# Раздел IV. Точные и естественные науки

УДК 519.63:532.55

**Т.В. Камышникова, В.В. Дурягина**

## ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНЫЕ СХЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ С НАПРАВЛЕННЫМИ РАЗНОСТЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

*Фундаментальным свойством разностной схемы является свойство аппроксимации при решении исходного дифференциального уравнения. Отказ от классического понятия аппроксимации и замена его более слабым условием суммарной аппроксимации существенно расширяет класс решаемых задач и приводит к аддитивным схемам.*

*Аппроксимация; суммарная аппроксимация; аддитивные схемы; покомпонентное расщепление.*

**T.V. Kamyshnikova, V.V. Duriagina**

## LOCAL-ONE-DIMENSIONAL SCHEMES CONTAINING DIRECTED DIFFERENCES WITH SECOND ORDER ACCURACY FOR THE MOVEMENT EQUATIONS

*While solving the initial differential equation an approximation property becomes fundamental in differential scheme. The refusal from classic approximation concept and it's replacement by more weak condition of total approximation essentially expands the solved problems class and brings to the additive schemes.*

*Approximation; total approximation; additive schemes; componential splitting.*

Традиционно широко в вычислительной гидродинамике при аппроксимации операторов конвективного переноса используются схемы с направленными разностями, которые позволяют строить монотонные схемы.

В параллелепипеде $\Omega$ решается нестационарная задача.

Уравнения движения:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{3} v^{(\alpha)}(x,t)\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}-\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\nu\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}\right)=0, \quad x\in\Omega, \quad t>0, \tag{1}$$

граничные условия:

$$U=\mu(x,t)=0 \text{ на } \partial\Omega\cup\Omega_t, \tag{2}$$

начальные условия:

$$U(x,0)=U_0(x) \text{ в } \Omega, \tag{3}$$

$U=\left(v^{(1)},v^{(2)},v^{(3)}\right)$ – достаточно гладкая вектор-функция.

При многокомпонентном расщеплении (на три и больше операторов), безусловно, устойчивые аддитивные схемы строятся на основе понятия суммарной аппроксимации – перехода к цепочке отдельных начальных задач для отдельных операторных слагаемых.

Рассмотрим задачу Коши для нахождения отдельных компонент вектора $U$

$$\frac{du}{dt} + Au = 0 \quad t > 0, \tag{4}$$

$$u(0) = u_0, \tag{5}$$

где $A^{(\alpha)} = C_1^{(\alpha)} + D^{(\alpha)}$, $C_1^{(\alpha)}$ – оператор конвективного переноса в недивергентном виде, $D^{(\alpha)}$ – оператор диффузионного переноса.

$$A > 0, \ A^{(\alpha)} > 0. \tag{6}$$

Условие (6) является необходимым для конструирования устойчивых схем расщепления [3].

Переход с одного временного слоя $t_{j-1}$ на $t_j$ будет основываться на последовательном решении $p$ задач для операторов $A^{(\alpha)}$. Такие стандартные аддитивные схемы покомпонентного расщепления для некоммутативных операторов имеют первый порядок точности по $\tau$. Повышение точности достигается за счет симметризации, перехода от последовательности решения задач $A^{(1)} \to A^{(2)} \to \cdots A^{(p)}$ к цепочке $0.5A^{(1)} \to 0.5A^{(2)} \to \cdots 0.5A^{(p)} \to 0.5A^{(p-1)} \to \cdots 0.5A^{(1)}$ [2], что соответствует представлению оператора $A$ в виде суммы [1]

$$A = \sum_{\alpha=1}^{2p} A'_\alpha, \text{ где } A'_\alpha = \begin{cases} 0.5A_\alpha, & 1 \le \alpha \le p, \\ 0.5A_{2p+1-\alpha}, & p < \alpha \le 2p. \end{cases}$$

Для построения разностных уравнений используются аддитивные схемы с дробными шагами.

