Alekseenko Elena Viktorovna
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education "Southern Federal University".
E-mail lena.alekseenko@gmail.com.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: +78634371606.

УДК 519.6

Е.Ф. Тимофеева

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ВОЛН ДЛЯ ВОДОЕМА С НЕЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИЕЙ РЕЛЬЕФА ДНА

Предложена непрерывная математическая модель, описывающая распространение поверхностных волн от начальных возмущений. Для случая теории мелкой воды с нелинейной функцией рельефа дна проведена схематизация задачи, на основе которой получено ее аналитическое решение.

Поверхностные волны; рельеф дна; метод Римана; гипергеометрическое уравнение Гаусса.

E.F. Timofeeva

MATHEMATICAL MODEL OF WAVE MOVEMENT IN WATER BASIN WITH NONLINEAR RELIEF FUNCTION

It was suggested a continuous mathematical models which describes the distribution of superficial waves from initial disturbance. It was done oversimplification of the task for the case of low water theory with unlinear relief function, on the basis of which its analytical solution was obtained.

Superficial waves; bottom relief; Reaman's method; Gauss hypergeometric equation.

Проведенный анализ показал, что в классических исследованиях процессов движения поверхностных волн от начального возмущения для дна наклонной формы наиболее часто встречающимися функциями в уравнении, описывающем глубину жидкости, являются x, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[6]{x^5}$, $\sqrt[8]{x^7}$. Поэтому целесообразно рассмотреть обобщающий случай для водоема с нелинейной функцией рельефа дна.

В настоящей работе рассматривается декартова прямоугольная система координат, начало которой совмещено с урезом воды. Ось Ox совмещена с поверхностью невозмущенной жидкости и направлена в сторону моря.

Решается задача Коши для пространственно-одномерного уравнения гиперболического типа, описывающая движение волны на свободной поверхности жидкости переменной глубины:

$$\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t^2} = g\frac{\partial}{\partial x}\left(h(x)\frac{\partial \varsigma}{\partial x}\right), \tag{1}$$

$$\varsigma(x,0) = \varphi_0(x), \tag{2}$$

$$\varsigma_t'(x,0) = \varphi_1(x), \tag{3}$$

где $\varsigma(x,t)$ – отклонение свободной поверхности жидкости от равновесного состояния; x – горизонтальная координата; t – время; g – ускорение силы тяжести; $h(x)$ – глубина жидкости.

В данной модели уравнение для глубины жидкости $h(x)$ в развернутой форме имеет вид $h(x)=\dfrac{h_0 x^p}{x_0}$, $x<x_0$, $0<p\le 1$, где h_0 – максимальная глубина жидкости рассматриваемой области, x_0 – граница области, тогда уравнение (1) преобразуется следующим образом:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varsigma}{\partial t^2}-\frac{x^p}{x_0}\frac{\partial^2\varsigma}{\partial x^2}-\frac{px^{p-1}}{x_0}\frac{\partial\varsigma}{\partial x}=0, \tag{4}$$

$$a^2=gh_0.$$

Решение поставленной задачи находится с помощью метода Римана. Для этого вводится замена переменных в уравнении (4):

$$t=\frac{\sqrt{x_0}}{2a}(\xi+\eta),\quad x=\left(\frac{(2-p)}{4}(\xi-\eta)\right)^{\frac{2}{2-p}},$$

$$\xi=\frac{a}{\sqrt{x_0}}t+\frac{2}{2-p}x^{\frac{2-p}{2}},$$

$$\eta=\frac{a}{\sqrt{x_0}}t-\frac{2}{2-p}x^{\frac{2-p}{2}}, \tag{5}$$

с учетом которой уравнение (4) в канонической форме имеет вид

$$\frac{\partial^2\varsigma}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{p}{2(2-p)(\xi-\eta)}\left(\frac{\partial\varsigma}{\partial\eta}-\frac{\partial\varsigma}{\partial\xi}\right)=0\,. \tag{6}$$

