Зуев Виктор Никанорович
Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.
E-mail: vnzuev@bk.ru.
347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
Тел.: 88634371606.

Семенистый Владимир Васильевич
E-mail: nvn@vm.tsure.ru.
Тел.: 88634371606.

Сухинов Александр Иванович
E-mail: sukhinov@gmail.com.
Тел.: 88634310599.

Zuev Viktor Nikonorovich
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.
E-mail: vnzuev@bk.ru.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: +78634371606.

Semenistay Vladimir Vasiljevich
E-mail: nvn@vm.tsure.ru.
Phone: +78634371606.

Sukhinov Alexander Ivanovich
E-mail: sukhinov@gmail.com.
Phone: +78634310599.

УДК 534.22

Т.А. Чистякова

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ХОХЛОВА – ЗАБОЛОТСКОЙ – КУЗНЕЦОВА

В работе приводится построение устойчивой конечно-разностной модели для уравнения Хохлова – Заболотской – Кузнецова (ХЗК). При построении дискретной модели использованы схемы расщепления по физическим процессам, что обеспечивает устойчивость модели.

Звуковой пучок; устойчивость; сходимость; расщепление по физическим процессам.

T.A. Chistyakova

RESEARCH OF STEADINESS OF FINITE-DIFFERENCE SCHEMES FOR KHOKHLOV – ZABOLOTSKAYA – KUZNETSOV EQUATION

Building of steady finite-difference model for Khokhlov – Zabolotskaya – Kuznetsov equation is considered in this work. Schemes of decomposition on physical processes were used for building of discrete model. This method provide steadiness of model.

A sound beam; steadiness; convergence property; decomposition on physical processes.

1. Введение. Устойчивость разностной схемы означает, что малые возмущения аргумента в начальных данных и правой части разностной схемы приводят к равномерно малому изменению решения.

Устойчивость – очень важное в приложениях свойство разностных схем. При практической реализации на ЭВМ разностных методов возникают, в частности, проблемы, связанные с невозможностью представления точных чисел в компьютере. В результате мы решаем не разностную схему, а несколько отличающееся от нее уравнение. Все такие возмущения в разностной схеме, грубо говоря, можно "перенести в правую часть" и, таким образом, считать, что в ЭВМ ищется решение не разностной схемы, но решение возмущенного уравнения. Свойство устойчивости разностной схемы при достаточно малых шагах сетки гарантирует близость между точным (теоретическим) решением разностной схемы и его практической реализацией. Источником возмущений служит не только невозможность точного представления данных в ЭВМ, но и неточность определения физических параметров модели, погрешность измерений и т.п.

2. Устойчивость разностных схем. Рассмотрим задачу Коши вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au, \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ -\infty < x < \infty, \tag{2}$$

где x – пространственная координата, t – время, A – линейный дифференциальный оператор, $u_0(x)$ – заданная функция. Аппроксимируем задачу Коши (1)–(2) следующей разностной задачей Коши:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \Lambda_1 u_j^{n+1} + \Lambda_2 u_j^n, \quad j = 0,1,2,...;\ n = 0,1,2,..., \tag{3}$$

$$u_j^0 = u_0(x_j), \tag{4}$$

где $u_j^n = u(x_j, t_n)$ – разностное решение, $x_j = jh, t_n = n\tau, h$ – шаг сетки на оси x, τ – временной шаг, Λ_1, Λ_2 – некоторые разностные операторы.

Перепишем (3) в виде

$$\left(E - \tau\Lambda_1\right)u_j^{n+1} = \left(E + \tau\Lambda_2\right)u_j^n, \tag{5}$$

где E – тождественный оператор, т.е. $Eu_j^n = u_j^n$. Предположим, что оператор $E - \tau\Lambda_1$ обратим. Тогда, разрешая уравнение (5) относительно u_j^{n+1}, получим:

$$u_j^{n+1} = Su_j^n, \tag{6}$$

где

$$S = \left(E - \tau\Lambda_1\right)^{-1}\left(E + \tau\Lambda_2\right). \tag{7}$$

Оператор S в (6) называется *оператором шага* разностной схемы.

