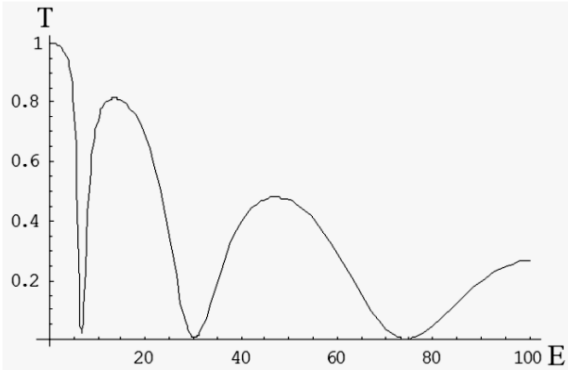

Рис. 3. Зависимость коэффициента прохождения от энергии

Перспективным направлением является разработка приборов с третьим – управляющим шириной барьера электродом, т.е. резонансно-туннельным транзистором.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Brown E.R., Somer T.C., Goodhue W.D., Parker W.D.* Millimeter Band Oscillations Based on Resonant Tunneling in Double Barrier Diode at Room Temperature // Appl. Phys. Lett. 1987. – V. 50. – № 2. – P. 83-95.
2. *Демиховский В.Я., Вугальтер Г.А.* Физика квантовых низкоразмерных структур. – М.: Логос, 2000.
3. *Ц. На.* Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. – М.: Мир, 1982.

Иващенко Сергей Николаевич
Технологический институт Федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.
E-mail: taurus6129@yandex.ru.
347928, Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
Тел.: +79515032853; 8863371940.

Ivashenko Sergey Nikolaevitch
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.
E-mail: taurus6129@yandex.ru.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: +79515032853, +7863371940.

УДК 537.87

И.Э. Гамолина

ПОСТАНОВКА ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ С НЕПЛОСКИМ ВОЛНОВЫМ ФРОНТОМ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Сформулирована граничная задача рассеяния электромагнитной волны с цилиндрическим волновым фронтом на бесконечной цилиндрической поверхности. Приведены уравнения в интегральной и дифференциальной форме.

Уравнения Максвелла; электромагнитная волна; прямая задача рассеяния.

I.E. Gamolina

PROBLEM OF SCATTERING ELECTROMAGNETIC WAVE WITH NONPLANE WAVE FRONT FROM THE CYLINDER SURFACE FORMULATION

In given work the boundary problem of scattering electromagnetic wave with cylinder wave front is formulated. The infinity cylinder is used as the scattering surface. The equations in differential and integral forms are presented.

Maxwell equations; electromagnetic wave; direct scattering problem.

В настоящее время все больший интерес вызывают теоретические проблемы исследования взаимодействия электромагнитных (ЭМ) полей, имеющих неплоский фронт волны. Решение прямых и, в особенности, обратных задач рассеяния имеет прикладное значение в радиолокации, развитии стелс-технологий [1], ближнепольной диагностике. Определение рассеивающих свойств объектов достаточно хорошо изучено для случая плоских волн. Получение численных решений для большого пласта задач прикладной электродинамики, построение математических моделей рассеяния ЭМ-волн с искривленным фронтом становится возможным благодаря мощным современным вычислительным комплексам, развитию эффективных методов и параллельных алгоритмов решения сеточных уравнений [2]. О некоторых подходах к решению задач рассеяния волн с искривленным фронтом указано в работе [3].

Как известно, в моделировании рассеяния ЭМ-полей основой являются уравнения Максвелла (в дифференциальной и интегральной форме), которые описывают вкупе с материальными уравнениями поведение полей в пространственно-временной области. В случае исследования полей, изменяющихся во времени по гармоническому закону, пользуются системой уравнений Максвелла для комплексных амплитуд.

Рассмотрим в общем виде постановку прямой задачи рассеяния монохроматической ЭМ-волны. Пусть в линейной однородной изотропной среде (V_0) с параметрами $\tilde{\varepsilon}_a, \mu_a$ расположен рассеивающий объект (V_1), ограниченный поверхностью S. К поверхности S предъявляется требование существования однозначной и непрерывной нормали в каждой точке. На рассеивающую поверхность падает ЭМ волна заданной поляризации, направление распространения которой в сферической системе координат (ССК) задается углами $(\theta_{\text{пад}}, \varphi_{\text{пад}})$.

