

УДК 518.5.001.57

О.А. Савицкий, Т.А. Чистякова**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ
УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ПУЧКОВ ВЫСОКОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ**

Работа посвящена построению и исследованию математической модели распространения ультразвуковых пучков высокой интенсивности. В работе представлен метод расщепления по физическим процессам применительно к рассматриваемой модели.

Схемы с весами; интегроинтерполяционный метод; преобразование Фурье.

О.А. Savitsky, T.A. Chistyakova**MATHEMATICAL MODEL OF PROPAGATION OF ULTRASONIC BEAMS
OF HIGH INTENSITY**

This work is dedicated to building and researching of mathematical model of propagation of ultrasonic beams of high intensity. The method of decomposition on physical processes with reference to considered model is presented in this work.

Schemes with weight; integrointerpolation method; Fourier transformation.

Закономерности распространения волновых пучков большой амплитуды отличаются от законов линейного распространения, поэтому любые приложения интенсивных звуковых полей требуют уточнения физической и математической модели эволюции волновых возмущений конечной амплитуды. Характерными областями приложения ультразвука высокой амплитуды являются:

- 1) ультразвуковая медицинская томография;
- 2) ультразвуковая терапия (пространственное избирательное воздействие на камни в почках, желчном пузыре, злокачественные новообразования);
- 3) ультразвуковой неразрушающий контроль.

Нелинейные процессы в ультразвуковых пучках вследствие отсутствия физической дисперсии в большинстве звукопрозрачных сред представляют собой сложные пространственно-временные явления, описываемые квазилинейными уравнениями со степенным характером нелинейных членов. В большинстве практически важных случаев решение модельных уравнений не может быть получено аналитическими методами. Единственной возможностью изучения и применения нелинейных волновых процессов является математическое моделирование.

Задача распространения звуковых пучков в нелинейно-диссипативной среде представлена уравнением Хохлова – Заболотской – Кузнецова:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - v \frac{\partial v}{\partial \theta} - \Gamma \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) = \frac{N}{4} \Delta_{\perp} v, \quad (1)$$

где $v = v(z, \theta, r)$ – величина скорости частиц среды, Γ – диссипативный параметр, θ – время в сопровождающей системе координат, z – нормированное расстояние, N – параметр уравнения, характеризующий соотношение нелинейности и диссипации, Δ_{\perp} – поперечный лапласиан $\left(\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$.

Задача (1) задана при следующем начальном условии:

$$v(0, \theta, r) = V(\theta, r) \quad (2)$$

и граничных условиях:

- ◆ условия периодичности сигнала

$$v(z, 0, r) = v(z, 2\pi, r), \quad (3)$$

$$v'_\theta(z, 0, r) = v'_\theta(z, 2\pi, r), \quad (4)$$

- ◆ условие симметричности

$$v'_r(z, \theta, 0) = 0, \quad (5)$$

- ◆ условие отсутствия энергии в бесконечно удаленной точке

$$v(z, \theta, \infty) = 0. \quad (6)$$

Расчетная область по пространственным направлениям x, y, z представляет собой цилиндр (рис. 1). Для построения решения разностной схемы будем использовать равномерную сетку, записанную в цилиндрической системе координат:

$$w_h = \{z_i = nh_z, \theta_j = jh_\theta, r_k = kh_r; n = \overline{1..N_z}, j = \overline{0..M}, k = \overline{0..P};$$

$$N_z h_z = l, M h_\theta = 2\pi, P h_r = R\},$$

где n, j, k – индексы по направлениям z, θ, r соответственно;

h_z, h_θ, h_r – шаги по направлениям z, θ, r соответственно;

N_z, M, P – количество узлов сетки по направлениям z, θ, r соответственно;

l, R – высота и радиус цилиндра соответственно.