Разностная схема (6) называется устойчивой, если при любых начальных данных $u_j^0 = u_0(x_j)$ выполняется оценка

$$\left\|u^n\right\| \le M \left\|u^0\right\|, \; n = 1, 2, \ldots,$$

где M – постоянная, не зависящая от τ, h, n. Поскольку оператор S предполагается не зависящим от n, то устойчивость эквивалентна равномерной ограниченности степеней оператора S:

$$\left\|S^n\right\| \le M, \; n = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

При исследовании устойчивости разностной схемы (6) по методу Фурье сначала подставляем в (6) решение вида

$$u^n(x) = \lambda^n U_0 e^{ikx}, \tag{9}$$

где λ – комплексное число, U_0 – постоянный вектор, k – вещественное волновое число, $i = \sqrt{-1}$. В результате подстановки (9) в (6) получим уравнение

$$\left(G - \lambda E\right) U_0 = 0. \tag{10}$$

Для существования нетривиального решения U_0 системы (10) необходимо, чтобы

$$\det\left(G - \lambda E\right) = 0. \tag{11}$$

Матрица G в (10), (11) называется матрицей перехода разностной схемы.

Уравнение (11) называется характеристическим уравнением разностной схемы. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ $(m \ge 1)$ – корни уравнения (11); они являются собственными значениями матрицы перехода G.

Необходимое условие устойчивости фон Неймана имеет вид

$$\left|\lambda_j\right| \le 1 + O(\tau) \;\; \textit{для} \;\; 0 < \tau < \Delta t, \;\; j = 1, \ldots, m, \;\; -\infty < k < \infty. \tag{12}$$

Условие Неймана (12) является *достаточным* для устойчивости, если матрица перехода G – нормальная матрица.

Матрица G называется *нормальной*, если

$$G^* G = G G^*, \tag{13}$$

где G^* – комплексно-сопряженная и транспонированная к G матрица; т.е., если $G = \left\|a_{jk} + i b_{jk}\right\|_1^m$, где a_{jk}, b_{jk} – вещественные числа, $i = \sqrt{-1}$, то тогда $G^* = \left\|a_{kj} - i b_{kj}\right\|_1^m$.

3. Постановка задачи. Задача распространения звуковых пучков в нелинейно-диссипативной среде представлена уравнением Хохлова – Заболотской – Кузнецова

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - v\frac{\partial v}{\partial \theta} - \Gamma \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}\right) = \frac{N}{4}\Delta_\perp v, \tag{14}$$

где $v = v(z,\theta,r)$ – величина скорости частиц среды, Γ – диссипативный параметр, θ – время в сопровождающей системе координат, z – нормированное расстояние, N – параметр уравнения, характеризующий соотношение нелинейности и диссипации, $\Delta_\perp$ – поперечный лапласиан $\left(\Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$.

Задача (14) задана при следующем начальном условии:

$$v(0,\theta,r) = V(\theta,r) \tag{15}$$

и граничных условиях:

- условия периодичности сигнала:

$$v(z,0,r) = v(z,2\pi,r), \tag{16}$$

$$v'_\theta(z,0,r) = v'_\theta(z,2\pi,r), \tag{17}$$

- условие симметричности:

$$v'_r\left(z,\theta,0\right) = 0, \tag{18}$$

- условие отсутствия энергии в бесконечно удаленной точке:

$$v\left(z,\theta,\infty\right) = 0. \tag{19}$$

4. Численная схема решения и ее устойчивость. Расчетная область по пространственным направлениям x, y, z представляет собой цилиндр. Для построения решения разностной схемы будем использовать равномерную сетку, записанную в цилиндрической системе координат:

$$w_h = \left\{ z_\iota = nh_z,\ \theta_j = jh_\theta,\ r_k = kh_r;\ n = \overline{1..N_z},\ j = \overline{0..M},\ k = \overline{0..P};\right.$$

$$\left. N_z h_z = l, Mh_\theta = 2\pi, Ph_r = R \right\},$$

где

n, j, k – индексы по направлениям z,θ,r соответственно;

h_z, h_θ, h_r – шаги по направлениям z,θ,r соответственно;

N_z, M, P – количество узлов сетки по направлениям z,θ,r соответственно;

l, R – высота и радиус цилиндра соответственно.

