

В качестве параметров моделирования можно выбрать значение шага дискретизации по расстоянию  $h = 0,1 м$  и значение параметра  $\sigma = 0,5$ . Шаг по времени можно также выбрать равным шагу по дискретизации:  $\tau = 0,1 с$ .

**Заключение.** Таким образом, дополнив систему (1) начальными и граничными условиями вида [2], получим возможность моделировать данные процессы на современных вычислительных средствах.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Редин А.А., Клово А.Г., Куповых Г.В., Морозов В.Н. Электродинамическая модель атмосферного приземного слоя // Известия ЮФУ. Технические науки. Тематический выпуск “Актуальные проблемы математического моделирования”. – 2009. – № 8 (97). – С. 93-106.
2. Куповых Г.В., Морозов В.Н., Шварц Я.М. Теория электродного эффекта в атмосфере. – Таганрог. Изд-во ТРТУ, 1998. – 123 с.
3. Куповых Г.В. Моделирование влияния загрязнений на электрические характеристики приземного слоя атмосферы // Известия ТРТУ. – 2004. – № 5 (40). – С. 259-262.
4. Куповых Г.В. Приближение сильного турбулентного перемешивания // Известия ТРТУ. – 1997. – № 2 (5). – С. 194-195.
5. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики // 2-е изд. – М.: Научный мир, 2003. – 316 с.

**Редин Александр Александрович**

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: alexandr\_redin@mail.ru.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 88634321617.

**Redin Alexander Alexandrovich**

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: alexandr\_redin@mail.ru.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: +78634321617.

УДК 518.5.001.57

**Е.В. Алексеенко**

### **ПРОЦЕССЫ ТУРБУЛЕНТНОГО ОБМЕНА В МЕЛКОВОДНЫХ ВОДОЕМАХ. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ**

*Работа посвящена математическому моделированию процессов турбулентного перемешивания в мелкой воде, а также выбору аппроксимации коэффициентов вертикального турбулентного обмена на основе сравнений с экспедиционными измерениями в лагуне Этан де Бер (Франция). Представлены результаты численного эксперимента для лагуны и их обоснование.*

*Теория мелкой воды; турбулентный обмен; экспедиционные измерения; пульсации.*

E.V. Alekseenko

**PROCESSES OF TURBULENT EXCHANGE IN THE SHALLOW WATERS.  
MATHEMATICAL MODELING AND NUMERICAL EXPERIMENT**

*Work is devoted to mathematical modeling of turbulent mixing in shallow water, as well as the choice of approximation coefficients of vertical turbulent exchange on the basis of comparisons with the measurements in the lagoon Etang de Berre (France). The results of numerical experiment for the lagoon and their explanation are performed.*

*Theory of shallow water; turbulent exchange; expedition measurements; pulsations*

В данной работе мы заинтересованы в исследовании структуры потока в мелководных бассейнах, которые могут быть охарактеризованы состоянием:  $2\pi H < L$ , где  $H$  – высота столба воды,  $L$  – длина волны, то есть в случае, когда длина волны значительно превышает характерную глубину водоема.

Гидродинамические процессы, протекающие в мелкой воде, отражает нелинейная дисперсионная модель длинноволновых процессов [1]. В приближении длинных линейных волн вертикальная компонента скорости по величине много меньше значений горизонтальных компонент скоростей, причем горизонтальные компоненты скорости не зависят от вертикальной координаты. То есть вертикальное ускорение достаточно мало в сравнении с горизонтальным, и давление является гидростатическим.

Уравнения мелкой воды широко используются для расчета приливов, штормовых нагонов, цунами и других природных явлений, генерируемых длинноволновыми возмущениями уровня [1].

Имеются, по крайней мере, три причины, побуждающие расширить постановку, включив в нее рассмотрение изменений по вертикали.

