3. *Dubois D., Prade H.,* Fuzzy Numbers: An Overview, Analysis of Fuzzy Informations, CRC Press, Boca Raton, 1987. – P. 3-39.
4. *Elmaghraby S.,* Activity Networks – Project Planning and Control by Network Models, John Wiley &Sons Inc., Ney York, 1977.
5. *Golenko-Ginsburg, D. and Gonik, Stochastic* Network Project Planning with Non-Consumable Limited Resources, International Journal of Production Economics, 48,29-37, 1997.
6. *Zimmermann, H.,* Fuzzy set Theory and its applications. Norwell: Kluwer Academic, 2001.

Князева Маргарита Владимировна
Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.
E-mail: rituhaa@gmail.com.
347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
Тел.: 88634371743.

Knyazeva Margarita Vladimirovna
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.
E-mail: rituhaa@gmail.com.
44, Nekrasovsky, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: +78634371743.

УДК 519.87

А.Э. Саак

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ СИНТЕЗЕ РЕСУРСНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

Ставится и решается задача оптимального распределения ресурсов в многопроцессорных вычислительных системах. Заявки пользователей представляются ресурсными прямоугольниками, в которых стороны равны требуемым процессорным и временным ресурсам. Предлагается целевой критерий оптимальности в качестве минимизации площади объемлющего ресурсного прямоугольника множества заявок пользователей.

Оптимальное распределение ресурсов; многопроцессорная вычислительная система; ресурсный прямоугольник, минимум площади объемлющего прямоугольника.

A.E. Saak

ON OPTIMAL SYNTHESIS OF RESOURCE RECTANGLES

A problem of optimal allocation of resources in multiprocessor computer systems is posed and solved. User’s requests are represented by resource rectangles with sides equal to necessary processor and time resources on demand. It is suggested the target criterion of optimality per se minimization of area of comprehensive resource rectangle of many users requests.

Optimal allocation of resources; multiprocessor computer system; resource rectangle; minimum of comprehensive rectangle area.

Качество функционирования многопроцессорных вычислительных систем (МВС) во многом зависит от эффективности распределения процессорных и временных ресурсов [1-4]. Требование пользователя на обслуживание диспетчеру операционной системы МВС геометрически может быть представлено координатным прямоугольником с горизонтальным измерением, равным количеству процессоров и вертикальным – времени, требуемому заявке пользователя – ресурсному прямоугольнику [5].

В работах [1, 5] модель функционирования МВС представлялась полубесконечной полосой с высотой, равной числу процессоров, которое являлось ограниченным, критическим ресурсом и неограниченным временем. По мере развития технологии, росту числа процессоров, появлению Grid- систем [1] и метакомпьютингу [2] учёт ресурсов должен становиться всё более сбалансированным, ресурсы – равноправными, симметричными. В настоящей статье предлагается модель функционирования МВС в виде первого координатного квадранта, в котором требуется оптимально распределить заданное множество ориентированных ресурсных прямоугольников с соблюдением аддитивности и координатности – без наложений и с сохранением координатной ориентации. При этом в качестве критерия оптимальности предлагается минимум площади объемлющего ресурсного прямоугольника.

Приведём решение поставленной задачи для пары ориентированных ресурсных прямоугольников. Заявку пользователя, требующую a единиц процессоров и b единиц времени для своего обслуживания, будем обозначать символом $[(a,b)]$ или $a \times b$

$$[(a,b)] \to\to a \times b \to\to$$

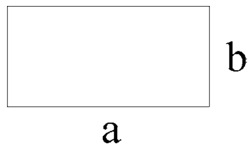


Рис. 1. Ориентированный ресурсный прямоугольник

Рассмотрим модельные динамические испытания. С этой целью синтезируем пару ориентированных ресурсных прямоугольников

$$[(a,b)], [(\alpha,\beta)]$$

аддитивно и координатно и с минимизацией площади прямоугольника, содержащего оба элемента. Локальность данного динамического синтеза влечёт за собой возможность и корректность последнего элемента

$$[(m,n)] \supset \{[(a,b)] \cup [(\alpha,\beta)]\}.$$

Выбор элементов справа с вариантной мощностью

$$P_A = \frac{ab}{mn}, \ P_B = \frac{\alpha\beta}{mn},$$

соответственно, определяет исходы искомого парного динамического испытания.