Прямая $t=0$ переходит в наклонную прямую $\eta=-\xi$. Начальные условия в новых переменных принимают вид

$$\varsigma\big|_{\eta=-\xi}=\varphi_0\left(\left(\frac{2-p}{4}(\xi-\eta)\right)^{\frac{2}{2-p}}\right),$$

$$\left.\frac{\partial\varsigma}{\partial t}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial\varsigma}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t}\right|_{\xi=\frac{2}{2-p}x^{\frac{2-p}{2}}}+\left.\frac{\partial\varsigma}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t}\right|_{\eta=-\frac{2}{2-p}x^{\frac{2-p}{2}}}=\left.\left(\frac{\partial\varsigma}{\partial\xi}\frac{a}{\sqrt{x_0}}+\frac{\partial\varsigma}{\partial\eta}\frac{a}{\sqrt{x_0}}\right)\right|_{\eta=-\xi}=$$

$$=\frac{a}{\sqrt{x_0}}\sqrt{2}\left.\left(\frac{\partial\varsigma}{\partial\xi}\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\partial\varsigma}{\partial\eta}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right|_{\eta=-\xi}.$$

Полученное выражение представляет собой производную функции ς по направлению вектора $\left(\frac{a}{\sqrt{x_0}},\frac{a}{\sqrt{x_0}}\right)^T$, перпендикулярного к прямой $\eta=-\xi$. Значит, это производная функции ς по нормали к прямой $\eta=-\xi$, т.е.

$$\left.\frac{\partial\varsigma}{\partial t}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial\varsigma}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\eta=-\xi}=\varphi_1\left(\left(\frac{2-p}{4}(\xi-\eta)\right)^{\frac{2}{2-p}}\right). \tag{7}$$

Функция $\varsigma=\varsigma(\xi,\eta)$ заменяется на $u=\varsigma(\xi-\eta)^{\frac{p}{2-p}}$. Тогда $\varsigma=\dfrac{u}{(\xi-\eta)^{\frac{p}{2-p}}}$ и уравнение (6) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{4p-3p^2}{4(2-p)^2(\xi-\eta)^2}u=0 \tag{8}$$

или

$$Lu=u_{\xi\eta}+au_\xi+bu_\eta+cu=0, \tag{9}$$

где $a=b=0$, $c=-\dfrac{4p-3p^2}{4(2-p)^2(\xi-\eta)^2}$. Тогда решение уравнения (9) выражается формулой Римана:

$$u(M)=\frac{u(P)v(P)+u(Q)v(Q)}{2}-\frac{1}{2}\int_{PQ}\left(uv_\xi-vu_\xi-2bvu\right)d\xi+\left(uv_\eta-vu_\eta+2avu\right)d\eta,$$

где P, M, Q – вершины характеристического треугольника (рис. 1); $u(\xi,\eta)$ – решение уравнения (9); $v(\xi,\eta)$ – функция Римана, решение задачи Гурса.

Для решения поставленной пространственной задачи находится частное решение сопряженного уравнения

$$L^*v=v_{\xi\eta}-av_\xi-bv_\eta+cv=0, \tag{10}$$

удовлетворяющего следующим условиям на характеристиках:

$v_\xi(\xi,\eta_0,\xi_0,\eta_0)=0$ на MQ,

$v_\eta(\xi_0,\eta,\xi_0,\eta_0)=0$ на MP,

$v(\xi_0,\eta_0,\xi_0,\eta_0)=1$ в точке M.

