

Раздел III. Информационные технологии в управлении

УДК 681.327

Л.С. Берштейн, А.В. Боженюк

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕМПОРАЛЬНЫХ ГРАФОВ КАК МОДЕЛЕЙ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрена модель темпорального графа, в котором инцидентность вершин и ребер изменяется в дискретном времени. Введены понятия достижимости и сильной связности темпорального графа.

Темпоральный граф; суграф; матрица смежности; достижимость графа; связность графа.

L.S. Bershtein, A.V. Bozhenyuk

THE USING OF TEMPORAL GRAPHS AS THE MODELS OF COMPLICITY SYSTEMS

In this paper the model of temporal graph is considered. In this graph the incidence of vertices and edges is changed in the discrete time. The notions of graph reachability, and graph connectivity are considered too.

Temporal graph; subgraph; adjacent matrix; graph reachability; graph connectivity.

Теория графов привлекает большое внимание специалистов различных областей знания. Она используется для изучения многих сложных природных явлений. Наряду с традиционными применениями ее в таких науках, как физика, электротехника, химия, она проникла и в науки, считавшиеся раньше далекими от нее – экономику, социологию, лингвистику и др. Традиционно теория графов используется для представления отношений между элементами сложных структур различной природы [1-3]. При этом данные отношения между элементами являются постоянными и не меняются во времени. Такие графы в работе [4] были названы «статическими». В случае, когда отношения между элементами некоторой структуры изменяются во времени, традиционные «статические» графы неприменимы для их описания и моделирования.

В данной работе рассматривается подход к построению темпорального графа, то есть графой модели, в которой связи между элементами (вершинами графа) изменяются во времени. Необходимо отметить, что само понятие темпорального графа (temporal graph) известно в литературе и трактуется в достаточно широком диапазоне – от временных графиков до ориентированных ациклических графов и сетей Петри [5-10].

Темпоральным графом назовем тройку $G=(X, \{G_t\}, T)$, где X – множество вершин графа с числом вершин $|X|=n$; $T=\{1, 2, \dots, N\}$ – множество натуральных чисел, определяющих (дискретное) время; $\{G_t\}$ – семейство соответствий, или отображений множества вершин X в себя в момент времени $t \in T$, т.е., $(\forall t \in T) G_t: X \rightarrow X$. Причем, для различных моментов времени эти отображения, в общем случае, различные:

$$(\forall x \in X)(\forall t_1, t_2 \in T | t_1 \neq t_2 | [G_{t_1}(x) \neq G_{t_2}(x)]).$$

Пример 1. Рассмотрим темпоральный граф $G=(X,\{\Gamma_t\},T)$, у которого множество вершин $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, время $T=\{1, 2, 3\}$, $n=5$, $N=3$, а семейство соответствий $\{\Gamma_t\}$ задано в виде:

$$\begin{aligned} \Gamma_1(x_1) &= \{x_2, x_5\}, & \Gamma_2(x_1) &= \{x_2\}, & \Gamma_3(x_1) &= \{x_5\}, \\ \Gamma_1(x_2) &= \emptyset, & \Gamma_2(x_2) &= \{x_5\}, & \Gamma_3(x_2) &= \{x_3\}, \\ \Gamma_1(x_3) &= \{x_2\}, & \Gamma_2(x_3) &= \{x_4\}, & \Gamma_3(x_3) &= \{x_4\}, \\ \Gamma_1(x_4) &= \{x_5\}, & \Gamma_2(x_4) &= \{x_3\}, & \Gamma_3(x_4) &= \{x_3\}, \\ \Gamma_1(x_5) &= \emptyset, & \Gamma_2(x_5) &= \{x_1, x_4\}, & \Gamma_3(x_5) &= \{x_2, x_4\}. \end{aligned}$$

Графически темпоральный граф можно задать в виде обычного ориентированного графа, на дугах которого указан момент времени (множество моментов времени) их действия.