Во-первых, при рассмотрении осредненной по вертикали баротропной модели, нет *достаточной параметризации вертикального турбулентного перемешивания неоднородного по глубине*. В классической постановке коэффициент вертикального турбулентного обмена является постоянным и не может дать реалистичную эпюру скорости. Это связано с тем, что в мелководных водоемах на различных уровнях глубины коэффициент вертикального турбулентного обмена может отличаться в десятки раз. Турбулентный обмен по вертикали возникает либо за счет сдвиговых течений (при потере кинетической энергии среднего течения) или при неустойчивой стратификации. В прибрежной мелководной зоне сдвиговое течение, как правило, генерируется за счет ветровых и приливно-отливных течений, а также за счет поверхностных и бароклинных течений, включая нелинейные внутренние волны. Неустойчивая стратификация, в свою очередь, происходит в результате процессов охлаждения, испарения, замерзания, а также за счет адвективных процессов. Таким образом, классическая теория мелкой воды не может выявить сложный характер выше перечисленных процессов.

Другая причина вызывается неудовлетворительным описанием эффектов трения, и, следовательно, диссипации энергии в придонном пограничном слое для задач, к точности решения которых предъявляются высокие требования. Диссипация выражается формулой для придонного трения

$$\tau_h / \rho = C_h \mathbf{v} |\mathbf{v}|.$$

В данном случае коэффициент  $C_h$ , связывающий напряжение Рейнольдса у дна со средним по вертикали квадратом скорости, является слабостью формулы. Значение этого коэффициента (в приливном цикле) отличается в несколько раз от

своего среднего значения по данным работ различных авторов; в отдельных случаях оно может отличаться на порядок.

Третьей причиной является непосредственная необходимость расчета вертикальной структуры течения для решения ряда прикладных задач, в первую очередь загрязнения акваторий и оценки надежности гидротехнических сооружений – защитных конструкций, нефтяных платформ, волнопреобразователей и других функционирующих в районах шельфовой зоны и мелководных морях, при наложении эффектов прилива и штормового нагона.

Таким образом, переход к трехмерным постановкам тех задач, которые традиционно относились к сфере задач теории мелкой воды, диктуется необходимостью совершенствования гидродинамических моделей реальных явлений и ростом требований к исходной информации в экологии и гидропроектировании.

Рассмотрим постановку задачи, решающую вышеописанные проблемы для случая мелководных водоемов.

Представляя скорость  $\mathbf{q} = (u, v, w)$  и давление  $p$  в виде суммы их средних значений и пульсаций:  $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}} + \mathbf{q}'$ ,  $p = \bar{p} + p'$ , запишем уравнение Рейнольдса для несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{q}} \cdot \nabla_3) \bar{\mathbf{q}} + (2\omega \times \bar{\mathbf{q}}) = -\frac{1}{\rho} \nabla_3 \bar{p} + g + \nu_m \nabla_3^2 \bar{\mathbf{q}} + \nabla_3 \Pi_3; \quad (1)$$

$$\nabla_3 \bar{\mathbf{q}} = 0, \quad (2)$$

где  $\nu_m$  – коэффициент молекулярной вязкости;  $\rho \Pi_3 = \rho(\mathbf{P}_{(x)}, \mathbf{P}_{(y)}, \mathbf{P}_{(z)})$  – тензор напряжений Рейнольдса:

$$\mathbf{P}_{(x)} = (-\overline{u'^2}, -\overline{u'v'}, -\overline{u'w'}); \quad \mathbf{P}_{(y)} = (-\overline{u'v'}, -\overline{v'^2}, -\overline{v'w'}); \quad \mathbf{P}_{(z)} = (-\overline{u'w'}, -\overline{v'w'}, -\overline{w'^2}).$$

Здесь штрихами обозначены пульсации скоростей, а чертой сверху – осредненные по времени величины.

Появление напряжений Рейнольдса значительно усложняет задачу. Усредненные уравнения не замкнуты, так как количество неизвестных в уравнениях системы превышает количество уравнений.

Чтобы замкнуть систему, надо выразить турбулентные потоки – компоненты тензора напряжений Рейнольдса – через средние поля.

В качестве замыкающих соотношений для (1) обычно принимают восходящую в Буссинеску простую связь (3) между турбулентными потоками и градиентами соответствующих средних скоростей:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{(x)} = (-\overline{u'^2}, -\overline{u'v'}, -\overline{u'w'}) &= \left( K_{(x)} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, K_{(y)} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right); \\ \mathbf{P}_{(y)} = (-\overline{u'v'}, -\overline{v'^2}, -\overline{v'w'}) &= \left( K_{(x)} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}, K_{(y)} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}, \nu \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Согласно модели Буссинеска, турбулентное движение среды рассматривается как движение ньютоновской «турбулентной жидкости». Иными словами, формула

(3), получившая имя Буссинеска, предполагает линейную связь тензора турбулентных напряжений с тензором осредненных скоростей деформации.