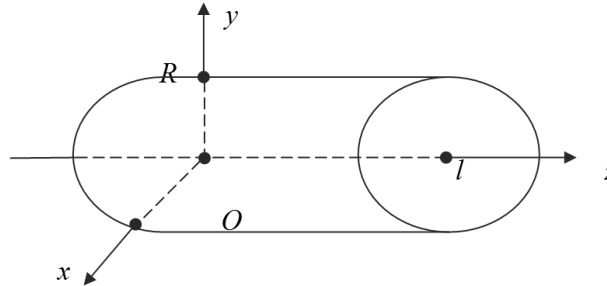


Рис. 1. Расчетная область

В уравнении (1) аппроксимируем частную производную по пространственной координате z , в результате чего получим

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v^{n+1} - v^n}{h_z} - v^n \frac{\partial v^{n+\hat{\mu}}}{\partial \theta} - \Gamma \frac{\partial^2 v^{n+\hat{\mu}}}{\partial \theta^2} \right) = \frac{N}{4} \Delta_\perp v^{n+\tilde{\lambda}},$$

где $v^{n+1} = v^{n+1}(\theta, r)$ – величина скорости частиц среды на текущем пространственном слое по z ; $v^n = v^n(\theta, r)$ – на предыдущем пространственном слое; $v^{n+\tilde{\mu}}, v^{n+\tilde{\lambda}}$ – значения поля V на некотором пространственном слое.

Введем обозначения:

$$u^n \equiv v^n, u^{n+1} \equiv w^n \equiv v^{n+\sigma}, w^{n+1} \equiv v^{n+1}, v^{n+\tilde{\mu}} \equiv u^{n+\mu}, v^{n+\tilde{\lambda}} \equiv w^{n+\lambda}.$$

С учетом введенных обозначений и в соответствии с методом расщепления по физическим процессам задача (1) может быть записана в виде следующей системы уравнений [1]:

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{h_z} - u^n \frac{\partial u^{n+\mu}}{\partial \theta} - \Gamma \frac{\partial^2 u^{n+\mu}}{\partial \theta^2} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{w^{n+1} - w^n}{h_z} \right) &= \frac{N}{4} \Delta_{\perp} w^{n+\lambda}, \end{aligned}$$

где

$$u^{n+\mu} = \mu u^{n+1} + (1 - \mu) u^n, w^{n+\lambda} = \lambda w^{n+1} + (1 - \lambda) w^n, \mu \in [0; 1], \lambda \in [0; 1].$$

Задачу (1) – (6) будем решать в 2 этапа. На первом шаге производится учет нелинейных и диссипативных процессов. Эта задача представлена уравнением Бюргерса [2]:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{h_z} - u^n \frac{\partial u^{n+\mu}}{\partial \theta} - \Gamma \frac{\partial^2 u^{n+\mu}}{\partial \theta^2} = 0. \quad (7)$$

Уравнение представлено при следующих граничных условиях (предполагается периодичность волнового процесса):

$$u(z, 0, r) = u(z, 2\pi, r), \quad (8)$$

$$u'_\theta(z, 0, r) = u'_\theta(z, 2\pi, r). \quad (9)$$

На данном этапе осуществляется переход от пространственного слоя n по координате z к некоторому промежуточному слою $n + \sigma$.

На втором шаге считаем величину скорости волны с учетом дисперсии, т.е. диффузии энергии в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{w^{n+1} - w^n}{h_z} \right) = \frac{N}{4} \Delta_{\perp} w^{n+\lambda}, \quad (10)$$

где h_z – шаг по пространству вдоль оси z ; w^n – величина скорости частиц среды в поле волны на промежуточном временном слое; w^{n+1} – величина скорости волны на следующем временном слое.

Уравнение (10) задано при следующих граничных условиях:

$$w'_r(z, \theta, 0) = 0, \quad (11)$$

$$w(z, \theta, \infty) = 0. \quad (12)$$

На данном этапе осуществляется переход от некоторого промежуточного пространственного слоя к слою $n + 1$.