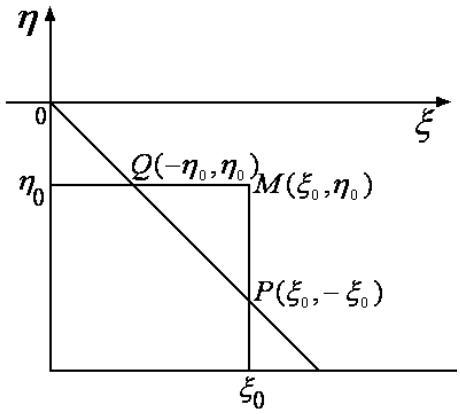

Рис. 1

Частное решение уравнения (10) на характеристиках равно единице, т.е.

$$v(\xi,\eta_0,\xi_0,\eta_0)=1 \text{ на } MQ,$$
$$v(\xi_0,\eta,\xi_0,\eta_0)=1 \text{ на } MP,$$
$$v(\xi_0,\eta_0,\xi_0,\eta_0)=1 \text{ в точке } M.$$

Решение ищется в виде $v(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0)=w(\theta)$,

где

$$\theta=\frac{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}{(\xi_0-\eta_0)(\xi-\eta)}, \tag{11}$$

$$\theta(1-\theta)w''(\theta)+(1-2\theta)w'(\theta)-\frac{4p-3p^2}{4(2-p)^2}w(\theta)=0\cdot \tag{12}$$

Это уравнение является частным случаем гипергеометрического уравнения Гаусса:

$$x(1-x)y''(x)+[\gamma-(1+\alpha+\beta)x]y'(x)-\alpha\beta y(x)=0,$$

решение которого можно представить в виде степенного ряда

$$y(x)=F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\sum_{K=1}^{\infty}\frac{C_{\alpha+K-1}^{K}\cdot C_{\beta+K-1}^{K}}{C_{\gamma+K-1}^{K}}\cdot x^K,\ |x|<1$$

или в виде интеграла

$$y(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tx)^{-\alpha}dt\cdot$$

Здесь $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ – гипергеометрическая функция,

$$\alpha\cdot\beta=\frac{4p-3p^2}{4(2-p)^2},\ 1+\alpha+\beta=2,\ \Rightarrow\ \alpha=\frac{4-3p}{2(2-p)},\ \beta=\frac{p}{2(2-p)},\ \gamma=1.$$

В данных условиях решение уравнения (12) будет иметь вид

$$w(\theta)=F\left(\frac{4-3p}{2(2-p)},\frac{p}{2(2-p)},1,\theta\right),\ |\theta|<1. \tag{13}$$

Условия на характеристиках преобразуются к виду

$$v(\xi,\eta_0,\xi_0,\eta_0)=v(\xi_0,\eta,\xi,\eta_0)=w(0)=1. \tag{15}$$

Таким образом, функция

$$v(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0)=w(\theta)=w\left(\frac{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}{(\xi_0-\eta_0)(\xi-\eta)}\right)$$

является функцией Римана.

Так как $v(P)=v(Q)=1$ и $\eta=-\xi$ на PQ, то

$$u(\xi_0,\eta_0)=\frac{u(P)+u(Q)}{2}+\frac{1}{2}\int_{-\eta_0}^{\xi_0}v\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)d\xi-u\left(\frac{\partial v}{\partial\xi}+\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)d\xi. \tag{16}$$

Для нахождения решения задачи необходимо вычислить производные, входящие в формулу (16), учитывая, что $x=\left(\frac{2-p}{4}(\xi-\eta)\right)^{\frac{2}{2-p}}$, $t=\frac{\sqrt{x_0}}{2a}(\xi+\eta)$:

$$\left.\frac{\partial\varsigma}{\partial\xi}\right|_{\eta=-\xi}=2^{\frac{2}{p-2}}((2-p)\xi)^{\frac{2}{p-2}}\frac{\partial\varsigma}{\partial x}+\left.\frac{\sqrt{x_0}}{2a}\frac{\partial\varsigma}{\partial t}\right|_{t=0},$$

