентного обмена имеет симметрию относительно границы $\mu_{i+1/2,j,k}=\mu_{i-1/2,j,k}$, тогда уравнение (55) запишется так

$$-\frac{\tau_x(t)}{\rho h_x}=\mu_{i+1/2,j,k}\frac{\bar{u}_{i+1,j,k}-\bar{u}_{i-1,j,k}}{2h^2{}_x}$$

или

$$\bar{u}_{i+1,j,k}-\bar{u}_{i-1,j,k}=-\frac{\tau_x(t)h_x}{\rho\mu_{i+1/2,j,k}}. \quad (56)$$

Воспользуемся разложением в ряд Тейлора относительно узла (i,j,k) для значения функции компонентов скорости в соседних узлах:

$$\bar{u}_{i+1,j,k}=\sum_{m=0}^{\infty}(\bar{u}_{i,j,k})^{(m)}\frac{h_x{}^m}{m!}, \quad (57)$$

$$\bar{u}_{i-1,j,k}=\sum_{m=0}^{\infty}(\bar{u}_{i,j,k})^{(m)}\frac{(-1)^m h_x{}^m}{m!}. \quad (58)$$

Из (57) вычтем (58)

$$\overline{u}_{i+1,j,k}-\overline{u}_{i-1,j,k}=\sum_{m=0}^{\infty}(\overline{u}_{i,j,k})^{(2m+1)}\frac{h_x^{2m+1}}{(2m+1)!}=(\overline{u}_{i,j,k})'h_x+\sum_{m=1}^{\infty}(\overline{u}_{i,j,k})^{(2m+1)}\frac{h_x^{2m+1}}{(2m+1)!}. \quad (59)$$

В силу (56) из (59) следует

$$\sum_{m=1}^{\infty}(\overline{u}_{i,j,k})^{(2m+1)}\frac{h_x^{2m+1}}{(2m+1)!}=0 \quad (60)$$

и разложение в ряд Тейлора для поля $\overline{u}_{i+1,j,k}$ запишется как

$$u_{i+1,j,k}^{n+1/2}=u_{i,j,k}^{n+1/2}+h_x(u_{i,j,k}^{n+1/2})'_x+\frac{h_x^2}{2}(u_{i,j,k}^{n+1/2})''_{xx}+O(h_x^4). \quad (61)$$

Из симметричности $\mu_{i+1/2,j,k}=\mu_{i-1/2,j,k}$ следует $\left(\mu_{i,j,k}\right)'=0$, тогда

$$\mu_{i+1/2,j,k}u_{i+1,j,k}^{n+1/2}=\mu_{i+1/2,j,k}u_{i,j,k}^{n+1/2}+\mu_{i+1/2,j,k}h_x(u_{i,j,k}^{n+1/2})'_x+\mu_{i+1/2,j,k}\frac{h_x^2}{2}(u_{i,j,k}^{n+1/2})''_{xx}+O(h_x^4)=$$

$$=\mu_{i+1/2,j,k}u_{i,j,k}^{n+1/2}+\mu_{i+1/2,j,k}h_x(u_{i,j,k}^{n+1/2})'_x+\left(\mu_{i,j,k}\right)'_x\frac{h_x^2}{2}(u_{i,j,k}^{n+1/2})'_x+\mu_{i,j,k}\frac{h_x^2}{2}(u_{i,j,k}^{n+1/2})''_{xx}+O(h_x^4)=$$

$$=\mu_{i+1/2,j,k}u_{i,j,k}^{n+1/2}+\mu_{i+1/2,j,k}h_x(u_{i,j,k}^{n+1/2})'_x+\left(\mu_{i,j,k}(u_{i,j,k}^{n+1/2})'_x\right)'_x\frac{h_x^2}{2}+O(h_x^4).$$