Дискретная модель для исходной задачи представлена уравнениями (13) для задачи (7):

$$\begin{aligned} \frac{u_{0,k}^{n+1} - u_{0,k}^n}{h_z} - \frac{u_{1,k}^n u_{1,k}^{n+1} - u_{M-1,k}^n u_{M-1,k}^{n+1}}{4h_\theta} - \Gamma \frac{u_{1,k}^{n+1/2} - 2u_{0,k}^{n+1/2} + u_{M-1,k}^{n+1/2}}{h_\theta^2} &= 0, \quad j = 0; \\ \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{h_z} - \frac{u_{j+1,k}^n u_{j+1,k}^{n+1} - u_{j-1,k}^n u_{j-1,k}^{n+1}}{4h_\theta} - \Gamma \frac{u_{j+1,k}^{n+1/2} - 2u_{j,k}^{n+1/2} + u_{j-1,k}^{n+1/2}}{h_\theta^2} &= 0, \quad 1 \leq j \leq M-2; \\ \frac{u_{M-1,k}^{n+1} - u_{M-1,k}^n}{h_z} - \frac{u_{M-1,k}^n u_{M-1,k}^{n+1} - u_{1,k}^n u_{1,k}^{n+1}}{4h_\theta} - \Gamma \frac{u_{0,k}^{n+1/2} - 2u_{M-1,k}^{n+1/2} + u_{M-2,k}^{n+1/2}}{h_\theta^2} &= 0, \quad j = M-1; \end{aligned} \quad (13)$$

и уравнениями (14) для задачи (10) [1]:

$$\begin{aligned} i\omega j \frac{c_{j,k}^{n+1} - c_{j,k}^n}{h_z} &= \frac{N}{2} \frac{c_{j,1}^{n+1/2} - c_{j,0}^{n+1/2}}{h_r^2}, \quad k = 0, \\ i\omega j k \frac{c_{j,k}^{n+1} - c_{j,k}^n}{h_z} &= \frac{N}{4} \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) \frac{c_{j,k+1}^{n+1/2} - c_{j,k}^{n+1/2}}{h_r^2} - \left(k - \frac{1}{2} \right) \frac{c_{j,k}^{n+1/2} - c_{j,k-1}^{n+1/2}}{h_r^2} \right), \quad 0 < k < P, \\ c_{j,k}^{n+1} &= 0. \quad k = P. \end{aligned} \quad (14)$$

Дискретная задача (13), соответствующая непрерывной задаче (7), получена путем аппроксимации уравнения при помощи интегро-интерполяционного метода с использованием схем с весами. При этом оператор нелинейности аппроксимирован таким образом, чтобы его дискретный аналог был линеен и имел второй порядок точности, что соответствует погрешности аппроксимации, свойственной схемам с весами. В случае нелинейной аппроксимации приходится проводить линеаризацию по Ньютону, что ведет к дополнительным временным затратам [3].

Дискретная задача (14), соответствующая непрерывной задаче (10), получена при помощи интерполирования уравнения тригонометрическими полиномами

$$w_{j,k}^n = \sum_{j=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}} c_{j,k}^n \exp(i\omega j \theta_j)$$

и последующим взятием от непрерывных функций частных производных по переменной θ .

Трудоёмкость рассмотренного метода расщепления по физическим процессам составляет $Q = 20PM \log_2 M + 51PM$ арифметических операций, при этом основное количество операций требует преобразование Фурье.