Введем обозначения:

$$u^n \equiv v^n,\ u^{n+1} \equiv w^n \equiv v^{n+\sigma},\ w^{n+1} \equiv v^{n+1}, v^{n+\tilde{\mu}} \equiv u^{n+\mu}, v^{n+\tilde{\lambda}} \equiv w^{n+\lambda}.$$

Дискретный аналог задачи (14)-(19) имеет вид (20)-(22) [1]

$$\frac{u_{0,k}^{n+1} - u_{0,k}^{n}}{h_z} - \frac{u_{1,k}^{n} u_{1,k}^{n+1} - u_{M-1,k}^{n} u_{M-1,k}^{n+1}}{4h_\theta} - \Gamma \frac{u_{1,k}^{n+1/2} - 2u_{0,k}^{n+1/2} + u_{M-1,k}^{n+1/2}}{h_\theta^{\ 2}} = 0,\ j = 0;$$

$$\frac{u_{j,k}^{n+1}-u_{j,k}^{n}}{h_z}-\frac{u_{j+1,k}^{n}u_{j+1,k}^{n+1}-u_{j-1,k}^{n}u_{j-1,k}^{n+1}}{4h_\theta}-\Gamma\frac{u_{j+1,k}^{n+1/2}-2u_{j,k}^{n+1/2}+u_{j-1,k}^{n+1/2}}{h_\theta^{2}}=0,1\le j\le M-2; \quad (20)$$

$$\frac{u_{M-1,k}^{n+1}-u_{M-1,k}^{n}}{h_z}-\frac{u_{M-1,k}^{n}u_{M-1,k}^{n+1}-u_{1,k}^{n}u_{1,k}^{n+1}}{4h_\theta}-\Gamma\frac{u_{0,k}^{n+1/2}-2u_{M-1,k}^{n+1/2}+u_{M-2,k}^{n+1/2}}{h_\theta^{2}}=0,\ j=M-1.$$

Уравнение (20) задано при следующем граничном условии:

$$u_{j,k}^{0}=V_{j,k}. \quad (21)$$

$$i\omega j\frac{c_{j,k}^{n+1}-c_{j,k}^{n}}{h_z}=\frac{N}{2}\frac{c_{j,1}^{n+1/2}-c_{j,0}^{n+1/2}}{h_r^2},\ \ k=0,$$

$$i\omega jk\frac{c_{j,k}^{n+1}-c_{j,k}^{n}}{h_z}=\frac{N}{4}\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{c_{j,k+1}^{n+1/2}-c_{j,k}^{n+1/2}}{h_r^{2}}-\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{c_{j,k}^{n+1/2}-c_{j,k-1}^{n+1/2}}{h_r^{2}}\right),\ 0<k<P, \quad (22)$$

$$c_{j,k}^{n+1}=0,\ \ k=P.$$

Уравнения (20)-(21) соответствуют первому этапу решения задачи, на котором учитываются нелинейность и диссипация процесса распространения волновых пучков. На втором этапе (уравнение (22)) учитывается дисперсия скорости движения волновых пучков в направлении, перпендикулярном направлению распространения пучка. Переход от поля w к полю c осуществляется в соответствии с формулой

$$w_{j,k}^{n}=\sum_{j=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}}c_{j,k}^{n}\exp(i\omega j\theta_j).$$

Докажем устойчивость схемы (20).

С учетом обозначений $u^{n+1/2}=\frac{1}{2}u^{n+1}+\frac{1}{2}u^{n}$ уравнения (20) примут вид

$$\frac{u_{0,k}^{n+1}-u_{0,k}^{n}}{h_z}-\frac{u_{1,k}^{n}u_{1,k}^{n+1}-u_{M-1,k}^{n}u_{M-1,k}^{n+1}}{4h_\theta}-$$

$$-\Gamma\frac{\frac{1}{2}\left(u_{1,k}^{n+1}+u_{1,k}^{n}\right)-\left(u_{0,k}^{n+1}+u_{0,k}^{n}\right)+\frac{1}{2}\left(u_{M-1,k}^{n+1}+u_{M-1,k}^{n}\right)}{h_\theta^{2}}=0,\ j=0;$$