Граф, рассмотренный в примере 1, имеет вид, приведенный на рис. 1:

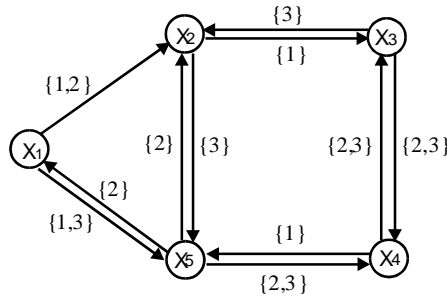


Рис. 1. Пример темпорального графа

Введем понятие смежности в темпоральном графе, которое является расширением понятия смежности обычного ориентированного графа:

Вершина x_j является смежной вершине x_i по моменту времени $t \in T$, если выполняется условие: $x_j \in \Gamma_t(x_i)$.

Вершины могут быть смежными друг другу по нескольким моментам времени, а могут не быть смежными вообще. Например, вершина x_2 смежная вершине x_1 по моментам времени 1 и 2, и несмежная вершине x_3 .

Суграфом по моменту времени $t \in T$ темпорального графа $G=(X,\{\Gamma_t\},T)$ назовем обычный (нетемпоральный) граф $G(t)=(X,\Gamma_t)$, у которого Γ_t есть отображение множества вершин X в себя в момент времени t .

Так, для темпорального графа G , приведенного на рис. 1, суграфами в моменты времени $t=1, 2, 3$ являются графы G_1, G_2 и G_3 , приведенные на рис. 2.

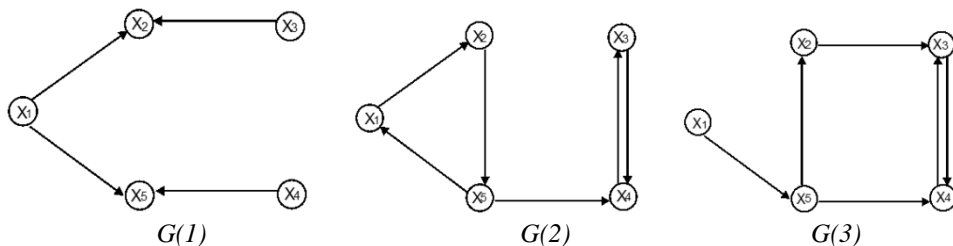


Рис. 2. Семейство суграфов темпорального графа

Темпоральный граф $G=(X,\{\Gamma_t\},T)$ взаимно однозначно представляется семейством своих суграфов $\{G(t) \mid t \in T\}$.

Темпоральный граф $G=(X,\{\Gamma_t\},T)$ можно представить временной матрицей смежности вершин $R_G=\|r_{ij}\|, i,j=1,2,\dots,n$, элементы которой определяют подмножество моментов времени, при котором соответствующие вершины являются смежными. Иными словами:

$$r_{ij} = \begin{cases} \{t\}, & \text{если } x_j \in \Gamma_t(x_i), \\ \emptyset & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для темпорального графа G , приведенного на рис. 1, матрица смежности вершин имеет вид

$$R_G = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \emptyset & \{1,2\} & \emptyset & \emptyset & \{1,3\} \\ \emptyset & \emptyset & \{3\} & \emptyset & \{2\} \\ \emptyset & \{1\} & \emptyset & \{2,3\} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \{2,3\} & \emptyset & \{1\} \\ \{2\} & \{3\} & \emptyset & \{2,3\} & \emptyset \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Пусть $R(t) = \|r_{ij}^{(t)}\|, t \in T$ – матрица смежности суграфа $G(t)$. Здесь

$$r_{ij}^{(t)} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_j \in \Gamma_t(x_i), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Определим операцию произведения матрицы смежности $R(t)$ на некоторое число p как $p \times R(t) = \|r_{ij}^{(p)}\|, i, j = \overline{1, n}$, где

$$r_{ij}^{(p)} = \begin{cases} \{p\}, & \text{если } r_{ij}^{(t)} = 1, \\ \emptyset & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