Построенный модельный эксперимент имеет аддитивную форму

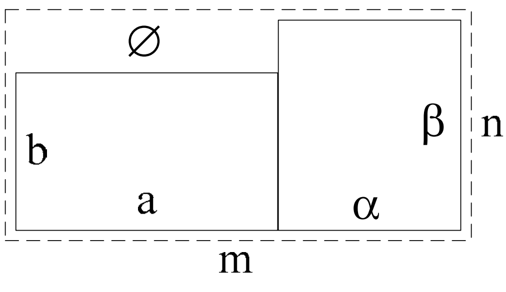


Рис. 2. Модельный эксперимент динамического синтеза

и базисные исходы: $\varnothing$ – идеальный, негативный, пустой элемент, $A = [(a,b)]$, $B = [(\alpha,\beta)]$ - несовместные реальные исходы, $X = [(m,n)]$ – достоверный, объемлющий исход.

Классическое бросание монеты задаётся ординарными исходами и после перехода к несовместному реальному базису

$$A,\, B \to\to A \bigcup B \setminus (AB)$$

принимает аналогичную форму графики.

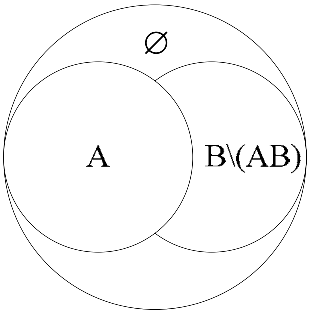


Рис. 3. Графика эксперимента бросания монеты

из объемлющего круга *X*, пустого подмножества и реальных исходов Даламбера, указанных справа на предыдущей диаграмме.

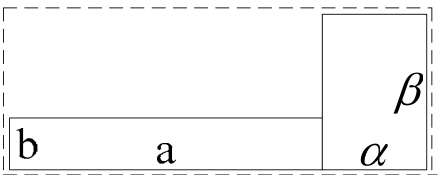
Продолжим рассмотрение задачи минимизации площади объемлющего ресурсного прямоугольника массива двух исходных планарных элементов.

В работе [6] рассматривались оптимальные планарные расписания для пары ориентированных ресурсных прямоугольников со свойствами: идентичности, транспонированности, транспонированной симметрии по одному из пары измерений. В работе [7] изучались более общие свойства упорядоченности: пары ориентированных ресурсных прямоугольников горизонтально и вертикально упорядоченных, относительно горизонтально и вертикально упорядоченных.

Рассмотрим пару равновеликих планарных элементов

$$a \times b \bigcup \alpha \times \beta,\;\; \sigma = ab = \alpha\beta\,.$$

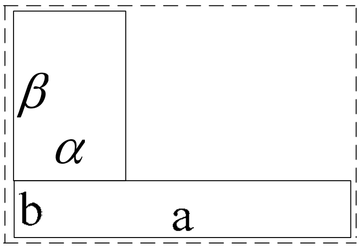
В случае горизонтальной суперпозиции имеем объемлющий ресурсный прямоугольник мерой



$$\to\to (a+\alpha)\times \max\{b,\beta\}$$

Рис. 4. Горизонтальная суперпозиция

и при вертикальной суперпозиции-мерой



$$\to\to \max\{a,\alpha\}\times(b+\beta)$$

Рис. 5. Вертикальная суперпозиция

Мера незаполненной области равна величинам

$$mes^2\varnothing = (a+\alpha)\max\{b,\beta\} - 2ab,$$

$$mes^2\varnothing = \max\{a,\alpha\}(b+\beta) - 2ab$$

и превалирование одной величины над другой определяется формой минимального объемлющего прямоугольника.