Рассмотрим метод гармоник применительно к задаче (1). Интерполируя задачу тригонометрическими полиномами

$$v(z, \theta, r) = \sum_{j=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}} c_j(z, r) \exp(i\omega j\theta)$$

и взяв частные производные по переменной θ , получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial z} c_j i\omega j - \sum_{m=0}^{\frac{M}{2}-j} c_m^* c_{j+m} \omega^2 m j + \sum_{m=0}^{j-1} c_m c_{j-m} \omega^2 m j + \sum_{m=j}^{\frac{M}{2}} c_m c_{m-j}^* \omega^2 m j + \Gamma c_j i(\omega j)^3 = \frac{N}{4} \Delta_{\perp} c_j. \quad (15)$$

При решении данной задачи наиболее трудоемким является расчет сумм

$$- \sum_{m=0}^{\frac{M}{2}-j} c_m^* c_{j+m} \omega^2 m j + \sum_{m=0}^{j-1} c_m c_{j-m} \omega^2 m j + \sum_{m=j}^{\frac{M}{2}} c_m c_{m-j}^* \omega^2 m j,$$

которые соответствуют оператору нелинейности. В случае использования явных схем приходится умножать матрицу на вектор, трудоемкость чего составляет N^2 операций, а в случае неявных схем и схем с весами приходится решать системы уравнений с матрицей общего вида, что требует $\frac{2}{3} N^3$ операций.

Проведем исследование дискретной модели на основе сравнения предложенных методов, результаты запишем в табл. 1.

Таблица 1

Трудоемкости методов

	Трудоемкость метода расщепления по физическим процессам	Трудоемкость метода гармоник
Явная схема	$20PM \log_2 M + 18PM$	$O(M^2 P)$
Неявная схема	$20PM \log_2 M + 48PM$	$O(M^3 P)$
Схема с весами	$20PM \log_2 M + 51PM$	$O(M^3 P)$

Применение схем с весами позволяет получить второй порядок погрешности аппроксимации по всем переменным: $O(h_{\theta}^2 + h_z^2 + h_r^2)$, в то время как явные и неявные схемы дают порядок $O(h_{\theta}^2 + h_z + h_r^2)$. Из табл. 1 видно, что метод расщепления по физическим процессам является значительно менее трудоемким, чем метод гармоник при одинаковом порядке погрешности аппроксимации. Следует отметить, что для применения данных методов необходимо проверять выполнение следующих условий:

$$h_z \leq \frac{h_{\theta}}{|u|} \text{ – условие Куранта;}$$

$$h_{\theta} \leq \frac{2\Gamma}{|u|} \text{ – условие неотрицательности коэффициентов сеточного уравнения;}$$

$$h_z \leq \frac{h_\theta^2}{2\Gamma} - \text{условие устойчивости для явной схемы.}$$

Приведем результаты численных экспериментов.

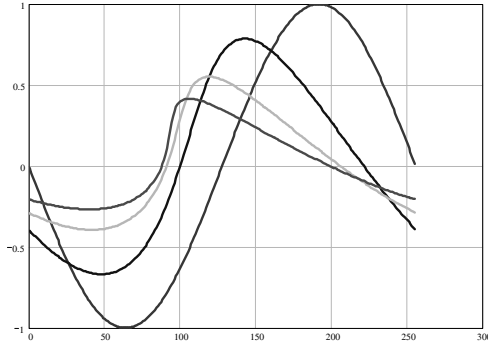


Рис. 2. Распространение звукового пучка при $r = 0$, $\Gamma = 0,001$, $N = 0,5$, $P = 100$, $M = 2^{12}$

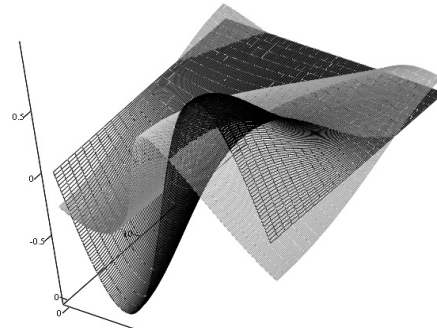


Рис. 3. Распространение звукового пучка при $z = 1$, $\Gamma = 0,001$, $N = 0,5$, $P = 100$, $M = 2^{12}$

Начальное значение скорости частиц среды на рис. 2 и рис. 3: $V(\theta, r) = e^{-r^2} \sin \theta$.