Уравнения движения (1) – (3) рассматриваются в параллелепипеде

$$\Omega = \{x \mid x = (x_1, x_2, x_3), \quad 0 < x_\alpha < \ell_\alpha, \quad \alpha = 1,2,3\}.$$

Будем использовать по каждому направлению равномерную по всем переменным разностную сетку с шагом $h_\alpha, \quad \alpha = 1,2,3$ [2].

Для сеток по отдельным направлениям $x_\alpha, \quad \alpha = 1,2,3$ используем обозначения

$$\overline{w}_\alpha = \{x_\alpha \mid x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, \quad i_\alpha = 0,1,2,\ldots,N_\alpha, \quad N_\alpha h_\alpha = l_\alpha\},$$

где $w_\alpha = \{x_\alpha \mid x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, \quad i_\alpha = 1,2,\ldots,N_\alpha - 1, \quad N_\alpha h_\alpha = l_\alpha\}$ – есть множество внутренних узлов по направлению $x_\alpha, \quad \alpha = 1,2,3$. Для сетки в $\Omega$ положим

$$\overline{w} = \overline{w}_1 \times \overline{w}_2 \times \overline{w}_3 = \{x \mid x = (x_1, x_2, x_3), \quad x_\alpha \in \overline{w}_\alpha, \quad \alpha = 1,2,3\},$$

$$w = w_1 \times w_2 \times w_3, \ \overline{w} = w \times \partial w.$$

На отрезке $0 \le t \le T$ введем равномерную сетку по времени с шагом $\tau$

$$\overline{w}_\tau = w_\tau \cup \{T\} = \{t_j = j\tau, \, j = 0,1,\ldots,N_0, \tau N_0 = T\}.$$

Каждый интервал $(t_{j-1}, t_j)$ разобьем на $2p$ частей, введя промежуточные точки $t_{j-1+\alpha/2p} = t_j - \tau + \alpha\tau/2p, \qquad \alpha = 1,2,\dots,2p$.

Формально заменим трехмерное уравнение (4) с учетом аддитивного представления

$$A = \sum_{\alpha=1}^{3} A^{(\alpha)} \tag{7}$$

цепочкой одномерных уравнений.

На интервале $(t_{j-1}, t_j)$ рассматриваются промежуточные задачи:

$$\frac{1}{2p}\frac{dV^{(\alpha)}}{dt} + \frac{1}{2}A^{(\alpha)}V^{(\alpha)} = 0, \tag{8}$$

$$\alpha = 1,2,\dots,p, \quad p = 3,$$

$$\frac{1}{2p}\frac{dV^{(\alpha)}}{dt} + \frac{1}{2}A^{(2p+1-\alpha)}V^{(\alpha)} = 0, \tag{9}$$

$$\alpha = p+1,\ p+2,\dots,2p, \quad p = 3.$$

Начальные условия для (8), (9) имеют вид

$$V^{(1)}(0) = u_0, \quad V^{(1)}(t_{j-1}) = V^{(2p)}(t_{j-1}),$$

$$V^{(\alpha)}(t_{j-1+(\alpha-1)/2p}) = V^{(\alpha-1)}(t_{j-1+(\alpha-1)/2p}), \qquad \alpha = 2,3,\dots,2p, \tag{10}$$

граничные условия:

$$V^{(\alpha)}(t_{j-1+\alpha/2p}) = \mu(x, t_{j-1+\alpha/2p}), \quad x \in \partial\Omega. \tag{11}$$

Системе уравнений (8), (9) поставим в соответствие локально-одномерные схемы.