При $a \ge \alpha$ имеем $ab = \alpha\beta,\ b \le \beta$, так что

$$(a+\alpha)\max\{b,\beta\} = (a+\alpha)\beta = a\beta + \sigma,$$

$$\max\{a,\alpha\}(b+\beta) = a(b+\beta) = a\beta + \sigma.$$

Оба вида синтеза приводят к одинаковым результатам. Аналогично, при $a < \alpha$ имеем $ab = \alpha\beta,\ b > \beta$, и следовательно,

$$(a+\alpha)\max\{b,\beta\} = (a+\alpha)b = \alpha b + \sigma,$$

$$\max\{a,\alpha\}(b+\beta) = \alpha(b+\beta) = \alpha b + \sigma.$$

Вновь оба вида синтеза образуют одинаково оптимальные результаты. Сформулируем найденную закономерность.

Синтез пары равновеликих прямоугольников даёт одинаковые площади объемлющих прямоугольников и незаполненных областей, независимо от горизонтальной или вертикальной суперпозиции.

Отметим, что к равновеликим относятся рассмотренные ранее транспонированные пары прямоугольников [6].

Равновеликий синтез относится к несравнимым парам прямоугольников

$$ab = \alpha\beta,\ a \ge \alpha \to\to \beta \ge b.$$

Поэтому косинтезом для равновеликости служит синтез сравнимых пар, у которых один элемент допускает вложение в другой.

$$[(\alpha,\beta)] \subseteq [(a,b)] \to\to$$

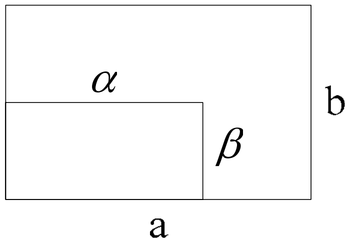


Рис. 6. Сравнимая пара ресурсных прямоугольников

В условиях сравнимости $a \ge \alpha \to\to b \ge \beta$ имеем

$$(a+\alpha)\max\{b,\beta\} = (a+\alpha)b = ab + \alpha b\,,$$

$$\max\{a,\alpha\}(b+\beta) = a(b+\beta) = ab + a\beta\,.$$

Таким образом, при

$$\alpha b \ge a\beta$$

оптимален вертикальный синтез, а при противоположном неравенстве – горизонтальный.

Случай равенства в последнем соотношении

$$\alpha b = a\beta \to\to \frac{b}{a} = \frac{\beta}{\alpha} \to\to$$

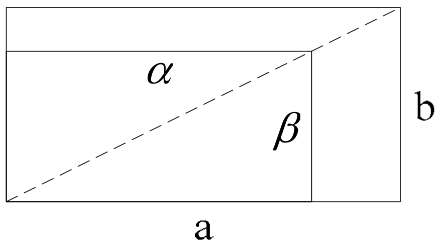


Рис. 7. Конформная пара ресурсных прямоугольников

означает конформность синтезируемых элементов.

Таким образом, объемлющий ресурсный прямоугольник минимальной площади найден для равновеликих, сравнимых и конформных пар ориентированных ресурсных прямоугольников.

В случае конформности имеет место безразличное равновесие. Из того, что $a = \lambda\alpha,\ b = \lambda\beta$, следуют равенства

$$(a+\alpha)\max\{b,\beta\} = (1+\lambda)\alpha\lambda\beta = \lambda\alpha(1+\lambda)\beta\,,$$

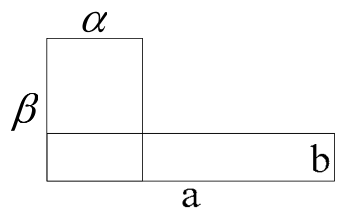
$$\max\{a,\alpha\}(b+\beta) = \lambda\alpha(1+\lambda)\beta\,.$$