$$\left.\frac{\partial\varsigma}{\partial\eta}\right|_{\eta=-\xi}=-2^{\frac{2}{p-2}}((2-p)\xi)^{\frac{2}{p-2}}\frac{\partial\varsigma}{\partial x}+\left.\frac{\sqrt{x_0}}{2a}\frac{\partial\varsigma}{\partial t}\right|_{t=0},$$

$$\Rightarrow\left.\frac{\partial\varsigma}{\partial\xi}+\frac{\partial\varsigma}{\partial\eta}\right|_{\eta=-\xi}=\frac{\sqrt{x_0}}{a}\varphi_1\left(\left(\frac{2-p}{2}\xi\right)^{\frac{2}{2-p}}\right),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\xi}\right|_{\eta=-\xi}=(2\xi)^{\frac{p}{2(2-p)}}\frac{\partial\varsigma}{\partial\xi}+\frac{p\phi_0\left(\left(\frac{2-p}{2}\xi\right)^{\frac{2}{2-p}}\right)}{2(2-p)}(2\xi)^{\frac{3p-4}{2(2-p)}},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{\eta=-\xi} = (2\xi)^{\frac{p}{2(2-p)}} \frac{\partial \varsigma}{\partial \eta} - \frac{p\varphi_0\left(\left(\frac{2-p}{2}\xi\right)^{\frac{2}{2-p}}\right)}{2(2-p)}(2\xi)^{\frac{3p-4}{2(2-p)}},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{\eta=-\xi} = (2\xi)^{\frac{p}{2(2-p)}} \left.\left(\frac{\partial \varsigma}{\partial \xi} + \frac{\partial \varsigma}{\partial \eta}\right)\right|_{\eta=-\xi} =$$

$$= (2\xi)^{\frac{p}{2(2-p)}} \frac{\sqrt{x_0}}{a} \phi_1\left(\left(\frac{2-p}{2}\xi\right)^{\frac{2}{2-p}}\right),$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial \xi}\right|_{\eta=-\xi} = \left.\frac{dw}{d\theta}\frac{d\theta}{d\xi}\right|_{\eta=-\xi} = -\frac{1}{4}\frac{(\xi+\eta_0)(\xi+\xi_0)}{(\xi_0-\eta_0)\xi^2}\left(\frac{dw}{d\theta}\right)_{\eta=-\xi},$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial \eta}\right|_{\eta=-\xi} = \left.\frac{dw}{d\theta}\frac{d\theta}{d\eta}\right|_{\eta=-\xi} = -\frac{1}{4}\frac{(\xi-\eta_0)(\xi-\xi_0)}{(\xi_0-\eta_0)\xi^2}\left(\frac{dw}{d\theta}\right)_{\eta=-\xi}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\right|_{\eta=-\xi} = -\frac{\xi_0+\eta_0}{2(\xi_0-\eta_0)\xi}\left.\frac{dw}{d\theta}\right|_{\eta=-\xi}.$$

Значения функции u на биссектрисе $\xi = -\eta$ и в точках P и Q будут равны:

$$u|_{\eta=-\xi} = (2\xi)^{\frac{2}{2(2-p)}} \varphi_0\left(\left(\frac{2-p}{2}\xi\right)^{\frac{2}{2-p}}\right),$$

$$u(P) = (2\xi_0)^{\frac{2}{2(2-p)}} \varphi_0\left(\left(\frac{2-p}{2}\xi_0\right)^{\frac{2}{2-p}}\right),$$

$$u(Q) = (-2\eta_0)^{\frac{2}{2(2-p)}} \varphi_0\left(\left(\frac{2-p}{2}\eta_0\right)^{\frac{2}{2-p}}\right),$$