Преобладание горизонтального масштаба над вертикальным имеет следствием малость горизонтальных градиентов сравнительно с вертикальными и несущественность роли горизонтальной турбулентной вязкости сравнительно с вихревой вязкостью в вертикальном направлении. Это позволяет в широком диапазоне условий использовать простейшую модель, полагая коэффициенты  $K_{(x)}$ ,  $K_{(y)}$  постоянными и априорно заданными. Для масштаба явления  $O(10^2 - 10^3 \text{ км})$  можно принять  $K_{(x)} = K_{(y)} = K = O(10^2 - 10^3 \text{ м}^2 / \text{с})$ .

Что же касается коэффициента вертикальной турбулентной вязкости  $\nu$ , то для его определения существует ряд схем.

В нашей работе мы использовали модель Смагоринского, которая является моделью пути смешения, однако она также известна как подсеточная модель [2], параметризующая коэффициент вертикального турбулентного обмена. Принцип заключается в следующем: турбулентность напрямую рассчитывается непосредственно из уравнений Навье-Стокса и находится естественным путем при численном моделировании, если разрешение вертикальной сетки позволяет воспроизвести все механизмы до масштабов вязкой диссипации очень мелких вихрей. Таким образом, на больших масштабах вертикальных сеток при численном моделировании подавляются механизмы вертикального турбулентного обмена, что означает необходимость выбора достаточно малых масштабов вертикального разрешения. Идея Смагоринского состоит в добавлении к молекулярной вязкости турбулентную вязкость, параметризуемую через длину пути смешения, которая соответствует размеру малых вихрей.

Выражение для коэффициента вертикального турбулентного обмена имеет вид:  $\nu = C_s^2 \Delta^2 \bar{s}^{-1/2}$ , где  $\Delta$  – характерный масштаб сетки,  $\bar{s} = 2\overline{s_{ij}} \cdot \overline{s_{ij}}$  – средняя скорость деформации ячеечного масштаба ( $\overline{s_{ij}}$  – осредненный тензор скоростей деформации),  $C_s$  – безразмерная эмпирическая константа, значение которой в формуле Смагоринского обычно определяется на основе расчета процесса затухания однородной изотропной турбулентности. В частности, выбранное значение постоянной  $C_s$  должно обеспечивать соответствие с экспериментальными измерениями. Значения константы  $C_s$ , как правило, изменяются от 0.1 (при течении на канале) до 0.2 (изотропная турбулентность). Пренебрегая горизонтальными градиентами  $U$  и  $V$ , и градиентами вертикальной компоненты скорости  $W$ , получим следующее выражение:

$$\nu = C_s^2 \Delta^2 \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2} \quad (4)$$

На основе описанной модели выполнен численный эксперимент с использованием данных натуральных измерений в лагуне Этан де Бер. Три экспедиции (20 сентября 2006, 28 сентября 2006 и 10 июня 2008) были проведены при совместном сотрудничестве исследователей Научно-исследовательского Центра математического моделирования экологических систем Юга России (НОЦ ММЭС Юга России) Таганрогского технологического института Южного федерального универси-

тета (ТТИ ЮФУ), а также лаборатории численного моделирования в механике сплошных сред Центральной инженерной школы (L3M/CNRS, группа исследователей под руководством проф. Б.РУ) в лагуне Этан де Бер, расположенной на Юге Франции, в регионе Буш дю Рон. Целью экспедиционных измерений являлось выявление доминирующих механизмов в лагуне для предотвращения экологической катастрофы, возникшей вследствие работы гидроэлектростанции.

Экспедиционные измерения гидрологических характеристик проводились с использованием новейшего современного оборудования ADCP WHS 600 фирмы Sentinel, работа которого основана на доплеровском эффекте. На основе рассмотренной аппроксимации коэффициента вертикального турбулентного обмена Смагоринского (4) были получены распределения, неоднородные по вертикали для всех точек измерения.

Анализ полученных распределений показал, что метод, предложенный Смагоринским (4), дает результаты, наиболее соответствующие физическим процессам в мелководных водоемах в сравнении с другими моделями (т.е. нет скачков коэффициента вблизи дна). Таким образом, при построении математической модели мы руководствовались результатами экспедиционных измерений и сравнением с другими методами [3-4].

