

УДК 518.5.001.57

И.А. Ляпунова

**УСТОЙЧИВОСТЬ МОДЕЛИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
КУКУРУЗЫ ВСЛЕДСТВИЕ ПРОЦЕССОВ ЗАПАЗДЫВАНИЯ**

Показано воздействие процессов динамической самоорганизации на пространственное распределение кукурузы, возникающих вследствие эффектов запаздывания. Построена и численно исследована модель пространственного распределения кукурузы вследствие процессов запаздывания, исследована ее устойчивость.

Трансгенная кукуруза; плотность биомассы; динамическая устойчивость (неустойчивость).

I.A. Lyapunova

**STABILITY OF MAIZE SPATIAL DISTRIBUTION MODEL ARISING FROM
THE EFFECTS OF RETARDATION**

This paper shows the impact of processes of dynamic self-organization on the spatial distribution of maize, arising from the effects of retardation. A model of the spatial distribution of maize as a result of the dynamic processes of self-organization and study its stability.

Transgene corn; biomass density; dynamic stability (instability).

Введение. Кукуруза является основной сельскохозяйственной культурой юга России: Кабардино-Балкарской республики, Ростовской области, Краснодарского и Ставропольского краев. Но, несмотря на высокотехнологичный уровень культивирования и обработки, ущерб, наносимый насекомыми-вредителями, по-прежнему высок. В связи с этим все более актуально выращивание новых ГМ-сортов кукурузы, содержащих ген почвенной бактерии, называемых *трансгенными*.

Многие демогенетические модели, в частности [1], позволяют достаточно эффективно исследовать поведение и динамику численности конкретного вида вредителя под воздействием трансгенного растения. Одними из наиболее успешных моделей являются двухуровневые демогенетические модели «растительный ресурс – вредитель» и «вредитель-паразитоид», предложенные Жадановской Е.А. [2]. Однако не всегда удается контролировать численность Вт-устойчивых особей, например, кукурузного мотылька, несмотря на то, что площадь и форма основного поля и «убежищ» оптимальны.

Наиболее существенная особенность многих фитоценозов заключается в более или менее выраженной пространственной неоднородности: большинство видов растений, как правило, заполняют места обитания весьма неравномерно, образуя скопления и пустоты, что далеко не всегда удается убедительно объяснить неоднородностью условий внешней среды [3]. То же относится и к кукурузе, хотя процесс посадки и культивирования культуры здесь контролируются. Неоднородность в данном случае объясняется внутривидовым разнообразием в зависимости, например, от высоты и диаметра ствола. В свою очередь, учет пространственных взаимодействий приводит к появлению пятнистости (диссипативных) структур как стационарных, так и нестационарных (периодических в окрестности точки бифуркации).

Построение модели. Рассмотрим теперь распределение кукурузы на некотором одномерном физическом пространстве Ω , $R=R(x,t)$ – прирост биомассы кукурузы; q – коэффициент внутривидовой конкуренции, определяемый в зависимости от средней высоты и среднего диаметра ствола. Уравнение динамики плотности биомассы:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = r_R R \left(1 - q(t) \frac{R}{K_R}\right). \quad (1)$$

Известно, что все одновидовые модели с непрерывным временем, в которых рассматривается динамика только общей численности популяции и не учитывается фактор запаздывания, не дают ничего, кроме монотонного перехода к равновесному состоянию. Однако, для большинства однолетних растений, к которым относится кукуруза, имеет место эффект запаздывания. Согласно [4] уравнение роста биомассы популяции (7), для любого момента времени $t \in [0; T]$ может быть записано в виде

$$R'(x, t) = [r_R - q(t) \frac{r_R}{K_R} R(x, t - \tau)] R(x, t), \quad (2)$$

где τ – средняя продолжительность жизни поколения популяции.

Из (2) следует, что скорость роста популяции зависит не только от общей численности $R(x, t)$ в любой момент времени t , определяемой емкостью среды обитания K_R , но и от количества взрослых особей в момент времени $t - \tau$.

Численное исследование модели. Для исследования поведения решения воспользуемся модифицированным методом Эйлера второго порядка точности.

Пусть имеется решения в точке $R_k = R_k(t_k)$. Опишем процедуру нахождения решения в точке модифицированным методом Эйлера второго порядка точности. В этом методе надо использовать значение решения в точке и предварительное решение в точке $t_k = t_k + h$. Соответственно от этих точек надо брать запаздывание τ , то есть надо найти значение решения в точках $t_k - \tau$, $t_k + h/2 - \tau$.

На рис. 1 показана зависимость прироста биомассы кукурузы от времени с учетом фактора запаздывания. Здесь $0 \leq t \leq 0,6$, $\tau = 0,5$.

