Долгой Вячеслав Евгеньевич
Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.
E-mail: nikitina.vm@gmail.com.
347928, Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
Тел.: 88634371606.

Dolgoy Vaycheslav Evgenievich
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education "Southern Federal University".
E-mail: nikitina.vm@gmail.com.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: +7634371606.

УДК 517.968.2

А.В. Шишеня

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ВЫРОЖДЕННОСТИ ЯДРА ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Сформулирована и доказана теорема, дающая необходимое и достаточное условие вырожденности ядра интегрального уравнения.

Интегральное уравнение; вырожденные ядра; функциональный определитель; вронскиан.

A.V. Shishenya

NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITION OF INTEGRAL EQUATION KERNEL DEGENERATION

The theorem that gives necessary and sufficient condition of integral equation kernel degeneration is state and proved in the state.

Integral equation; degenerate kernel; functional determinant; Wronskian.

В настоящее время многие прикладные задачи приводят к интегральным уравнениям. С другой стороны, в функциональном анализе важным примером операторов являются интегральные операторы, поэтому их изучение имеет не только прикладное, но и теоретическое значение. Широким классом интегральных уравнений, поддающихся аналитическому решению, являются линейные интегральные уравнения с вырожденным ядром. В работах [1]-[3] изложены методы решения наиболее распространённых типов интегральных уравнений. Метод построения точных решений нелинейных интегральных уравнений второго рода с вырожденным ядром обобщается в работе [4]. В данной статье предложен критерий вырожденности ядра интегрального уравнения.

Сформулируем известное утверждение, которое потребуется при дальнейших рассуждениях.

Рассмотрим систему функций

$$\left\{c_k\left(x\right)\right\}_{k=1}^{n}. \tag{1}$$

Если каждая функция $c_k(x)$ системы (1) является n раз непрерывно дифференцируемой, то для линейной независимости системы (1) необходимо и достаточно, чтобы её определитель Вронского

$$\det W\left(\left\{c_k\left(x\right)\right\}_{k=1}^{n}\right)=\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_1' & c_2' & \dots & c_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1^{(n-1)} & c_2^{(n-1)} & \dots & c_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

был отличен от нуля.

Доказательство данного факта опирается на следующее свойство вронскиана: если система функций (1) является решением линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка, то для линейной независимости системы (1) необходимо и достаточно, чтобы её определитель Вронского (2) был отличен от нуля.

Рассмотрим, например, систему функций [5]:

$$c_1(x)=x^2,\ c_2(x)=\begin{cases}-x^2,\ x<0,\\ x^2,\ x\geq 0.\end{cases}.$$

Функция $c_2(x)$ разрывная. Найдем вронскиан:

$$\det W\left(\left\{c_k(x)\right\}_{k=1}^{2}\right)=\begin{vmatrix} x^2 & x^2 \\ 2x & 2x\end{vmatrix}=0 \text{ при } x>0,$$

$$\det W\left(\left\{c_k(x)\right\}_{k=1}^{2}\right)=\begin{vmatrix} x^2 & -x^2 \\ 2x & -2x\end{vmatrix}=0 \text{ при } x<0.$$

Ясно, что система функций линейно независима, хотя вронскиан равен нулю.

Пусть $K(x,y)\in C^n[a;b]\times[c,d]$ – некоторая функция двух переменных, n раз непрерывно дифференцируемая по каждой из переменных на прямоугольнике $[a;b]\times[c,d]$. Будем рассматривать эту функцию как ядро некоторого линейного интегрального оператора. Говорят, что ядро $K(x,y)$ является вырожденным, если для некоторого конечного числа n оно представимо в виде

$$K\left(x,y\right)=\sum_{k=1}^{n}a_k\left(x\right)\cdot b_k\left(y\right). \tag{3}$$

Будем считать системы функций $\{a_k(x)\}_{k=1}^{n}$ и $\{b_k(y)\}_{k=1}^{n}$ линейно независимыми на рассматриваемых промежутках. Если это не так, то всегда можно выразить функции a_k (b_k) через линейные комбинации линейно независимых и записать то же самое ядро в виде суммы меньшего числа слагаемых вида $\tilde{a}_k(x)\cdot\tilde{b}_k(y)$, так, что системы функций $\{\tilde{a}_k(x)\}_{k=1}^{m}$ и $\{\tilde{b}_k(y)\}_{k=1}^{m}$ будут линейно независимы. Будем также считать все функции n раз непрерывно дифференцируемыми.