$$\frac{u_{j,k}^{n+1}-u_{j,k}^{n}}{h_z}-\frac{u_{j+1,k}^{n}u_{j+1,k}^{n+1}-u_{j-1,k}^{n}u_{j-1,k}^{n+1}}{4h_\theta}-$$

$$-\Gamma\frac{\frac{1}{2}\left(u_{j+1,k}^{n+1}+u_{j+1,k}^{n}\right)-\left(u_{j,k}^{n+1}+u_{j,k}^{n}\right)+\frac{1}{2}\left(u_{j-1,k}^{n+1}+u_{j-1,k}^{n}\right)}{h_\theta^{2}}=0,1\le j\le M-2; \quad (23)$$

$$\frac{u_{M-1,k}^{n+1}-u_{M-1,k}^{n}}{h_z}-\frac{u_{M-1,k}^{n}u_{M-1,k}^{n+1}-u_{1,k}^{n}u_{1,k}^{n+1}}{4h_\theta}-$$

$$-\Gamma\frac{\frac{1}{2}\left(u_{0,k}^{n+1}+u_{0,k}^{n}\right)-\left(u_{M-1,k}^{n+1}+u_{M-1,k}^{n}\right)+\frac{1}{2}\left(u_{M-2,k}^{n+1}+u_{M-2,k}^{n}\right)}{h_\theta^{\,2}}=0,\ j=M-1.$$

Будем искать решение в виде [2]:

$$u_{j,k}^{n}=u_{j,k}^{n}(\alpha)=\lambda^{n}\cdot e^{ijkh\alpha},\tag{24}$$

где i – мнимая единица, j – номер узла по пространству, h – вещественное волновое число.

Если $|\lambda|>1+O(h_z)$, то схема не устойчива, т.е. не существует универсальной константы М, которую можно подставить в неравенство: $\left\|u^{n}\right\|_{(1)}\le M\left\|u^{0}\right\|_{(1)}$, т.е. $\left\|u^{n}\right\|_{(1)}\to\infty$ при $n\to\infty$.

Подставим выражение (24) в уравнение (23):

$$\frac{\lambda^{n+1}\cdot e^{ijkh\alpha}-\lambda^{n}\cdot e^{ijkh\alpha}}{h_z}-\frac{u_{j+1,k}^{n}\lambda^{n+1}\cdot e^{i(j+1)kh\alpha}-u_{j-1,k}^{n}\lambda^{n+1}\cdot e^{i(j-1)kh\alpha}}{4h_\theta}-$$

$$-\Gamma\frac{\frac{1}{2}\left(\lambda^{n+1}\cdot e^{i(j+1)kh\alpha}+\lambda^{n}\cdot e^{i(j+1)kh\alpha}\right)-\left(\lambda^{n+1}\cdot e^{ijkh\alpha}+\lambda^{n}\cdot e^{ijkh\alpha}\right)}{h_\theta^{\,2}}-$$

$$-\frac{1}{2}\Gamma\frac{\left(\lambda^{n+1}\cdot e^{i(j-1)kh\alpha}+\lambda^{n}\cdot e^{i(j-1)kh\alpha}\right)}{h_\theta^{2}}=0.$$

Разделим обе части уравнения на $\lambda^{n}e^{ijkh\alpha}$, получим:

$$\frac{\lambda-1}{h_z}-\frac{u_{j+1,k}^{n}\lambda\cdot e^{ikh\alpha}-u_{j-1,k}^{n}\lambda\cdot e^{-ikh\alpha}}{4h_\theta}-\Gamma\frac{\frac{1}{2}(\lambda+1)\cdot e^{ikh\alpha}-(\lambda+1)+\frac{1}{2}(\lambda+1)\cdot e^{-ikh\alpha}}{h_\theta^{\,2}}=0\cdot$$