Выразим оператор $\left(\mu_{i,j,k}(u_{i,j,k}^{n+1/2})'_x\right)'_x$

$$\left(\mu_{i,j,k}(u_{i,j,k}^{n+1/2})'_x\right)'_x=2\mu_{i+1/2,j,k}\frac{u_{i+1,j,k}^{n+1/2}-u_{i,j,k}^{n+1/2}}{h_x^2}-\mu_{i+1/2,j,k}\frac{2}{h_x}(u_{i,j,k}^{n+1/2})'_x+O(h_x^2)$$

или

$$\left(\mu_{i,j,k}(u_{i,j,k}^{n+1/2})'_x\right)'_x=2\mu_{i+1/2,j,k}\frac{u_{i+1,j,k}^{n+1/2}-u_{i,j,k}^{n+1/2}}{h_x^2}+\frac{2\tau_x(t)}{\rho_v h_x}+O(h_x^2).$$

Получили среднее значение оператора $\left(\mu_{i,j,k}(u_{i,j,k}^{n+1/2})'_x\right)'_x$ при $x_i\le x\le x_{i+1/2}$. Если $x_{i-1/2}\le x\le x_i$, то $\left(\mu_{i,j,k}(u_{i,j,k}^{n+1/2})'_x\right)'_x=0$. Таким образом, аппроксимация оператора $\left(\mu_{i,j,k}(u_{i,j,k}^{n+1/2})'_x\right)'_x$ при $x_{i-1/2}\le x\le x_{i+1/2}$ запишется в виде

$$\left(\mu_{i,j,k}(u_{i,j,k}^{n+1/2})'_x\right)'_x=\mu_{i+1/2,j,k}\frac{u_{i+1,j,k}^{n+1/2}-u_{i,j,k}^{n+1/2}}{h_x^2}+\frac{\tau_x(t)}{\rho_v h_x}+O(h_x^2). \quad (62)$$

Погрешность аппроксимации уравнения (54) равна $O(\tau+h_x^2)$. Таким образом, получили дискретную модель, в которой граничные узлы имеют одинаковый порядок погрешности аппроксимации с внутренними узлами.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989.
2. *Чистяков А.Е.* Трехмерная модель движения водной среды в Азовском море с учетом транспорта солей и тепла // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 8 (97). – С. 75-82.

Чистяков Александр Евгеньевич
Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.
E-mail: cheese_05@mail.ru.
347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
Тел.: 88634371606.

Chistyakov Alexander Evgenievich
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education "Southern Federal University".
E-mail: cheese_05@mail.ru.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: +78634371606.

УДК 519.6

В.С. Васильев

АППРОКСИМАЦИИ В СИСТЕМАХ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ НА КРИВОЛИНЕЙНЫХ СЕТКАХ

Строятся консервативные симметричные аппроксимации слагаемых дивергенции вектора. Аппроксимации компонент градиента скаляра строятся как сопряженные, что обеспечивает знакоопределенность сеточного оператора уравнения для возвышения уровня. Симметрия обеспечивает выполнение на сеточном уровне основных метрических соотношений, что исключает возможность возникновения сеточных источников определенного типа.

Математическое моделирование; сеточные методы; криволинейные сетки; сеточные аппроксимации; законы сохранения.

V.S. Vasiliev

THE GRID APPROXIMATIONS AT THE SHALLOW WATER EQUATIONS ON A CURVE-LINEAR MESHES

The conservative and symmetric approximations of a item of divergent of vector are constructed. The approximations of gradient of scalar are constructed to provide conjugation. Conjugation provides positive definition grid operator of the free surface elevation equation. Symmetry provides a base metric identities therefore exclude arising of a grid sources of same types.

Mathematical simulation; grid methods; curve-linear meshes; grid approximations; conservative lows.

Введение. В [1] приводится достаточно общая система уравнений мелкой воды [2], метод расщепления по физическим процессам (метод поправки к давлению) применительно к разрешению системы уравнений в усредненных компонентах вектора скорости или в полных потоках [3], диссипативные фильтры [4]. Обсуждается задание различных сеточных функций на различных элементах (разнесенная сетка) криволинейной сетки, в том числе разложение векторных функций по контравариантному, ковариантному локальным и глобальному декартову базису.