Модель (1) – (4) с соответствующими начальными и граничными условиями была использована для численного эксперимента в лагуне Этан де Бер. Ниже на рис. 1 и 2 представлены результаты расчета при северном ветре 5 м/с.

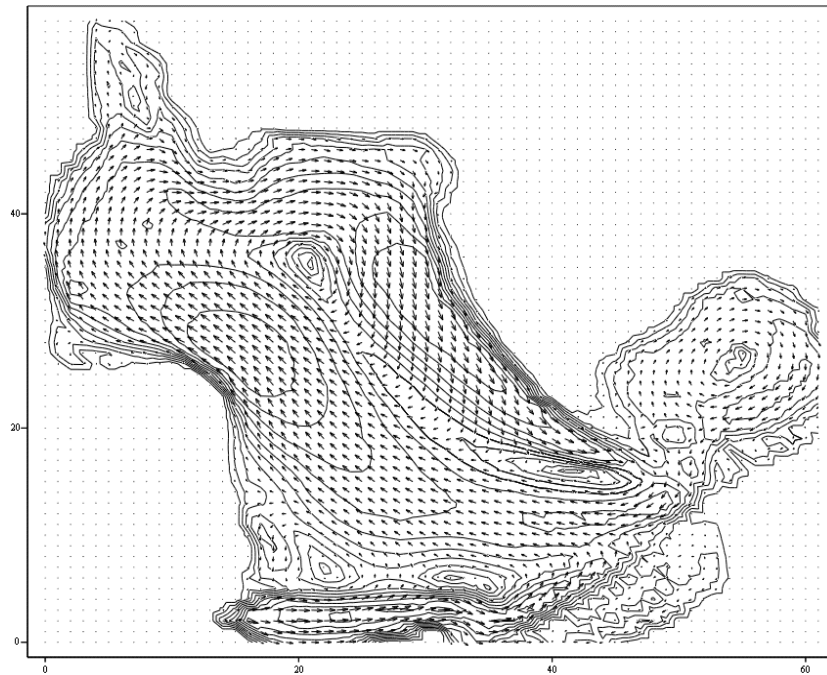


Рис. 1. Баротропные потоки при северном ветре 5 м/с в лагуне Этан де Бер

На рис. 1 хорошо видно, что в северо-западной части лагуны образуются устойчивые вихревые структуры, которые вызваны сбросом воды из системы водохранилищ через плотину гидроэлектростанции. Значительное число органических веществ попадает в захват этого района лагуны. Далее эти вещества захватываются вихревой структурой и, опускаясь на дно, образуют органический осадок.

При температурах воды, характерных для летнего периода, начинается интенсивное окисление образовавшегося осадка с одновременным уменьшением концентрации кислорода. При возникновении устойчивой стратификации достаточно быстро наступает явление аноксии (полное отсутствие кислорода) и далее разложение идет по анаэробному циклу с образованием сероводорода. Данное явление было замечено в ходе сентябрьской экспедиции 2006 г. в северо-западной части лагуны Этан де Бер. Было отмечено, что на данном участке вблизи дна имеются застойные иловые отложения и резкий запах сероводорода.

По результатам этой и других работ [5], выполненных совместно с французскими коллегами, в 2006 г. в лагуне Этан де Бер было предложено уменьшить сток гидроэлектростанции в 3,5-4 раза. В результате негативные явления, связанные с образованием анаэробного заражения, прекратились.

Рассмотрим распределения коэффициентов по вертикали, полученные в ходе численного моделирования на ЭВМ, с результатами натурных измерений.

Ниже на рис. 2 расположены графики коэффициентов для некоторых точек, в которых были проведены измерения пульсаций скоростей в лагуне Этан де Бер.