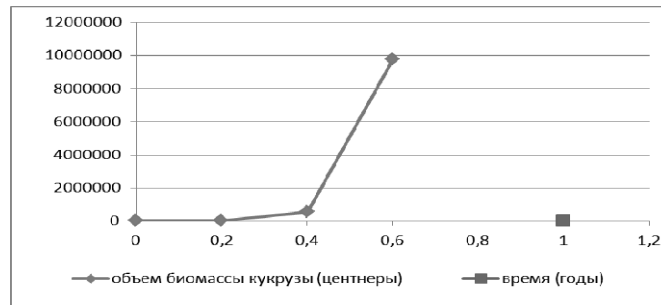


Рис. 1



Рис. 2

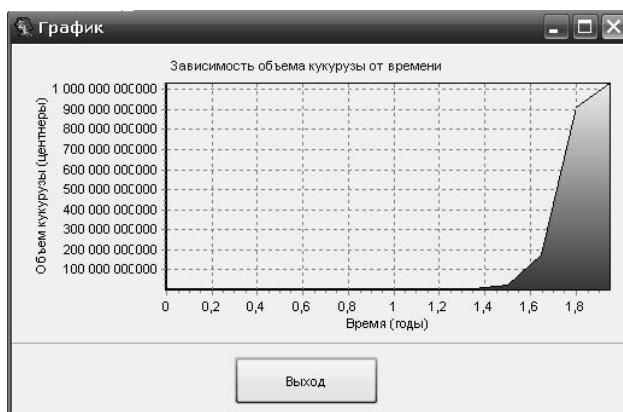


Рис. 3

Начальный объем биомассы кукурузы составлял $R_0(x,t)=1500$ ц.

Период исследования 2 года $t \in [0; 2]$. Как видно по рисункам, при заданном t поведение решения не меняется и носит колебательный характер.

Как правило, в задачах с запаздывающим аргументом интересуются поведением решения на достаточно больших интервалах времени. При этом выполняется от сотен до тысяч шагов по времени. Но трансгенные зерна не дают потомства, поэтому рассматривать большие промежутки времени не имеет смысла.

Варьируя коэффициент внутривидовой конкуренции, видим, что с увеличением конкуренции q скорость прироста биомассы резко снижается. На рис. 4 и рис. 5 представлены значения для $q=0,2$ и $q=1$.

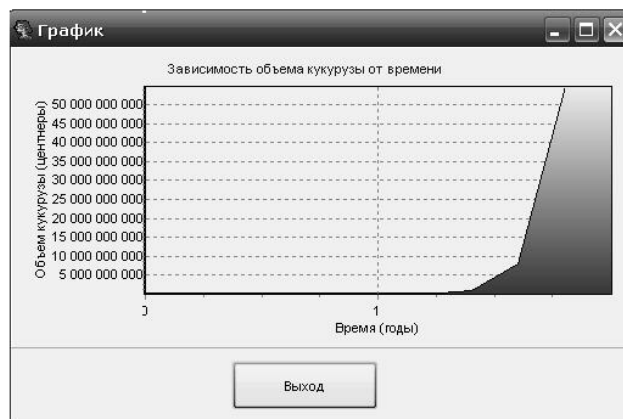


Рис. 4

Моделирование воздействия процессов динамической самоорганизации на пространственное распределение кукурузы. Учитывая сезонные изменения среды $r_0(t)$, скорость иммиграции $f(t)$, и выражая эффект запаздывания интегралом

$$\int_0^t R(x, \xi) \varphi(t - \xi) d\xi = \int_0^t \varphi(\tau) R(x, t - \tau) d\tau, \quad (3)$$

из (2) получим следующее уравнение:

$$R'(x, t) = \left\{ r_R - \frac{r_R}{K_R} q(t) [R(x, t) - \int_0^t R(x, \xi) \varphi(t - \xi) d\xi] + r_0(t) \right\} R(x, t) \quad (4)$$



Рис. 5

Интеграл (4) при $t = \text{const} > 0$ сводится к известным в математической биологии уравнениям рождаемости [4]. Скоростью иммиграции $f(t)$ в случае кукурузы можно пренебречь, так как размеры поля считаются постоянными.

Функция $\varphi = \varphi(\tau)$, $0 \leq \tau \leq t$ в (2)-(4) является диссипативной памятью и выражается следующей формулой:

$$\varphi(\tau) = \lambda_0 + \frac{\lambda_1 \tau^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}, \quad (5)$$

где $\lambda_0, \lambda_1 = \text{const} \geq 0$ – параметры явления последействия.

Итак, учитывая преобразования Римана – Лиувилля и (5), получаем уравнение для описания динамики популяции:

$$R'(x, t) = \left\{ r_R - \frac{r_R}{K_R} q(t) [R(\xi, t) - (\lambda_0 D_{0t}^{-1} + \lambda_1 D_{0t}^{\alpha}) R(\xi, t)] + r_0(t) \right\} R(x, t). \quad (6)$$

Здесь D_{ct}^{α} – оператор дробного интегрирования порядка α в смысле Римана-Лиувилля или *фрактальное количество жизни популяции* по Нахушеву.