Рассмотрим ядро вида $K(x,y)=\cos(n\arccos(xy))$. Можно показать, что оно вырождено для любого n. Например, для $n=2$:

$$K(x,y)=\cos(2\arccos(xy))=2\cos^2(\arccos(xy))-1=2x^2y^2-1.$$

Данное выражение совпадает с определением (3), если положить $a_1(x)=2x^2$, $b_1(x)=y^2$, $a_2(x)=1$, $b_2(x)=1$.

Для любого натурального числа m поставим в соответствие произвольному ядру $K(x,y)$ функциональную матрицу следующей структуры:

$$A_m[K](x,y)=\begin{pmatrix} K & K'_x & \dots & K^{(m-1)}_{x^{(m-1)}} \\ K'_y & K''_{xy} & \dots & K^{(m)}_{x^{(m-1)}y} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K^{(m-1)}_{y^{(m-1)}} & K^{(m)}_{xy^{(m-1)}} & \dots & K^{(2m-2)}_{x^{(m-1)}y^{(m-1)}} \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Теорема. Для того чтобы ядро $K(x,y)$ было вырожденным, т.е. разлагалось в ряд (5), необходимо и достаточно, чтобы $\det A_n[K](x,y)\neq 0$, $\det A_m[K](x,y)\equiv 0$, для $\forall m>n$.

□ **Необходимость.**

Пусть $K(x,y)$ – вырожденное ядро, т.е. функция $K(x,y)$ разлагается в сумму (3). Докажем, что $\det A_n[K](x,y)\neq 0$, $\det A_m[K](x,y)\equiv 0$, для $\forall m>n$.

Пусть $K(x,y)$ – вырожденное ядро, представимое в виде (3), и системы функций $\{a_k(x)\}_{k=1}^n$ и $\{b_k(x)\}_{k=1}^n$ – линейно независимы, но для $\forall m>n$ хотя бы одна из систем $\{a_k(x)\}_{k=1}^m$, $\{b_k(x)\}_{k=1}^m$ будет линейно зависима. Тогда согласно сформулированному выше утверждению $\det W\left(\{a_k(x)\}_{k=1}^n\right)\neq 0$, $\det W\left(\{b_k(x)\}_{k=1}^n\right)\neq 0$ и $\det\left[W\left(\{a_k(x)\}_{k=1}^m\right)\cdot W^T\left(\{b_k(x)\}_{k=1}^m\right)\right]=\det\left[W\left(\{a_k(x)\}_{k=1}^m\right)\right]\det\left[W^T\left(\{b_k(x)\}_{k=1}^m\right)\right]\equiv 0$.

Рассмотрим фундаментальные матрицы систем $\{a_k(x)\}_{k=1}^m$ и $\{b_k(x)\}_{k=1}^m$:

$$W\left(\{a_k(x)\}_{k=1}^m\right)=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ a'_1 & a'_2 & \dots & a'_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{(m-1)} & a_2^{(m-1)} & \dots & a_m^{(m-1)} \end{pmatrix},$$

$$W\left(\{b_k(x)\}_{k=1}^m\right)=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \\ b'_1 & b'_2 & \dots & b'_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1^{(m-1)} & b_2^{(m-1)} & \dots & b_m^{(m-1)} \end{pmatrix}$$