В качестве производящей возьмем симметричную схему Кранка – Николсона

$$\frac{y^{j-1+\alpha/2p} - y^{j-1+(\alpha-1)/2p}}{\tau} + A_h^{(\alpha)}\frac{y^{j-1+\alpha/2p} + y^{j-1+(\alpha-1)/2p}}{2} = 0 \tag{12}$$

$$\alpha = 1,2,\dots,p, \quad p = 3$$

$$\frac{y^{j-1+\alpha/2p} - y^{j-1+(\alpha-1)/2p}}{\tau} + A_h^{(2p+1-\alpha)}\frac{y^{j-1+\alpha/2p} + y^{j-1+(\alpha-1)/2p}}{2} = 0 \tag{13}$$

$$\alpha = p+1,\ p+2,\dots,2p, \qquad p = 3 \quad j = 1,2\dots$$

Начальные условия для каждого из разностных уравнений (12) – (13) имеют вид

$$y^{(1)}(0) = u_0, \quad y^{(1)}(t_{j-1}) = y^{(2p)}(t_{j-1}),$$

$$y^{(\alpha)}(t_{j-1+(\alpha-1)/2p}) = y^{(\alpha-1)}(t_{j-1+(\alpha-1)/2p}), \qquad \alpha = 2,3\ldots,2p\,. \tag{14}$$

К этим уравнениям следует присоединить краевое условие

$$y^{j-1+\alpha/2p} = \mu^{j-1+\alpha/2p}, \quad x \in \partial w_\alpha\,, \tag{15}$$

$$\alpha = 1,2,\ldots,2p, \quad j = 1,2,..., N_0 - 1\,.$$

Последовательное решение уравнений (12), (13) позволяет получить решение задачи (4) со вторым порядком точности по $\tau$.

Пусть известно $y^{j-1}$. Чтобы найти из (12) – (15) значение $y^j$ на новом слое, мы должны решить $2p$ уравнений (12) – (13) с начальными (14) и краевыми условиями (15), последовательно полагая $\alpha = 1,2,\ldots 2p$.

Запишем системы одномерных разностных уравнений (12), (13) в безындексной форме. Примем следующие обозначения

$$b^{(\alpha)}(x_i) = v^{(\alpha)}(x_i)\,;\quad b^{(\alpha)}(x) = b^{+(\alpha)}(x) + b^{-(\alpha)}(x)\,;$$

$$b^{+(\alpha)}(x) = \frac{1}{2}\left[b^{(\alpha)}(x) + \left|b^{(\alpha)}(x)\right|\right] \geq 0\,,$$

$$b^{-(\alpha)}(x) = \frac{1}{2}\left[b^{(\alpha)}(x) - \left|b^{(\alpha)}(x)\right|\right] \leq 0\,,$$

$$y^{j-1+\alpha/2p} = y(t_j - \tau + \alpha\tau/2p) = \hat{y}\,,$$

$$y^{j-1+(\alpha-1)/2p} = y(t_j - \tau + (\alpha-1)\tau/2p) = y\,, \text{ тогда}$$

$$C_1^{(\alpha)}\left(\frac{\hat{y}+y}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[b^{+(\alpha)}\hat{y}_{\bar{x}_\alpha} + b^{+(\alpha)}y_{\bar{x}_\alpha} + b^{-(\alpha)}\hat{y}_{x_\alpha} + b^{-(\alpha)}y_{x_\alpha}\right], \tag{16}$$

$$D^{(\alpha)}\left(\frac{\hat{y}+y}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left[(\nu\hat{y}_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + (\nu y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}\right]. \tag{17}$$

Тогда уравнения (12), (13) будут иметь вид

$$\frac{\hat{y}-y}{\tau} + \frac{1}{2}\left[b^{+(\alpha)}\hat{y}_{\bar{x}_\alpha} + b^{+(\alpha)}y_{\bar{x}_\alpha} + b^{-(\alpha)}\hat{y}_{x_\alpha} + b^{-(\alpha)}y_{x_\alpha}\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\left[(\nu\hat{y}_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + (\nu y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}\right] = 0\,, \tag{18}$$