Множитель $\lambda_0 D_{0t}^{-1} R(\xi, t) + \lambda_1 D_{0t}^{\alpha} R(\xi, t)$ уравнения (6) выражает нелокальное смещение.

Для любого $\alpha < 0$ имеем

$$D_{0t}^{\alpha} 1 = t^{\alpha} / \Gamma(1-\alpha). \quad (7)$$

Полученное таким образом уравнение показывает структуру пространственного распределения кукурузы как следствие процессов динамической самоорганизации (или биологической синергетики).

Исследование устойчивости. Пусть r – малое отклонение от состояния равновесия $R=R^*$.

Подставим функцию $R=R^*+r$ в (6), введем обозначения: $r_R=A_1$, $\frac{r_R}{K_R}q(t)=A_2$

и отбросим нелинейные члены как величины более высокого порядка малости. В результате получим *уравнение первого приближения*:

$$\dot{r} - A_1 R^* r - A_2 (\lambda_0 D_{0t}^{-1} r + \lambda_1 D_{0t}^\alpha r) R^* = 0. \quad (8)$$

Интересующее нас решение $r(t)$ уравнения (8) должно удовлетворять начальному условию

$$\dot{r}(0) + A_1 R^* r(0) = 0. \quad (9)$$

Когда главным фактором, влияющим на биомассу популяции, служит не эффект Ферхюльста, а явления последействия с параметрами $\lambda_0 = 0, \lambda_1 > 0$, можно положить $A_1=0$. Тогда уравнение (8) будет эквивалентно нагруженному интегральному уравнению Вольтерра второго рода [5]:

$$R'(t) + \lambda D_{0t}^{\alpha-1} R(\xi) = r(0). \quad (10)$$

Решение уравнения (10)

$$R(t) = R(0) \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{(1-\alpha)k}}{\Gamma(\mu + (1-\alpha)k)}, \quad (11)$$

где $z = \lambda t^{1-\alpha}$ дает функцию типа Миттаг – Леффлэра [5]

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k/\rho)}. \quad (12)$$

Согласно А.М. Нахушеву [4], для любого $\lambda > 0$ существует нечетное число n моментов времени t_1, t_2, \dots, t_n , где отклонение от равновесного состояния популяции обращается в нуль.

Верно и обратное: при данном t_0 задача имеет одно нетривиальное решение.

Заключение. Учет запаздывания в моделях взаимодействующих видов приводит к системам уравнений, изучение существования и устойчивости которых представляет серьезную математическую проблему, а сами решения, описывающие динамику численности, могут носить не только колебательный, но и квазистохастический характер. Устойчивость или неустойчивость модели может зависеть от периода запаздывания.

Обычно не все члены уравнений содержат запаздывание. Например, увеличение численности популяции может сказаться на скорости роста лишь через определенное время, когда молодые особи достигнут репродуктивного возраста, а хищничество сокращает численность жертв в тот же момент времени и не содержит запаздывания. Исследование моделей, учитывающих эти обстоятельства,

показывает, что саморегулирование жертв стабилизирует систему, а запаздывание в реакции хищника – дестабилизирует. Короткие времена запаздывания в размножении как хищника, так и жертвы могут как стабилизировать, так и дестабилизировать систему. Последний вывод опровергает общепринятое ранее представление о том, что малое запаздывание слабо сказывается на поведении системы. Интуитивное представление о том, что чем больше запаздывание, тем больше его дестабилизирующий эффект, неправильно. В некоторых системах взаимодействующих видов малые времена запаздывания наиболее опасны для стабильности системы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Сухинов А.И., Кажарова И.А.* Устойчивость модели пространственно-временной динамики стеблевого кукурузного мотылька под воздействием трансгенной кукурузы // Известия. – Новочеркасск, ЮРГТУ, 2007.
2. *Жадановская Е.А., Тютюнов Ю.В., Ардити Р.* Моделирование стратегии “высокая доза – убежище” при использовании генетически модифицированной кукурузы для подавления кукурузного стеблевого мотылька // Известия вузов, Северо-Кавказский регион. Естественные науки, 2006. – Приложение, № 11. – 5 с.
3. *Фрисман Е.Я.* Изменение характера динамики численности популяции: механизмы перехода к хаосу // Вести. ДВО РАН. – 1995. – № 4. – С. 97-106.
4. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа, 1995.
5. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003.

Ляпунова Ирина Артуровна

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

347928, Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

E-mail: setchan2009@gmail.com.

Тел.: +79281047300.

Lyapunova Irina Arturovna

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: setchan2009@gmail.com.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: +79281047300.