На рис.2 параметр z принимает значения $z = 0, 0,5, 1, 1,5$. На рис. 1 более темным цветом изображена исходная функция скорости частиц среды при $z = 0$, а более светлым – функция скорости частиц при $z = 1$. Видно, что с ростом z амплитуда сигнала на его оси уменьшается и пучок расширяется.

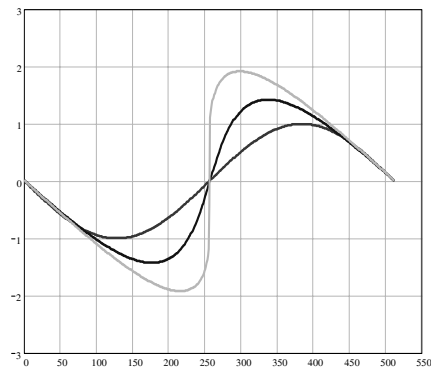


Рис. 4. Распространение звукового пучка при $r = 0$, $\Gamma = 0,001$, $N = 0,3$, $P = 100$, $M = 2^{13}$

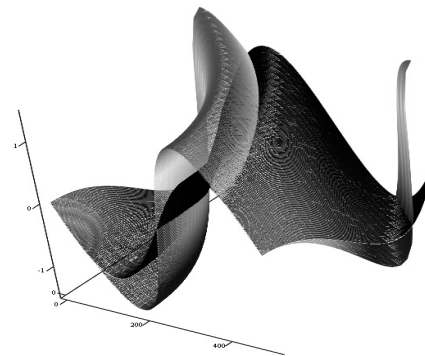


Рис. 5. Распространение звукового пучка при $z = 0,5$, $\Gamma = 0,001$, $N = 0,3$, $P = 100$, $M = 2^{13}$

Начальное значение скорости частиц среды на рис. 4 и рис. 5: $V(\theta, r) = \sin(\theta + kr^2)$. На рис. параметр Z принимает значения $z = 0, 0,5, 1$. На рис. 1 более темным цветом изображена исходная функция скорости частиц среды при $z = 0$, а более светлым – функция скорости частиц при $z = 0,5$. Видно, что с ростом Z амплитуда волны увеличивается и происходит усиление сигнала за счет фокусировки.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Чистякова Т.А.* Дискретная конечно-разностная модель распространения волновых пучков, описываемая квазилинейным уравнением параболического типа // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 8 (97). – С. 118-129.
2. *Кузнецов В.П.* Исследования нелинейных и параметрических процессов в акустике океана. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. – М., 2005.
3. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989.

Савицкий Олег Анатольевич

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: osav66@mail.ru.

347932 г. Таганрог, ул. Ломоносова, 57/1, кв. 57.

Тел.: 88634315638; 89034354049.

Чистякова Татьяна Алексеевна

E-mail: a_tanya84@mail.ru.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 88634371606.

Savitsky Oleg Anatoljevich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: osav66@mail.ru.

57/1, Lomonosov street, sq. 57, Taganrog, 347932, Russia.

Phone: +78634315638; +79034354049.

Chistyakova Tatyana Alexeevna

E-mail: a_tanya84@mail.ru.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: +78634371606.

УДК 539.3

Т.В. Домашенкина, А.В. Наседкин, А.Н. Рыбняец

**КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ ФОКУСИРУЮЩЕГО
УЛЬТРАЗВУКОВОГО ПЬЕЗОИЗЛУЧАТЕЛЯ В РЕЖИМЕ
УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ**

Рассмотрена связанная задача акустопьезоэлектричества о возбуждении в акустической среде ультразвуковых волн сферическим пьезоэлектрическим излучателем с цилиндрическим отверстием. Отмечены особенности конечно-элементного моделирования рассматриваемой задачи в пакете ANSYS. Продемонстрирована эффективность конечно-элементных моделей для расчетов ультразвуковых акустических волн в фокальной зоне.

Метод конечных элементов; связанные задачи; пьезоэлектричество; ультразвуковые излучатели.