$$\alpha = 1,2,\ldots,p, \quad p = 3\,,$$

$$\frac{\hat{y}-y}{\tau} + \frac{1}{2}\left[b^{+(\beta)}\hat{y}_{\bar{x}_\beta} + b^{+(\beta)}y_{\bar{x}_\beta} + b^{-(\beta)}\hat{y}_{x_\beta} + b^{-(\beta)}y_{x_\beta}\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\left[(\nu\hat{y}_{\bar{x}_\beta})_{x_\beta} + (\nu y_{\bar{x}_\beta})_{x_\beta}\right] = 0\,, \tag{19}$$

$$\beta = p,\ldots,2,1, \quad p = 3\,.$$

Системы (18), (19) запишем в виде трехточечных уравнений второго порядка

$$a_{i_\alpha} y_{i_\alpha^{-1}}^{j-1+\alpha/2p} - c_{i_\alpha} y_{i_\alpha}^{j-1+\alpha/2p} + b_{i_\alpha} y_{i_\alpha^{+1}}^{j-1+\alpha/2p} = -F_\alpha^{j-1+(\alpha-1)/2p}, \qquad (20)$$

$i_\alpha = 1,2,\ldots,N_\alpha - 1$ по каждому из направлений $x_\alpha$, $\alpha = 1,2,3$.

Предварительно введем обозначения

$$y_{i_\alpha^{-1}}^{j-1+\alpha/2p} = y^{j-1+\alpha/2p}(x_\alpha - h_\alpha);\ y_{i_\alpha}^{j-1+\alpha/2p} = y^{j-1+\alpha/2p};$$

$$y_{i_\alpha^{+1}}^{j-1+\alpha/2p} = y^{j-1+\alpha/2p}(x_\alpha + h_\alpha);$$

$$y_{i_\beta^{-1}}^{j-1+\alpha/2p} = y^{j-1+\alpha/2p}(x_\beta - h_\beta);\ y_{i_\beta}^{j-1+\alpha/2p} = y^{j-1+\alpha/2p};$$

$$y_{i_\beta^{+1}}^{j-1+\alpha/2p} = y^{j-1+\alpha/2p}(x_\beta + h_\beta).$$

Тогда система разностных уравнений второго порядка (20) для (12), (13) будет иметь вид. Первый цикл

$$y^{j-1+\alpha/2p}(x_\alpha - h_\alpha)\left\{\frac{b^{+(\alpha)}}{2h_\alpha} + \frac{\nu}{2h_\alpha^2}\right\} - y^{j-1+\alpha/2p}\left\{\frac{1}{\tau} + \frac{b^{+(\alpha)}}{2h_\alpha} - \frac{b^{-(\alpha)}}{2h_\alpha} + \frac{\nu}{h_\alpha^2}\right\} +$$

$$+ y^{j-1+\alpha/2p}(x_\alpha + h_\alpha)\left\{-\frac{b^{-(\alpha)}}{2h_\alpha} + \frac{\nu}{2h_\alpha^2}\right\} = -F_\alpha^{j-1+(\alpha-1)/2p}, \qquad (21)$$

$$\alpha = 1,2,\ldots,p, \qquad p = 3.$$

Второй цикл

$$y^{j-1+\alpha/2p}(x_\beta - h_\beta)\left\{\frac{b^{+(\beta)}}{2h_\beta} + \frac{\nu}{2h_\beta^2}\right\} - y^{j-1+\alpha/2p}\left\{\frac{1}{\tau} + \frac{b^{+(\beta)}}{2h_\beta} - \frac{b^{-(\beta)}}{2h_\beta} + \frac{\nu}{h_\beta^2}\right\} +$$

$$+ y^{j-1+\alpha/2p}(x_\beta + h_\beta)\left\{-\frac{b^{-(\beta)}}{2h_\beta} + \frac{\nu}{2h_\beta^2}\right\} = -F_\alpha^{j-1+(\alpha-1)/2p}, \qquad (22)$$