Так как падающее ЭМ-поле является монохроматическим, а среда V_0 – линейной, рассеяние поля происходит на частоте падающего поля ω и от мгновенных значений полей можно перейти к комплексным амплитудам. Обозначим комплексные амплитуды векторов напряженностей падающего поля $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$.

Требуется определить комплексные амплитуды напряженностей рассеянного поля $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ и полного полей $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ в любой точке пространства V_0, удовлетворяющих уравнениям Максвелла, условиям излучения и граничным условиям.

Граничные условия.

На поверхности раздела двух сред выполняется условие непрерывности касательных составляющих полей

$$\mathbf{E}_\tau = \tilde{\mathbf{E}}_\tau, \mathbf{H}_\tau = \tilde{\mathbf{H}}_\tau, \quad (1)$$

где $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ – комплексные амплитуды векторов напряженностей полного ЭМ-поля в области V_0, $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}$ – комплексные амплитуды векторов напряженностей полного ЭМ-поля в области V_1, индексом τ обозначена касательная составляющая вектора.

Полное поле в области V_0 представляет собой сумму рассеянного и падающего полей: $\mathbf{E} = \mathbf{E_0} + \mathbf{E_1}, \mathbf{H} = \mathbf{H_0} + \mathbf{H_1}$.

В большинстве случаев поле внутри рассеивающего объекта не представляет интереса, поэтому используют импедансные граничные условия.

Импедансные граничные условия Леонтовича часто применяют при неплоских поверхностях раздела сред, эти условия позволяют не рассматривать ЭМ-поле внутри и учитывать влияние параметров рассеивающего тела на поле вне его [4].

Пусть комплексная функция $Z = Z(p)$ $(p \in S)$ описывает поверхностное сопротивление (импеданс) рассеивателя, тогда импедансные граничные условия для комплексных амплитуд на поверхности S имеют вид

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}] = Z\big[\mathbf{n}, [\mathbf{H}, \mathbf{n}]\big], \tag{2}$$

где $\mathbf{n}$ – орт внешней относительно области, в которой определяются векторы, нормали к поверхности S. Используя теорему эквивалентности $[\mathbf{n}, \mathbf{E}] = \mathbf{J}^{\text{м}}, [\mathbf{H}, \mathbf{n}] = \mathbf{J}^{\text{э}}$, где $J^{\text{э(м)}}$ – поверхностная плотность электрического (магнитных) тока, данное условие может быть записано в виде

$$\mathbf{J}^{\text{м}} = Z[\mathbf{n}, \mathbf{J}^{\text{э}}].$$

Существенным ограничением на применение импедансных граничных условий является следующее: поле, падающее на поверхность S, должно иметь одинаковую на этой поверхности амплитуду [4].

В случае идеально проводящей граничной области должно выполняться условие

$$\big[\mathbf{n}, \mathbf{E}\big] = E_\tau = 0 \tag{3а}$$

или

$$\frac{\partial H_\tau}{\partial \mathbf{n}} = 0. \tag{3б}$$

Интегральные соотношения для полей получим на основе леммы Лоренца, применимой в случае замкнутой поверхности S.

Лемма устанавливает соотношения между двумя решениями уравнений Максвелла, изменяющихся во времени по одному и тому же гармоническому закону, но различным образом распределенных в пространстве, и имеет вид

$$\int_{S+S_0} ([\mathbf{E}, \mathbf{H}^{\text{в}}] - [\mathbf{E}^{\text{в}}, \mathbf{H}])\mathbf{n}\, dS = \int_{V_q} (\mathbf{j}_{\text{в}}^{\text{м}}\mathbf{H} - \mathbf{j}_{\text{в}}^{\text{э}}\mathbf{E})\, dV, \tag{4}$$

где $\mathbf{j}_{\text{в}}^{\text{э(м)}}$ – объемная плотность электрического (магнитного) тока вспомогательного источника, V_q – объем, ограничивающий вспомогательную замкнутую поверхность S_0, внутри которой расположена поверхность S (рис. 1). Искомыми являются поля $\mathbf{H} = \mathbf{H}(p)$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(p)$ в области V_0.