Перенесем в правую часть слагаемые, не содержащие λ:

$$\frac{\lambda}{h_z}-\frac{u_{j+1,k}^{n}\lambda\cdot e^{ikh\alpha}-u_{j-1,k}^{n}\lambda\cdot e^{-ikh\alpha}}{4h_\theta}-\Gamma\frac{\frac{1}{2}\lambda\cdot e^{ikh\alpha}-\lambda+\frac{1}{2}\lambda\cdot e^{-ikh\alpha}}{h_\theta^{\,2}}=$$

$$=\frac{1}{h_z}+\Gamma\frac{\frac{1}{2}e^{ikh\alpha}-1+\frac{1}{2}e^{-ikh\alpha}}{h_\theta^2}.$$

Упростим полученное выражение:

$$\lambda\left(\frac{1}{h_z}-\frac{u_{j+1,k}^n e^{ikh\alpha}-u_{j-1,k}^n e^{-ikh\alpha}}{4h_\theta}-\Gamma\frac{\frac{1}{2}e^{ikh\alpha}-1+\frac{1}{2}e^{-ikh\alpha}}{h_\theta^2}\right)=\frac{1}{h_z}+\Gamma\frac{\frac{1}{2}e^{ikh\alpha}-1+\frac{1}{2}e^{-ikh\alpha}}{h_\theta^2}.$$

Воспользуемся формулой Эйлера $e^{ikh\alpha}=\cos(kh\alpha)+i\sin(kh\alpha)$:

$$\lambda\left(\frac{1}{h_z}-\frac{u_{j+1,k}^n\cos(kh\alpha)+iu_{j+1,k}^n\sin(kh\alpha)-u_{j-1,k}^n\cos(-kh\alpha)-iu_{j-1,k}^n\sin(-kh\alpha)}{4h_\theta}-\right.$$

$$\left.-\Gamma\frac{\cos(kh\alpha)+i\sin(kh\alpha)-2+\cos(-kh\alpha)+i\sin(-kh\alpha)}{2h_\theta^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{h_z}+\Gamma\frac{\left(\cos(kh\alpha)+i\sin(kh\alpha)\right)-2+\left(\cos(-kh\alpha)+i\sin(-kh\alpha)\right)}{2h_\theta^2}.$$

Воспользуемся свойствами четности функции $y=\cos x$ и нечетности функции $y=\sin x$:

$$\lambda\left(\frac{1}{h_z}-\frac{u_{j+1,k}^n\cos(kh\alpha)+iu_{j+1,k}^n\sin(kh\alpha)-u_{j-1,k}^n\cos(kh\alpha)+iu_{j-1,k}^n\sin(kh\alpha)}{4h_\theta}-\right.$$

$$\left.-\Gamma\frac{\cos(kh\alpha)+i\sin(kh\alpha)-2+\cos(kh\alpha)-i\sin(kh\alpha)}{2h_\theta^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{h_z}+\Gamma\frac{\left(\cos(kh\alpha)+i\sin(kh\alpha)\right)-2+\left(\cos(kh\alpha)-i\sin(kh\alpha)\right)}{2h_\theta^2}.$$

Упростим полученное уравнение:

$$\lambda\left(\frac{1}{h_z}-\frac{\cos(kh\alpha)\left(u_{j+1,k}^n-u_{j-1,k}^n\right)+i\sin(kh\alpha)\left(u_{j+1,k}^n+u_{j-1,k}^n\right)}{4h_\theta}-\Gamma\frac{\cos(kh\alpha)-1}{h_\theta^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{h_z}+\Gamma\frac{\cos(kh\alpha)-1}{h_\theta^2},$$

$$\lambda=\frac{1+\Gamma h_z\frac{\cos(kh\alpha)-1}{h_\theta^2}}{1-\frac{h_z\cos(kh\alpha)\left(u_{j+1,k}^n-u_{j-1,k}^n\right)+ih_z\sin(kh\alpha)\left(u_{j+1,k}^n+u_{j-1,k}^n\right)}{4h_\theta}-\Gamma h_z\frac{\cos(kh\alpha)-1}{h_\theta^2}}.$$