Для ресурсных квадратов

$$\lambda = 1,\ \ (a+\alpha)\max\{b,\beta\} = \max\{a,\alpha\}(b+\beta).$$

Дополним изложенное рассмотрением динамического синтеза пары несравнимостей

$a \times b,\ \alpha \times \beta,\quad a \geq \alpha, b \leq \beta \to\to$



$a \times b,\ \alpha \times \beta,\quad a < \alpha, b > \beta \to\to$

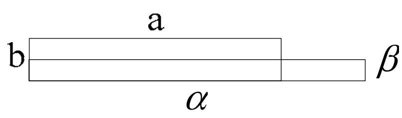


Рис. 8. Несравнимые пары ресурсных прямоугольников

В первом случае $a \geq \alpha, b \leq \beta$ горизонтальный синтез даёт объемлющий ресурсный прямоугольник мерой

$$(a+\alpha)\max\{b,\beta\} = (a+\alpha)\beta = a\beta + \alpha\beta,$$

а вертикальный синтез-мерой

$$\max\{a,\alpha\}(b+\beta) = a(b+\beta) = ab + a\beta.$$

Минимальный объемлющий ресурсный прямоугольник определяется соотношением площадей $ab,\ \alpha\beta$ синтезируемых прямоугольников.

Во втором случае $a < \alpha, b > \beta$ горизонтальный синтез даёт объемлющий ресурсный прямоугольник мерой

$$(a+\alpha)\max\{b,\beta\} = (a+\alpha)b = ab + \alpha b,$$

а вертикальный синтез-мерой

$$\max\{a,\alpha\}(b+\beta) = \alpha(b+\beta) = \alpha b + \alpha\beta.$$

Минимальный объемлющий ресурсный прямоугольник и в этом случае определяется соотношением площадей $ab,\ \alpha\beta$ синтезируемых прямоугольников.

Отметим, что приведённые построения для оптимального синтеза пары ориентированных ресурсных прямоугольников следуют из общей формулы минимальной площади объемлющего прямоугольника

$$(a+\alpha)\max\{b,\beta\} \vee \max\{a,\alpha\}(b+\beta)$$

для указанных видов горизонтального или вертикального синтеза.

Приведём классификацию видов ориентированных ресурсных прямоугольников относительно синтеза

Отметим, что пары прямоугольников делятся на несравнимые и сравнимые. В классе несравнимых мы выделяем транспонированные и равновеликие. В классе сравнимых выделяем конформные.

Прикладной аспект двухэлементной локальной оптимизации состоит в парной блокировке элементов заданного массива ориентированных ресурсных прямоугольников с преобразованием исходной задачи планарного расписания в задачу меньшей мощности множества требований. В частном случае массива с идентичными парами

$$\bigcup_{1}^{k}\{a\times b,\ \alpha\times\beta\}\rightarrow\rightarrow k\{a\times b,\ \alpha\times\beta\}$$

переход к оптимальному объемлющему прямоугольнику согласно предыдущим алгоритмам локального выбора – даёт измерительную задачу Эвклида по отношению к ресурсным элементам операционного поля МВС с одним измерительным элементом – объемлющим ресурсным прямоугольником.

Таким образом, в статье впервые построен динамический эксперимент, проведено исследование оптимального синтеза пары ориентированных ресурсных прямоугольников по критерию минимума площади объемлющего прямоугольника. Полученные результаты могут быть положены в основу решающего правила диспетчера операционной системы МВС.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Барский А.Б.* Параллельные информационные технологии. – М.: ИНТУИТ; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. – 503 с.
2. *Хорошевский В.Г.* Архитектура вычислительных систем. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. – 512 с.
3. *Воеводин В.В., Воеводин Вл.В.* Параллельные вычисления. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002. – 608 с.
4. *Каляев И.А., Левин И.И., Семерников Е.А., Шмойлов В.И.* Реконфигурируемые мультиконвейерные вычислительные структуры / Под общ. ред. И.А. Каляева. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮНЦ РАН, 2009. – 344 с.
5. *Бакенрот В.Ю., Чефранов А.Г.* Эффективность приближенных алгоритмов распределения программ в однородной вычислительной системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1985. – № 4. – С. 135-148.
6. *Саак А.Э.* Локально-симметричные оптимальные расписания // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2008. – № 4 (81). – С. 141-145.
7. *Саак А.Э.* Локально-оптимальные расписания // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 3 (92). – С. 244-248.

Саак Андрей Эрнестович

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: saak@tti.sfedu.ru.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 88634393373.

Saak Andrey Ernestovich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: saak@tti.sfedu.ru

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: +78634393373.