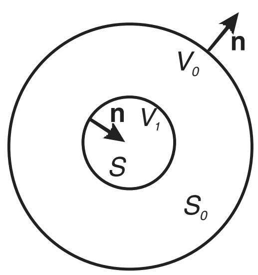

Рис. 1. Пояснения к лемме Лоренца

Другой подход к постановке задачи основан на численном решении уравнений Максвелла в дифференциальной форме и получаемых из них уравнений Гельмгольца.

Запишем первые два уравнения Максвелла в дифференциальной форме для комплексных амплитуд векторов напряженностей поля в случае линейной изотропной среды

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = i\omega\tilde{\varepsilon}_a\mathbf{E} + \mathbf{j}^{\text{эс}},\ \mathrm{rot}\mathbf{E} = -i\omega\mu_a\mathbf{H} - \mathbf{j}^{\text{мс}}, \tag{5}$$

где $\mathbf{j}^{\text{э(м)}\mathbf{c}}$ – объемная плотность стороннего электрического (магнитного) тока.

В области пространства, где сторонних токов нет ($\mathbf{j}^{\text{э(м)}\mathbf{c}} = 0$), справедливы однородные уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2\mathbf{H} + k^2\mathbf{H} = 0,$$

$$\nabla^2\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} = 0. \tag{6}$$

Часто для нахождения полей используют векторный электрический (магнитный) потенциал $\mathbf{A}^{\text{э(м)}}$, удовлетворяющий уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2\mathbf{A}^{\text{э(м)}} + k^2\mathbf{A}^{\text{э(м)}} = \mathbf{j}^{\text{э(м)}\mathbf{c}}.$$

Поля связаны с векторными потенциалами следующими соотношениями:

$$\mathbf{E} = -i\omega\mu_a\mathbf{A}^{\text{э}} + \frac{1}{i\omega\tilde{\varepsilon}_a}\mathrm{graddiv}\mathbf{A}^{\text{э}} - \mathrm{rot}\mathbf{A}^{\text{м}}, \tag{7а}$$

$$\mathbf{H} = -i\omega\tilde{\varepsilon}_a\mathbf{A}^{\text{м}} + \frac{1}{i\omega\mu_a}\mathrm{graddiv}\mathbf{A}^{\text{м}} + \mathrm{rot}\mathbf{A}^{\text{э}}. \tag{7б}$$

Конкретизируем задачу.

Пусть рассеивающая поверхность S представляет собой идеально проводящий круговой цилиндр, имеющий высоту $h \gg \lambda$, где λ – длина падающей ЭМ-волны, и радиусом кругового сечения a. Введем цилиндрическую систему координат (ЦСК) (r, φ, z), как показано на рис. 2.

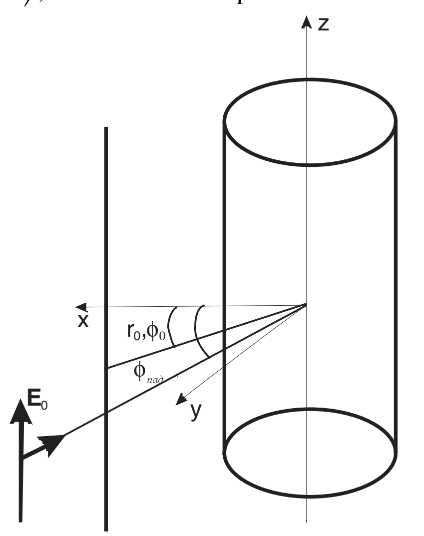

Рис. 2. Геометрия задачи

На цилиндр падает монохроматическая ЭМ-волна E-поляризации по нормали к образующей цилиндра, направление падения задается углом $\varphi_{пад}$. Будем полагать, что зависимость полей от координаты z отсутствует, следовательно, поставленную задачу можно считать двумерной.

Граничное условие согласно (3а) примет вид $E_z = 0, E_\varphi = 0$.