$$\alpha = p+1,\ p+2,\ldots,2p,\ \ p = 3,\ \beta = 2p+1-\alpha,$$

где

$$F_\alpha^{j-1+(\alpha-1)/2p} = y^{j-1+(\alpha-1)/2p}(x_\alpha - h_\alpha)\left\{\frac{b^{+(\alpha)}}{2h_\alpha} + \frac{\nu}{2h_\alpha^2}\right\} - y^{j-1+(\alpha-1)/2p}\left\{-\frac{1}{\tau} + \frac{b^{+(\alpha)}}{2h_\alpha} - \frac{b^{-(\alpha)}}{2h_\alpha} + \frac{\nu}{h_\alpha^2}\right\} +$$

$$+ y^{j-1+(\alpha-1)/2p}(x_\alpha + h_\alpha)\left\{-\frac{b^{-(\alpha)}}{2h_\alpha} + \frac{\nu}{2h_\alpha^2}\right\},$$

$$\alpha = 1,2,\ldots,p, \qquad p = 3,$$

$$F_\alpha^{j-1+(\alpha-1)/2p} = y^{j-1+(\alpha-1)/2p}(x_\beta - h_\beta)\left\{\frac{b^{+(\beta)}}{2h_\beta} + \frac{\nu}{2h_\beta^2}\right\} - y^{j-1+(\alpha-1)/2p}\left\{-\frac{1}{\tau} + \frac{b^{+(\beta)}}{2h_\beta} - \frac{b^{-(\beta)}}{2h_\beta} + \frac{\nu}{h_\beta^2}\right\} +$$

$$+ y^{j-1+(\alpha-1)/2p}(x_\beta + h_\beta)\left\{-\frac{b^{-(\beta)}}{2h_\beta} + \frac{\nu}{2h_\beta^2}\right\},$$

$$\alpha = p+1,\ p+2,\ldots,2p,\quad p=3,\quad \beta = 2p+1-\alpha .$$

Коэффициенты

$$a_{i_\alpha} = \left\{\frac{b^{+(\alpha)}}{2h_\alpha} + \frac{\nu}{2h_\alpha^2}\right\};\ c_{i_\alpha} = \left\{\frac{1}{\tau} + \frac{b^{+(\alpha)}}{2h_\alpha} - \frac{b^{-(\alpha)}}{2h_\alpha} + \frac{\nu}{h_\alpha^2}\right\};$$

$$b_{i_\alpha} = \left\{-\frac{b^{-(\alpha)}}{2h_\alpha} + \frac{\nu}{2h_\alpha^2}\right\};$$

$$a_{i_\beta} = \left\{\frac{b^{+(\beta)}}{2h_\beta} + \frac{\nu}{2h_\beta^2}\right\};\ c_{i_\beta} = \left\{\frac{1}{\tau} + \frac{b^{+(\beta)}}{2h_\beta} - \frac{b^{-(\beta)}}{2h_\beta} + \frac{\nu}{h_\beta^2}\right\};$$

$$b_{i_\beta} = \left\{-\frac{b^{-(\beta)}}{2h_\beta} + \frac{\nu}{2h_\beta^2}\right\}.$$

Каждое из уравнений данной системы решается методом факторизации трехточечных уравнений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК


1. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 653 с.
2. *Самарский А.А, Вабищевич П.Н.* Аддитивные схемы для задач математической физики. – М.: Наука, 1999. – 391 с.
3. *Камышникова Т.В.* Математическое моделирование движения воздушной среды и загрязняющих примесей от автотранспорта в условиях городской застройки: дис… канд. тех. наук. – Таганрог, 2003. – С. 67-69.



**Камышникова Татьяна Владимировна**

Технологический институт Федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: kamyshtata@mail.ru.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 88634371606.

**Дурягина Вероника Владимировна**

E-mail: vepanuka@mail.ru.

**Kamyshnikova Tatyana Vladimirovna**

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: kamyshtata@mail.ru.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: 88634371606.

**Duriagina Veronika Vladimirovna**

E-mail: vepanuka@mail.ru.