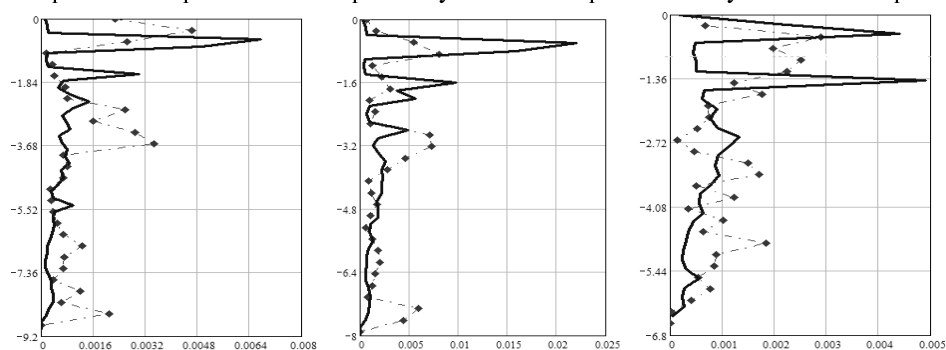


Рис. 2. Коэффициент вертикального турбулентного обмена в точках измерения лагуны 1, 3 и 4 (вертикальная ось – уровни глубины, горизонтальная –  $K$  в  $m^2/s^2$ : синяя сплошная линия – численное моделирование, красная прерывная линия – натурные измерения)

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вольцингер Н.Е., Клеванный Е.А., Пелиновский Е.Н. Длинноволновая динамика прибрежной зоны. – Л.: Гидрометеиздат. 1989.
2. Белоцерковский О.М. Турбулентность: новые подходы. – М.: Наука. 2003
3. Монин А.С. Турбулентность и микроструктура в океане // Успехи физических наук. Т. 109.
4. Hans Burchard, Peter D.Craig, Johannes R. Gemmrich et al. Observational and numerical modelling methods for quantifying coastal ocean turbulence mixing, Elsevier, Progress in Oceanography, 2008.
5. Sukhinov A.I. Reconstruction of 2001 Ecological Disaster in the Azov Sea on the Basis of Precise Hydrophysics Models // Parallel Computational Fluid Dynamics, Multidisciplinary Applications, Proceedings of Parallel CFD 2004 Conference, Las Palmas de Gran Canaria, Spain, ELSEVIER, Amsterdam-Berlin-London-New York-Tokyo, 2005. – P. 231-238.

#### Алексеевко Елена Викторовна

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: lena.alekseenko@gmail.com.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 88634371606.

**Alekseenko Elena Viktorovna**

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail lena.alekseenko@gmail.com.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: +78634371606.

УДК 519.6

**Е.Ф. Тимофеева**

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ВОЛН ДЛЯ ВОДОЕМА  
С НЕЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИЕЙ РЕЛЬЕФА ДНА**

*Предложена непрерывная математическая модель, описывающая распространение поверхностных волн от начальных возмущений. Для случая теории мелкой воды с нелинейной функцией рельефа дна проведена схематизация задачи, на основе которой получено ее аналитическое решение.*

*Поверхностные волны; рельеф дна; метод Римана; гипергеометрическое уравнение Гаусса.*

**E.F. Timofeeva**

**MATHEMATICAL MODEL OF WAVE MOVEMENT IN WATER BASIN  
WITH NONLINEAR RELIEF FUNCTION**

*It was suggested a continuous mathematical models which describes the distribution of superficial waves from initial disturbance. It was done oversimplification of the task for the case of low water theory with unlinear relief function, on the basis of which its analytical solution was obtained.*

*Superficial waves; bottom relief; Reaman’s method; Gauss hypergeometric equation.*

Проведенный анализ показал, что в классических исследованиях процессов движения поверхностных волн от начального возмущения для дна наклонной формы наиболее часто встречающимися функциями в уравнении, описывающем глубину жидкости, являются  $x$ ,  $\sqrt[3]{x}$ ,  $\sqrt[6]{x^5}$ ,  $\sqrt[8]{x^7}$ . Поэтому целесообразно рассмотреть обобщающий случай для водоема с нелинейной функцией рельефа дна.

В настоящей работе рассматривается декартова прямоугольная система координат, начало которой совмещено с урезом воды. Ось  $Ox$  совмещена с поверхностью невозмущенной жидкости и направлена в сторону моря.

Решается задача Коши для пространственно-одномерного уравнения гиперболического типа, описывающая движение волны на свободной поверхности жидкости переменной глубины:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial x} \left( h(x) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right), \quad (1)$$

$$\zeta(x, 0) = \varphi_0(x), \quad (2)$$

$$\zeta'_t(x, 0) = \varphi_1(x), \quad (3)$$