Получим интегральные соотношения для полей на основе (4). В качестве вспомогательного источника рассмотрим синфазную нить электрического тока с единичной амплитудой и длиной $L \gg \lambda$. Ток изменяется с частотой ω. Нить имеет координаты (r_0, φ_0) области V_0 и параллельна оси z ЦСК (рис. 2).

Вспомогательную поверхность выберем как круговой цилиндр радиусом ρ с центром, совпадающим с центром рассеивающей поверхности.

Комплексную амплитуду объемной плотности токов для нити зададим как

$$\mathbf{j}_{\text{в}}^{\text{э}} = \mathbf{1}_z \frac{1}{r}\delta(r - r_0)\delta(\varphi - \varphi_0), \mathbf{j}_{\text{в}}^{\text{м}} = 0.$$

Комплексная амплитуда электрического векторного потенциала $\mathbf{A}^{\text{эв}}$, возбуждаемого таким вспомогательным источником, имеет вид [4]

$$\mathbf{A}^{\text{эв}} = \mathbf{1}_z A_z, A_z = \frac{1}{4i}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in(\varphi-\varphi_0)} \begin{cases} J_n(kr_0)H_n^2(kr), r \geq r_0, \\ J_n(kr)H_n^2(kr_0), r \leq r_0, \end{cases} \tag{8}$$

где $J_n(x), H_n^2(x)$ – функции Бесселя и Ганкеля второго рода; (r, φ, z) – точка наблюдения, $\mathbf{1_z}$ – единичный орт, направленный вдоль оси z ЦСК.

Векторы напряженности вспомогательного поля определим из соотношений (7а), (5). Учитывая, что $\mathbf{A}^{\text{м}} = 0$, получим:

$$E_z^в = -i\omega\mu_a A_z, \;\; E_r^в = E_\varphi^в = 0,$$

$$H_r^в = \frac{i}{W}\frac{\partial E_z^в}{kr\partial\varphi}, \; H_\varphi^в = -\frac{i}{W}\frac{\partial E_z^в}{\partial(kr)}, H_z^в = 0,$$

где $W = 120\pi$ Ом – характеристическое сопротивление свободного пространства.

Следовательно, при $r \leq r_0$ получим:

$$E_z^в = \frac{-kW}{4}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in(\varphi-\varphi_0)} J_n(kr)H_n^2(kr_0), \tag{9}$$

$$H_r^в = -\frac{1}{4r}\sum_{n=-\infty}^{\infty} n e^{-in(\varphi-\varphi_0)} J_n(kr)H_n^2(kr_0), \tag{10}$$

$$H_\varphi^в = \frac{ik}{4}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in(\varphi-\varphi_0)} H_n^2(kr_0)\frac{\partial J_n(kr)}{\partial(kr)}. \tag{11}$$

Запишем (4) для случая, когда $\mathbf{n} = \mathbf{1}_r$:

$$\int_{S_0} \left(-E_z H_\varphi^{\text{в}} + E_z^{\text{в}} H_\varphi\right) dS + \int_{S} \left(-E_z H_\varphi^{\text{в}} + E_z^{\text{в}} H_\varphi\right) dS =$$

$$= \begin{cases} E_z(r_0, \varphi_0), (r_0, \varphi_0) \in V, \\ 0, \qquad\qquad (r_0, \varphi_0) \overline{\in} V. \end{cases}$$

С учетом выражений (9), (11), граничного условия (3а), и рассматривая двумерный случай (опуская рассмотрение зависимости по переменной z), получим:

$$\frac{-kW}{4}\int_0^{2\pi}\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in(\varphi-\varphi_0)}J_n(k\rho)H_n^2(kr_0)H_\varphi +$$

$$+\frac{i}{W}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in(\varphi-\varphi_0)}H_n^2(kr_0)\Big)\left.\frac{\partial J_n(kr)}{\partial(kr)}\right|_{r=\rho} E_z\ \rho d\varphi -$$

$$-\frac{kW}{4}\int_0^{2\pi}\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in(\varphi-\varphi_0)}J_n(ka)H_n^2(kr_0)H_\varphi d\varphi =$$

$$=\begin{cases}E_z(r_0,\varphi_0), (r_0,\varphi_0)\in V,\\ 0, \qquad (r_0,\varphi_0)\,\overline{\in}\, V.\end{cases} \tag{12}$$

Таким образом, получено интегральное соотношение для нахождения полных полей. Так как компоненты полей H_φ и E_z связаны соотношениями (5), то в качестве неизвестного можно рассматривать поле $E_z = E_{0z} + E_{1z}$.