и их произведение $W\left(\left\{a_k\left(x\right)\right\}_{k=1}^{m}\right)W^T\left(\left\{b_k\left(x\right)\right\}_{k=1}^{m}\right)$:

$$\left[W\left(\left\{a_k(x)\right\}_{k=1}^{m}\right)\right]_{i,j} = \frac{d^i}{dx^i}a_{j+1}(x),\ i, j = 0...m-1,$$

$$\left[W^T\left(\left\{b_k(y)\right\}_{k=1}^{m}\right)\right]_{i,j} = \frac{d^j}{dy^j}b_{i+1}(y),\ i, j = 0...m-1,$$

$$\left[W\left(\left\{a_k\left(x\right)\right\}_{k=1}^{m}\right)\cdot W^T\left(\left\{b_k\left(x\right)\right\}_{k=1}^{m}\right)\right]_{i,j} = \sum_{k=0}^{m-1}\frac{d^i}{dx^i}a_{k+1}\left(x\right)\frac{d^j}{dy^j}b_{k+1}\left(y\right) =$$

$$= \frac{d^i}{dx^i}\frac{d^j}{dy^j}\sum_{k=0}^{m-1}a_{k+1}\left(x\right)b_{k+1}\left(y\right) = \frac{d^i}{dx^i}\frac{d^j}{dy^j}K\left(x, y\right);$$

$$W\left(\left\{a_k\left(x\right)\right\}_{k=1}^{m}\right)\cdot W^T\left(\left\{b_k\left(x\right)\right\}_{k=1}^{m}\right) = \begin{pmatrix} K & K'_x & ... & K^{(m-1)}_{x^{(m-1)}} \\ K'_y & K''_{xy} & ... & K^{(m)}_{x^{(m-1)}y} \\ ... & ... & ... & ... \\ K^{(m-1)}_{y^{(m-1)}} & K^{(m)}_{xy^{(m-1)}} & ... & K^{(2m-2)}_{x^{(m-1)}y^{(m-1)}} \end{pmatrix} =$$

$$= A_m\left[K\right]\left(x, y\right), \qquad (5)$$

значит $\det A_n[K](x, y) \neq 0$, $\det A_m[K](x, y) \equiv 0$, для $\forall m > n$.

■

□ **Достаточность**.

Пусть $\det A_n[K](x, y) \neq 0$, $\det A_m[K](x, y) = 0$, $m > n$. Докажем, что $K(x, y)$ – вырожденное ядро.

Матрицу $A_n[K](x, y)$ можно рассматривать как фундаментальную матрицу системы функций $\left\{K^{(k)}_{y^k}(x, y)\right\}_{k=0}^{n-1}$ относительно переменной x или системы функций $\left\{K^{(k)}_{x^k}(x, y)\right\}_{k=0}^{n-1}$ относительно переменной y. Тогда если $\det A_{n+1}[K](x, y) \equiv 0$, то система функций $\left\{K^{(k)}_{y^k}(x, y)\right\}_{k=0}^{n}$ линейно зависима для любого фиксированного значения переменной y, а система функций $\left\{K^{(k)}_{x^k}(x, y)\right\}_{k=0}^{n}$ линейно зависима для любого фиксированного значения переменной x:

$$\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\left(y\right)\cdot K^{(k)}_{y^k}\left(x, y\right) = 0, \qquad (6)$$

$$\sum_{k=0}^{n}\mu_k\left(x\right)\cdot K^{(k)}_{x^k}\left(x, y\right) = 0. \qquad (7)$$

Так как $\det A_n[K](x,y)\neq 0$, то коэффициенты $\lambda_k(y)$ и $\mu_k(y)$ отличны от нуля хотя бы в одной точке, в противном случае можно было бы исключить функции при нулевых коэффициентах с сохранением линейной зависимости систем, а значит, в этом случае $\det A_n[K](x,y)\equiv 0$. Из n раз непрерывной дифференцируемости ядра $K(x,y)$ по каждой из переменных следует, что $\lambda_k(y)\neq 0$ и $\mu_k(y)\neq 0$ ни в одной точке, в противном случае l-я производная от $K(x,y)$ терпела бы разрыв, значит правомерно деление на любую из функций $\lambda_k(y)$ и $\mu_k(y)$ в соответствующих равенствах:

$$K_{y^l}^{(l)}(x,y)=\sum_{\substack{k=0\\k\neq l}}^{n} c_{k,l}(y)\cdot K_{y^k}^{(k)}(x,y), \tag{8}$$

$$K_{x^l}^{(l)}(x,y)=\sum_{\substack{k=0\\k\neq l}}^{n} d_{k,l}(x)\cdot K_{x^k}^{(k)}(x,y). \tag{9}$$

Здесь $c_{k,l}(y)$ – коэффициент при $K_{y^k}^{(k)}(x,y)$ в разложении функции $K_{y^l}^{(l)}(x,y)$ в ряд (8), а $d_{k,l}(y)$ – коэффициент при $K_{x^k}^{(k)}(x,y)$ в разложении функции $K_{x^l}^{(l)}(x,y)$ в ряд (9).