и операцию объединения квадратных матриц $R_1 = \|r_{ij}^{(1)}\|$ и $R_2 = \|r_{ij}^{(2)}\|$ одинаковой размерности $n \times n$ как $R_1 \cup R_2 = \{r_{ij}^{\cup}\|$,

где

$$\{r_{ij}^{\cup}\} = \begin{cases} \{r_{ij}^{(1)}\} \cup \{r_{ij}^{(2)}\}, & \text{если } r_{ij}^{(1)} \neq \emptyset \vee r_{ij}^{(2)} \neq \emptyset, \\ \emptyset & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда взаимосвязь между матрицей смежности R_G темпорального графа G и матрицами смежности $R(t), t=\{1,2,\dots,N\}$ его суграфов по времени запишется в виде

$$R_G = \bigcup_{t=1, N} t \times R(t).$$

Для темпорального графа G , приведенного на рис. 1, матрицы смежности его суграфов по времени $G(1)$, $G(2)$ и $G(3)$ имеют вид

$$R(1) = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad R(2) = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \text{и}$$

$$R(3) = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Можно записать, что временная матрица $R_G = 1 \times R(1) \cup 2 \times R(2) \cup 3 \times R(3)$.

Рассмотрим теперь понятия достижимости и сильной связности темпорального графа.

Будем считать, что вершина x_k достижима из вершины x_l , если существует такая последовательность вершин

$$seq(x_l, x_k) = (x_l, x_2, \dots, x_k), \quad (1)$$

что $x_2 \in \Gamma_{i_1}(x_l)$, $x_3 \in \Gamma_{i_2}(x_2)$, ..., $x_k \in \Gamma_{i_{k-1}}(x_{k-1})$ и при этом выполняется условие:

$$i_l \leq i_2 \leq \dots \leq i_{k-1}, \quad i_l, i_2, \dots, i_{k-1} \in T.$$

Иными словами, если в последовательности (1) каждая последующая вершина смежна предыдущей по моменту времени не меньшему чем моменты, по которым все предыдущие вершины в этой последовательности являются смежными.

Значение i_{k-1} назовем временем достижимости вершины x_k из вершины x_l .

Если существует несколько L последовательностей вида (1) из вершины x_l в вершину x_k , то значения $i_{k-1}^{(j)}$ для каждой последовательности $seq_j(x_l, x_k)$, $j = \overline{1, L}$ могут быть различными. Наименьшее из этих величин назовем минимальным временем достижимости $t_{\min}(x_l, x_k)$ вершины x_k из вершины x_l , т.е.:

$$t_{\min}(x_l, x_k) = \min_{j=1, L} \{i_{k-1}^{(j)}\}.$$

Пример 2. В темпоральном графе, приведенном на рис. 1, вершина x_3 достижима из вершины x_l с помощью последовательностей: $seq_l = (x_l, x_2, x_3)$,

$seq_2=(x_1, x_5, x_4, x_3)$, $seq_3=(x_1, x_2, x_5, x_4, x_3)$ и $seq_4=(x_1, x_5, x_2, x_3)$, с временами достижимости 3, 2, 2 и 3 соответственно. Поэтому, величина $t_{\min}(x_1, x_3) = 2$.

Темпоральный граф G назовем сильно связным, если каждая вершина графа достижима из любой другой вершины за конечное время.

Величину $t_{scon} = \max_{\forall x_i, x_j \in X} \{t_{\min}(x_i, x_j)\}$ назовем временем сильной связности темпорального графа G . Иными словами, каждая вершина графа достижима из любой другой вершины за время не более t_{scon} .

Так темпоральный граф, приведенный на рис. 1, является сильно связным, с величиной $t_{scon} = 2$, а темпоральный граф, приведенный на рис. 3, не является сильно связным. Однако в последнем можно выделить подграфы G_1 и G_2 , покрывающие исходный граф, каждый из которых является сильно связным с временем сильной связности соответственно 2 и 3.