Возьмем модули от левой и правой частей полученного равенства:

$$|\lambda| = \frac{\left|1 + \Gamma h_z \dfrac{\cos(kh\alpha) - 1}{h_\theta^{\,2}}\right|}{\left|1 - \dfrac{h_z \cos(kh\alpha)\left(u^n_{j+1,k} - u^n_{j-1,k}\right) + ih_z \sin(kh\alpha)\left(u^n_{j+1,k} + u^n_{j-1,k}\right)}{4h_\theta} - \Gamma h_z \dfrac{\cos(kh\alpha) - 1}{h_\theta^{\,2}}\right|},$$

$$|\lambda| \le \frac{\left|1 + \Gamma h_z \dfrac{\cos(kh\alpha) - 1}{h_\theta^{\,2}}\right|}{\left|1 - \dfrac{h_z \cos(kh\alpha)\left(u^n_{j+1,k} - u^n_{j-1,k}\right)}{4h_\theta} - \Gamma h_z \dfrac{\cos(kh\alpha) - 1}{h_\theta^{\,2}}\right|}.$$

Преобразуем выражение $u^n_{j+1,k} - u^n_{j-1,k}$:

$$u^n_{j+1,k} - u^n_{j-1,k} = e^{i(j+1)kh\alpha}\lambda^n - e^{i(j-1)kh\alpha}\lambda^n =$$

$$e^{ijkh\alpha}\lambda^n e^{ikh\alpha} - e^{ijkh\alpha}\lambda^n e^{-ikh\alpha} = u^n_{j,k}\left(e^{ikh\alpha} - e^{-ikh\alpha}\right) =$$

$$= u^n_{j,k}\left(\cos(kh\alpha) + i\sin(kh\alpha) - \cos(kh\alpha) + i\sin(kh\alpha)\right) = 2iu^n_{j,k}\sin(kh\alpha).$$

С учетом последнего равенства неравенство примет вид

$$|\lambda| \le \frac{\left|1 + \Gamma h_z \dfrac{\cos(kh\alpha) - 1}{h_\theta^{\,2}}\right|}{\left|1 - \dfrac{h_z \cos(kh\alpha) iu^n_{j,k} \sin(kh\alpha)}{2h_\theta} - \Gamma h_z \dfrac{\cos(kh\alpha) - 1}{h_\theta^{\,2}}\right|},$$

$$|\lambda| \le \frac{\left|1 - \Gamma h_z \dfrac{1 - \cos(kh\alpha)}{h_\theta^{\,2}}\right|}{\left|1 + \Gamma h_z \dfrac{1 - \cos(kh\alpha)}{h_\theta^{\,2}}\right|}.$$

Так как $\Gamma h_z \dfrac{1 - \cos(kh\alpha)}{h_\theta^{\,2}} \ge 0$, то $|\lambda| \le 1 \;\; \forall k, h, a, \alpha \in R$ и схема (20) абсолютно устойчива.

Докажем устойчивость сеточного уравнения (22). Для этого преобразуем его:

$$\frac{c^{n+1}_{j,k}}{4} - \frac{c^n_{j,k}}{4} = -\frac{Nih_z}{4\omega j h_r^{\,2}}\left(\frac{c^{n+1/2}_{j,1}}{2} - \frac{c^{n+1/2}_{j,0}}{2}\right),\; k = 0,$$

$$kc^{n+1}_{j,k} - kc^n_{j,k} = -\frac{Nih_z}{4\omega j h_r^{\,2}}\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\left(c^{n+1/2}_{j,k+1} - c^{n+1/2}_{j,k}\right) - \left(k - \frac{1}{2}\right)\left(c^{n+1/2}_{j,k} - c^{n+1/2}_{j,k-1}\right)\right),$$

$$0 < k < P,$$

$$c_{j,k}^{n+1} = 0, \quad k = P.$$

Введем обозначения: $b = \dfrac{Nh_z}{4\omega j h_r^{\,2}}$, $K = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & P-1 \end{pmatrix}$,

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -0,5 & 2 & -1,5 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & -k+0,5 & 2k & -k-0,5 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & -P-0,5 & 2P-2 \end{pmatrix},$$

где A – положительно определенная, самосопряженная, трехдиагональная матрица.