Таким образом, любая производная до n-го порядка включительно выражается через линейную комбинацию производных от нулевого до n-го порядка включительно. Покажем, что имеет место более общее утверждение: производная любого порядка $m\geq n$ выражается через линейную комбинацию производных от нулевого до $n-1$-го порядка включительно.

Воспользуемся математической индукцией. В частности, из (8) при $l=n$:

$$K_{y^n}^{(n)}(x,y)=\sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n}(y)K_{y^k}^{(k)}(x,y). \tag{8'}$$

Вычисляя производную по переменной y, имеем:

$$K_{y^{n+1}}^{(n+1)}(x,y)=\sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n}(y)K_{y^{k+1}}^{(k+1)}(x,y)+\sum_{k=0}^{n-1}\left(c_{k,n}(y)\right)'_y K_{y^k}^{(k)}(x,y)=$$
$$=\left(c_{0,n}(y)\right)'_y K(x,y)+\sum_{k=1}^{n-1}\left(c_{k-1,n}(y)+\left(c_{k,n}(y)\right)'_y\right)K_{y^k}^{(k)}(x,y)+c_{n-1,n}(y)K_{y^n}^{(n)}(x,y).$$

Воспользуемся (8'):

$$\begin{aligned}K_{y^{n+1}}^{(n+1)}(x,y)&=\left(c_{0,n}(y)\right)'_y K(x,y)+\sum_{k=1}^{n-1}\left(c_{k-1,n}(y)+\left(c_{k,n}(y)\right)'_y\right)K_{y^k}^{(k)}(x,y)+\\&+c_{n-1,n}(y)\sum_{k=0}^{n-1}c_{k,n}(y)K_{y^k}^{(k)}(x,y)=\left(\left(c_{0,n}(y)\right)'_y+c_{n-1,n}(y)c_{0,n}(y)\right)K(x,y)+\\&+\sum_{k=1}^{n-1}\left(c_{k-1,n}(y)+\left(c_{k,n}(y)\right)'_y+c_{n-1,n}(y)c_{k,n}(y)\right)K_{y^k}^{(k)}(x,y).\end{aligned} \tag{10}$$

Таким образом мы получили выражение производной $n+1$-го порядка через линейную комбинацию производных от нулевого до $n-1$-го порядка включительно.

Пусть уже найдены выражения всех производных до m-го порядка через линейную комбинацию производных от нулевого до $n-1$-го порядка включительно:

$$K_{y^m}^{(m)}(x,y)=\sum_{k=0}^{n-1}\tilde{c}_k(y)K_{y^k}^{(k)}(x,y). \tag{11}$$

Покажем, как выразить производную $m+1$-го порядка. Продифференцируем (11) по y:

$$K_{y^{m+1}}^{(m+1)}(x,y)=\sum_{k=0}^{n-1}\tilde{c}_k(y)K_{y^{k+1}}^{(k+1)}(x,y)+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\tilde{c}_k(y)\right)'_y K_{y^k}^{(k)}(x,y)=$$

$$=\left(\tilde{c}_0(y)\right)'_y K(x,y)+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\tilde{c}_{k-1}(y)+\left(\tilde{c}_k(y)\right)'_y\right)K_{y^k}^{(k)}(x,y)+\tilde{c}_{n-1}(y)K_{y^n}^{(n)}(x,y).$$