Подставляя найденные значения величин в уравнение (16), получаем:

$$u(\xi_0,\eta_0) = \frac{(2\xi_0)^{\frac{2}{2(2-p)}} \varphi_0\left(\left(\frac{2-p}{2}\xi_0\right)^{\frac{2}{2-p}}\right) + (-2\eta_0)^{\frac{2}{2(2-p)}} \varphi_0\left(\left(\frac{2-p}{2}\eta_0\right)^{\frac{2}{2-p}}\right)}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-\eta_0}^{\xi_0} w\left(\frac{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}{(\xi_0-\eta_0)(\xi-\eta)}\right)(2\xi)^{\frac{2}{2(2-p)}} \frac{\sqrt{x_0}}{a}\varphi_1\left(\left(\frac{2-p}{2}\xi\right)^{\frac{2}{2-p}}\right)d\xi +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-\eta_0}^{\xi_0}\left((2\xi)^{\frac{2}{2(2-p)}}\varphi_0\left(\left(\frac{2-p}{2}\xi\right)^{\frac{2}{2-p}}\right)\frac{\xi_0+\eta_0}{2\xi(\xi_0-\eta_0)}\frac{dw}{d\theta}\bigg|_{\eta=-\xi}\right)d\xi\cdot$$

Принимая во внимание, что

$$\varsigma(x_0,t_0)=\frac{u(\xi_0,\eta_0)}{\left(\frac{4}{2-p}x_0^{\frac{2-p}{2}}\right)^{\frac{p}{2(2-p)}}}=\frac{u(\xi_0,\eta_0)}{\left(\frac{4}{2-p}\right)^{\frac{p}{2(2-p)}}x_0^{\frac{p}{4}}},$$

условия на характеристиках, а также определенные ранее значения $u(P)$, $u(Q)$, $v(P)$, $v(Q)$ и возвращаясь к старым переменным, решение задачи (1) – (3) получаем в следующей форме:

$$u(x,t)=\frac{\left(\frac{at}{\sqrt{x_0}}+\frac{2}{2-p}x^{\frac{2-p}{2}}\right)^{\frac{2}{2(2-p)}}\varphi_0\left(\left(\frac{2-p}{2}\frac{at}{\sqrt{x_0}}+x^{\frac{2-p}{2}}\right)^{\frac{2}{2-p}}\right)}{2^{\frac{4-p}{2(2-p)}}x^{\frac{p}{4}}}+$$

$$+\frac{\left(-\frac{at}{\sqrt{x_0}}+\frac{2}{2-p}x^{\frac{2-p}{2}}\right)^{\frac{2}{2(2-p)}}\varphi_0\left(\left(\frac{2-p}{2}\frac{at}{\sqrt{x_0}}-x^{\frac{2-p}{2}}\right)^{\frac{2}{2-p}}\right)}{2^{\frac{4-p}{2(2-p)}}x^{\frac{p}{4}}}+$$

$$+\frac{\sqrt{x_0}\cdot 2^{\frac{2}{2(2-p)}}}{2a\left(\frac{4}{2-p}\right)^{\frac{p}{2(2-p)}}x^{\frac{p}{4}}}\int_{-\frac{at}{\sqrt{x_0}}+\frac{2}{2-p}x^{\frac{2-p}{2}}}^{\frac{at}{\sqrt{x_0}}+\frac{2}{2-p}x^{\frac{2-p}{2}}}w(\theta)\xi^{\frac{2}{2(2-p)}}\varphi_1\left(\left(\frac{2-p}{2}\xi\right)^{\frac{2}{2-p}}\right)d\xi+$$

$$+\frac{(\xi_0+\eta_0)\cdot 2^{\frac{2}{2(2-p)}}}{4(\xi_0-\eta_0)\left(\frac{4}{2-p}\right)^{\frac{p}{2(2-p)}}x^{\frac{p}{4}}}\int_{-\frac{at}{\sqrt{x_0}}+\frac{2}{2-p}x^{\frac{2-p}{2}}}^{\frac{at}{\sqrt{x_0}}+\frac{2}{2-p}x^{\frac{2-p}{2}}}\frac{dw}{d\theta}\bigg|_{\eta=-\xi}\xi^{\frac{3p-4}{2(2-p)}}\varphi_0\left(\left(\frac{2-p}{2}\xi\right)^{\frac{2}{2-p}}\right)d\xi$$