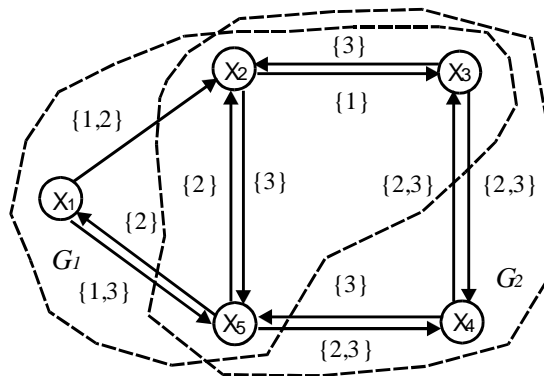


Рис. 3. Пример не сильно связного темпорального графа

Введенное понятие темпорального графа, его достижимости и связности может послужить основой для моделирования сложных структур, в которых элементы имеют связи, изменяющиеся во времени.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику. – М.: Наука, 1975.
2. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978.
3. Харари Ф. Теория графов. – М.: Мир, 1973.
4. Kostakos V. Temporal graphs. In *Proc. of Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol.388, Issue 6, Elsevier, 2008. – P. 1007-1023.
5. Barzilay R, Elhadad N., McKeown K. Inferring strategies for sentence ordering in multidocument news summarization. *Journal of Artificial Intelligence Research*, №17, 2002. – P. 35-55.
6. Bramsen P.J. Doing Time: Inducing Temporal Graphs. *Technical report, Massachusetts Institute of Technology*, 2006. – 51 p.
7. Baldan P., Corradini A., Konig B. Verifying finite-state graph grammars: An unfolding-based approach. In *Proc. of CONCUR'04*, vol.3170 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, 2004. – P.83-98.
8. Baldan P., Corradini A., Konig B. Verifying a behavioural logic for graph transformation systems. In *Proc. of COMETA'03*, vol.104 of *ENTCS*, Elsevier, 2004. – P. 5-24.

9. Erten C., Harding P.J., Kobourov S.G., Wampler K., Yee G. Exploring the computing literature using temporal graph. <http://tgrip.cs.arizona.edu>.
10. Dittmann F., Bobda C. Temporal graph placement on mesh-based coarse grain reconfigurable systems using the spectral method // *From Specification to Embedded Systems Application*, vol.184, Springer, 2005. – P. 301-310.

Берштейн Леонид Самойлович

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге
E-mail: lsb@tti.sfedu.ru.
347928, Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
Тел.: 88634371695.

Боженюк Александр Витальевич

E-mail: avb002@yandex.ru.

Bershtein Leonid Samoilovich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education «Southern Federal University».
E-mail: lsb@tti.sfedu.ru.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: +78634371695.

Bozhenyuk Alexander Vitalievich

E-mail: avb002@yandex.ru.

УДК 681.3.06

С.Л. Беляков, И.Н. Розенберг

**КОМБИНИРОВАННАЯ АНАЛОГИЯ ПРИ ПОИСКЕ
КАРТОГРАФИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ**

Рассматривается задача поиска картографических материалов в интеллектуальных геоинформационных системах, использующих механизм аналогии. Предлагается использовать комбинированную аналогию как способ представления знаний о поиске. Приводится алгоритм нахождения контекстов комбинированной аналогии.

Геоинформационные системы; цифровые карты; компьютерные сети.

S.L. Belyakov, I.N. Rozenber

**COMBINED ANALOGY WHEN LOOKING FOR CARTOGRAPHIC
MATERIALS**

In work the problem of search of maps and charts in the intellectual geoinformation systems using the mechanism of analogy is considered. It is offered to use the combined analogy as a way of representation of knowledge of search. The algorithm of a finding of contexts of the combined analogy is resulted.

Geographic information system; digital maps; computer network.

Решение прикладных задач с помощью интеллектуальной геоинформационной системы предполагает использование процедуры картографического анализа. Одним из начальных его этапов является поиск и отбор необходимых картографических ресурсов. В настоящее время картографические ресурсы доступны из источников, размещённых в сети Интернет. Использование средств поиска по ключевым словам либо каталогам поисковых серверов имеет определённые недостат-