Воспользуемся формулой (8'):

$$K_{y^{m+1}}^{(m+1)}(x,y)=\left(\tilde{c}_0(y)\right)'_y K(x,y)+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\tilde{c}_{k-1}(y)+\left(\tilde{c}_k(y)\right)'_y\right)K_{y^k}^{(k)}(x,y)+\tilde{c}_{n-1}(y)\sum_{k=0}^{n-1}c_{k,n}(y)K_{y^k}^{(k)}(x,y)=$$

$$=\left(\left(\tilde{c}_0(y)\right)'_y+\tilde{c}_{n-1}(y)\cdot c_{0,n}(y)\right)K(x,y)+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\tilde{c}_{k-1}(y)+\left(\tilde{c}_k(y)\right)'_y+\tilde{c}_{n-1}(y)\cdot c_{k,n}(y)\right)K_{y^k}^{(k)}(x,y).$$

Для простоты обозначим

$$K_{y^m}^{(m)}(x,y)=\sum_{l=0}^{n-1}c_{l,m}(y)K_{y^l}^{(l)}(x,y). \tag{12}$$

Разложим теперь функцию $K(x,y)$ в ряд Тейлора по переменной y в окрестности точки y_0:

$$K(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot K_{y^k}^{(k)}(x,y_0)(y-y_0)^k.$$

Воспользуемся формулой (12):

$$K(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{n-1}c_{l,k}(y_0)K_{y^l}^{(l)}(x,y_0)(y-y_0)^k=$$

$$=\sum_{l=0}^{n-1}K_{y^l}^{(l)}(x,y_0)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_{l,k}(y_0)}{k!}(y-y_0)^k=\sum_{l=0}^{n-1}a_l(x)b_l(y), \tag{13}$$

т.е. ядро вырождено.

■

Например, для ядра $K(x,y)=\cos(x+y)$:

$$K'_x(x,y)=-\sin(x+y),\ K''_{x^2}(x,y)=-\cos(x+y),$$

$$K'_y(x,y) = -\sin(x+y),\ K''_{y^2}(x,y) = -\cos(x+y),$$

$$K''_{xy}(x,y) = -\cos(x+y),\ K'''_{x^2y}(x,y) = \sin(x+y),$$

$$K'''_{y^2x}(x,y) = \sin(x+y),\ K''''_{x^2y^2}(x,y) = \cos(x+y),$$

$$\det A_2[K] = \begin{vmatrix} \cos(x+y) & -\sin(x+y) \\ -\sin(x+y) & -\cos(x+y) \end{vmatrix} = -\cos^2(x+y) - \sin^2(x+y) = -1,$$

$$\det A_3[K] = \begin{vmatrix} \cos(x+y) & -\sin(x+y) & -\cos(x+y) \\ -\sin(x+y) & -\cos(x+y) & \sin(x+y) \\ -\cos(x+y) & \sin(x+y) & \cos(x+y) \end{vmatrix} = 0,$$

так как первая и последняя строки линейно зависимы.

Получили, что $\det A_2[K] \neq 0$, а $\det A_3[K] \equiv 0$, значит ядро вырождено.

Заметим, что если ядро $K(x,y)$ является вырожденным, т.е. разлагается в ряд (3), то системы функций $\{a_k(x)\}_{k=1}^n$, $\{b_k(x)\}_{k=1}^n$ из этого разложения удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^i}{dx^i}\frac{d^j}{dy^j}\sum_{k=1}^n a_k(x) b_k(y) = \frac{d^i}{dx^i}\frac{d^j}{dy^j} K,\ i = 0...n,\ j = 0...n.$$

Автор выражает благодарность А.Ф. Ольховому и А.И. Сухинову за полезное обсуждение материалов статьи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Петровский И.Г.* Лекции по теории интегральных уравнений.
2. *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения.
3. *Михлин С.Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям.
4. *Полянин А.Д., Журов А.И.* Точные решения некоторых классов нелинейных интегральных, интегрофункциональных и интегродифференциальных уравнений // Докл. РАН. – 2008. – № 1. – С. 30-34.
5. http://ru.wikipedia.org/wiki/Вронскиан.

Шишеня Александр Владимирович

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: primat-55-alex@yandex.ru.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 88634322282; +79081761837.

Shishenya Alexander Vladimirovich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: primat-55-alex@yandex.ru.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: +78634322282; +79081761837.