С учетом введенных обозначений уравнения (22) примут вид

$$Kc^{n+1} - Kc^{n} = bAic^{n+1/2},.$$

$$Kc^{n+1} - Kc^{n} = 0,5bAi\left(c^{n+1} + c^{n}\right),$$

$$\left(K - 0,5bAi\right)c^{n+1} = \left(K + 0,5bAi\right)c^{n},$$

$$c^{n+1} = \left(K - 0,5bAi\right)^{-1}\left(K + 0,5bAi\right)c^{n}. \tag{25}$$

Введем обозначения: $B = K + 0,5bAi$, $S = B^{-1}B^{*}$.

Матрица S является самосопряженной, так как $B^{T} = B$.

Найдем матрицу, обратную S:

$$S^{-1} = \left(B^{-1}B^{*}\right)^{-1} = \left(B^{*}\right)^{-1}B = \left(B^{-1}B^{*}\right)^{*} = S^{*}..$$

Рассмотрим норму левой части уравнения (25):

$$\left\|c^{n+1}\right\|^{2} = \left\|Sc^{n}\right\|^{2} = \left(\left(Sc^{n}\right)^{*}\right)^{T} Sc^{n} = \left(\left(c^{n}\right)^{*}\right)^{T} S^{*}Sc^{n} = \left(\left(c^{n}\right)^{*}\right)^{T} S^{-1}Sc^{n} = \left(\left(c^{n}\right)^{*}\right)^{T} c^{n} = \left\|c^{n}\right\|^{2}.$$

Последнее равенство свидетельствует об устойчивости уравнений (22).

Заключение. В работе исследована устойчивость конечно-разностной модели распространения волновых пучков конечной амплитуды в нелинейно-диссипативной среде. В основе данной модели лежит уравнение Хохлова – Заболотской – Кузнецова. При построении дискретной модели использованы схемы расщепления по физическим процессам. Исходная задача решалась в 2 этапа. Первый этап представлен уравнением, описывающим нелинейность и диссипацию, которое целесообразно решать конечно-разностными методами. На втором этапе решается уравнение, описывающее процесс дисперсии, которое решается методом гармоник. Установлено, что при данном подходе можно получить устойчивую конечно-разностную модель. Разностные схемы, полученные путем непосредственной аппроксимации уравнения ХЗК, не принадлежат семейству, для которого применим принцип максимума, и, как правило, являются неустойчивыми. Выбор метода решения данной задачи, основанного на схемах расщепления по физическим процессам, обусловлен необходимостью выполнения устойчивости.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Чистякова Т.А.* Дискретная конечно-разностная модель распространения волновых пучков, описываемая квазилинейным уравнением параболического типа // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 8 (97). – С. 118-129.
2. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989.

Чистякова Татьяна Алексеевна
Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.
E-mail: a_tanya84@mail.ru.
347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
Тел.: 88634371606.

Chistyakova Tatyana Alexeevna
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education "Southern Federal University".
E-mail: a_tanya84@mail.ru.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: 88634371606.

УДК 681.518

С.А. Бутенков

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ ПАРАМЕТРИЗОВАННЫХ ФУНКЦИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ И НЕЧЕТКИХ ОПЕРАЦИЙ

В работе рассматривается новый подход к моделированию классов параметризованных функций. В результате открывается возможность построения универсальных модулей, настраивающихся на решение широкого круга задач без изменения общей структуры реализуемого ими алгоритма.

Нечеткие множества; параметризованные функции принадлежности; нечеткие операторы; аналитическая геометрия; R *-функции, программируемые логические схемы.*

S.A. Butenkov

GEOMETRICAL APPROACH TO PARAMETERIZED MEMBERSHIP FUNCTIONS DESIGN BY PARAMETERIZED OPERATIONS

The common interest to all facets of applied fuzzy modeling, inspired by recent works of L. Zadeh, are presented at contemporary investigations, because of outstanding properties of fuzzy logic systems to approximate the multivariate functions. Presented paper deals with the new approach to geometrical modeling of parameterized classes of membership functions of fuzzy sets, based on common geometric approach, established by V. Rvatchev R *-functions. As a result, very*