Выражение (12) может быть применено к случаям различного фронта падающей волны.

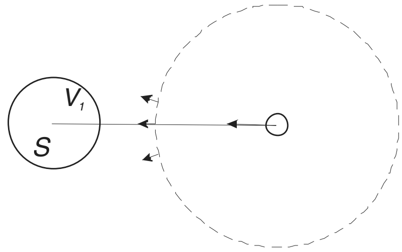

Рис. 3

Если падающая волна имеет цилиндрический фронт, поверхность равных фаз имеет центр кривизны, удаленный от начала выбранной системы координат, на расстояние R (рис. 3), то ток на цилиндре, являющийся источником рассеянного поля, имеет различную амплитуду и фазу, зависящие от взаиморасположения цилиндра и поверхности равных фаз. Поэтому применение импедансных граничных условий становится возможным только в случае дискретизации: разбиения поверхности S на малые участки, в пределах которых амплитуду поля можно считать постоянной.

В рамках данной геометрии задачи рассмотрим возможность построения математической модели для случая рассеяния ЭМ-волны Е-поляризации на цилиндрической импедансной поверхности.

В области V_0 первичное поле имеет z компоненту, отличную от нуля: $E_{0z} = E_{0z}(r,\varphi)$, следовательно, вторичное поле также имеет только z-компоненту $E_{1z} = E_{1z}(r,\varphi)$, удовлетворяющую однородному уравнению Гельмгольца (6):

$$\Delta_\perp E_{1z} + k^2 E_{1z} = 0. \tag{14}$$

Разобьем поверхность S радиально на M участков шириной $\Delta\varphi$, таких, что $M\Delta\varphi = 2\pi a$, на каждом элементарном участке должно выполняться граничное условие (2):

$$E_{1z} - ZH_{1\varphi} = -(E_{0z} - ZH_{0\varphi})$$

или с учетом того, что $\frac{\partial E_z}{\partial r} = i\omega\mu_a H_\varphi$, получим граничные условия следующего вида:

$$E_{1z} + \frac{iZ}{\omega\mu_a}\frac{\partial E_{1z}}{\partial r}\bigg|_{r=a} = -(E_{0z} + \frac{iZ}{\omega\mu_a}\frac{\partial E_{0z}}{\partial r})\bigg|_{r=a}. \quad (15)$$

Таким образом, необходимо найти решение краевой задачи третьего рода (со смешанными граничными условиями), включающей уравнение (14), граничное условие (15) и условия излучения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК:

1. *Лагарьков А.Н., Погосян М.А.* Фундаментальные проблемы стелс-технологий // Вестник российской академии наук. – 2003.– Т. 73, № 9.
2. *Сухинов А.И.* Двумерные схемы расщепления и некоторые их приложения. – М.: МАКС Пресс, 2005. – 408 с.
3. *Гамолина И.Э.* О некоторых подходах к построению математических моделей рассеяния электромагнитной волны в ближней зоне // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 8 (97). – С. 240-241.
4. *Петров Б.М.* Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Радио и связь, 2000. – 558 с.

Гамолина Ирина Эдуардовна
Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.
E-mail: iegam@rambler.ru.
347928, Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
Тел.: 88634371606.

Gamolina Irina Eduardovna
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.
E-mail: iegam@rambler.ru.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: +78634371606.

УДК 517.958:550.3 + 27.41.77

А.С. Черепанцев

РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ЭВОЛЮЦИИ ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ УПРУГИХ БЛОКОВ

Представленная работа имеет целью развитие исследований по построению дискретной механической блоковой модели, в которой взаимодействие элементов определяет возникновение самоорганизованного критического состояния. Показано, что критическое состояние в двумерной системе возникает при обязательном выполнении условия равенст-