или

$$u(x,t)=\frac{\left(\frac{at}{\sqrt{x_0}}+\frac{2}{2-p}x^{\frac{2-p}{2}}\right)^{\frac{2}{2(2-p)}}\varphi_0\left(\left(\frac{2-p}{2}\frac{at}{\sqrt{x_0}}+x^{\frac{2-p}{2}}\right)^{\frac{2}{2-p}}\right)}{2^{\frac{4-p}{2(2-p)}}x^{\frac{p}{4}}}+$$

$$+\frac{\left(-\frac{at}{\sqrt{x_0}}+\frac{2}{2-p}x^{\frac{2-p}{2}}\right)^{\frac{2}{2(2-p)}}\varphi_0\left(\left(\frac{2-p}{2}\frac{at}{\sqrt{x_0}}-x^{\frac{2-p}{2}}\right)^{\frac{2}{2-p}}\right)}{2^{\frac{4-p}{2(2-p)}}x^{\frac{p}{4}}}+$$

$$+\frac{\sqrt{x_0}}{a2^{\frac{4-p}{2(2-p)}}x^{\frac{p}{4}}}\int\limits_{-\frac{at}{\sqrt{x_0}}+\frac{2}{2-p}x^{\frac{2-p}{2}}}^{\frac{at}{\sqrt{x_0}}+\frac{2}{2-p}x^{\frac{2-p}{2}}} F\left(\frac{4-3p}{2(2-p)};\frac{p}{2(2-p)};1;\vartheta_1\right)\xi^{\frac{2}{2(2-p)}}\varphi_1(\vartheta_2)d\xi+$$

$$+\frac{\xi_0+\eta_0}{(\xi_0-\eta_0)2^{\frac{8-3p}{2(2-p)}}x^{\frac{p}{4}}}\int\limits_{-\frac{at}{\sqrt{x_0}}+\frac{2}{2-p}x^{\frac{2-p}{2}}}^{\frac{at}{\sqrt{x_0}}+\frac{2}{2-p}x^{\frac{2-p}{2}}} F\left(\frac{8-5p}{2(2-p)};\frac{4-p}{2(2-p)};2;\vartheta_1\right)\xi^{\frac{3p-4}{2(2-p)}}\phi_0(\vartheta_2)\,d\xi,$$

где

$$\vartheta_1=\frac{\frac{a^2t^2}{x_0}-\left(\frac{2}{2-p}x^{\frac{2-p}{2}}-\xi\right)^2}{\frac{8}{2-p}\xi\cdot x^{\frac{2-p}{2}}},\quad \vartheta_2=\left(\frac{2-p}{2}\xi\right)^{\frac{2}{2-p}}.$$

Таким образом, описанная математическая модель позволяет при фиксированном значении величины p находить решения частных задач.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Леонтьев И.О.* Прибрежная динамика: волны, течения, потоки наносов. – М.: ГЕОС, 2001.
2. *Овсянников Л.В.* Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1973.
3. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Дифференциальные уравнения математической физики. – М., 1962.
4. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М., 1965.
5. *Сухинов А.И., Зуев В.Н., Семенистый В.В.* Поверхностные волны от начальных возмущений в случае изменения глубины дна по линейному закону // Известия вузов, Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2004. – № 4. – С. 31-33.

Тимофеева Елена Федоровна
Северо-Кавказский государственный технический университет.
E-mail: teflena@mail.ru.
355029, г. Ставрополь, просп. Кулакова, 2.
Тел.: 88652728858; +79097583970.

Timofeeva Elena Fedorovna
North Caucasus State Technical University.
E-mail: teflena@mail.ru.
2, Kulakova pr, Stavropol, 355029, Russia.
Phone: +78652728858; +79097583970.