

Ayibazova Aminat Abdullakhovna
 Karachai-Cherkess State Thechnological Academy.
 E-mail: aibazova_amina@mail.ru.
 36, Stavropolskaya Street, Cherkessk, 357100.
 Phpne: +7782202387.
 The Department of Automatic Control Systems; Competitor.

УДК 681.5

А.Б. Чернышев, Ю.В. Ильюшин

УСТОЙЧИВОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМИ УПРАВЛЯЮЩИМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

Рассмотрен процесс управления температурным полем объекта с распределенными параметрами. Управление осуществляется посредством дискретных точечных воздействий. Предложена математическая модель объекта. Исследован процесс формирования температурного поля. Установлена зависимость устойчивости системы от величины шага дискретизации управляющих воздействий.

Температурное поле; управляющие воздействия; пространственный годограф; абсолютная устойчивость; шаг дискретизации.

A.B. Chernyshev, Y.V. Ilyushin

STABILITY OF DISTRIBUTED SYSTEMS WITH DISCRETE CONTROLLING ACTIONS

Describes how to control temperature field object with distributed parameters. The Office is carried out by means of discrete point influences. Mathematical model of the object. Probed the temperature field. Dependence of pitch stability control sample.

Thermal field; controlling actions; spatial hodograph; absolute stability; discretization step.

В системах с распределенными параметрами управляемые величины зависят не только от времени, но и от расположения в пространственной области, занимаемой объектом. Задача реализации систем управления такими объектами значительно усложняется по сравнению с системами с сосредоточенными параметрами. Основные задачи исследования нелинейных автоматических систем сводятся к отысканию возможных состояний равновесия системы и исследованию их устойчивости.

Рассмотрим однородный цилиндрический стержень. Будем полагать, что управляющим воздействием является тепловой поток создаваемый источниками, реализованными в виде секций секционного нагревателя, распределенными по границе боковой поверхности цилиндра. Включение источников осуществляется с помощью релейных элементов. Пусть на концах стержня поддерживается нулевая температура. Управляемой величиной будет температура, которая в общем случае, должна изменяться по заданной программе в соответствии с требованиями технологического процесса. Поставим задачу стабилизации температуры на уровне некоторого значения $T_{зад}$. Пусть R – радиус цилиндра, а l – длина. Математическая модель процесса распространения тепла имеет вид:

$$\frac{\ddot{a}T}{\ddot{a}t} = a^2 \left(\frac{\ddot{a}^2 T}{\ddot{a}r^2} + \frac{1}{r} \frac{\ddot{a}T}{\ddot{a}r} + \frac{\ddot{a}^2 T}{\ddot{a}x^2} \right); 0 < r < R,$$

где $T(x, r, t)$ – температурное поле цилиндрического стержня; a – заданный коэффициент; R, l – заданные числа; x, r – пространственные координаты; t – время. Граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} T(0, r, t) = T(l, r, t) = 0; \\ T(x, R, t) = u(x, t); \quad \frac{\partial T(x, 0, \tau)}{\partial r} = 0. \end{aligned}$$

Функцией выхода является функция $T(x, R^*, t)$, где R^* – заданное число ($0 < R^* < R$). Предположим, что стержень достаточно тонкий, чтобы в любой момент времени температуру во всех точках поперечного сечения можно было считать одинаковой. Полагая, что действие каждого источника происходит в течение бесконечно малого промежутка времени, можно допустить, что управляющие воздействия создаются мгновенными точечными источниками и представляются произведением дельта функций:

$$u(x, t) = \delta(x - \xi)\delta(t - \tau).$$

Для стабилизации температуры необходимо рассмотреть замкнутую систему регулирования. Регулятор такой системы может быть реализован, как нелинейный дискретный алгоритм. Этот алгоритм должен осуществлять воздействия по отклонению температуры от заданного значения в определенных точках в определенное время. Прежде чем начнут возникать отрицательные отклонения $T(x, t) - T_{зад}$, необходимо нагреть стержень до температуры, превышающей значение $T_{зад}$ по всей его длине. То есть, необходимо сформировать, так называемую, функцию начального нагрева [1]. Такая функция может быть сформирована в результате начального включения всех источников. В результате математическая модель примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \delta(x - \xi)\delta(t - \tau); \quad 0 < x < l; \quad t > 0; \\ T(0, t) = T(l, t) = 0; \quad T(x, 0) = \delta(x - \xi) \delta(t). \end{aligned}$$

Значение температуры в точке x в момент времени t , вызванной действием мгновенного точечного источника, действующего в момент τ в точке ξ , определяется с помощью функции Грина, представляющей собой бесконечный ряд Фурье [2]:

$$G(x, t, \xi, \tau) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[- \left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 (t - \tau) \right] \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} \xi. \quad (1)$$

Используя функцию Грина, получим выражение функции начального нагрева, для любой фиксированной точки наблюдения x_j .

$$T(x_j, t, \tau_0) = \sum_{i=1}^d \sum_{n=1}^k \frac{2}{l} \exp \left[- \left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 t \right] \sin \frac{\pi n}{l} x_j \sin \frac{\pi n}{l} \xi_i; \quad j = 1, 2, \dots, d.$$

С течением времени под воздействием нулевых граничных условий, температура всех точек стержня будет понижаться. В некоторой точке x_j функция $T(x_j, t, \tau_0)$ убывая, достигнет значения $T_{зад}$. В этот момент времени включается источник ξ_j , соответствующий датчику x_j , и оказывает воздействие на все точки стержня. При этом на каждый датчик продолжается действие источников, включенных в начальный момент времени $\tau_0 = 0$. В результате наложения всех воздействий, для

произвольной фиксированной точки отрезка, при произвольном количестве источников выходная функция будет иметь вид:

$$T(x_j, t) = \sum_{i=1}^d \sum_{n=1}^k \frac{2}{l} \exp \left[- \left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 t \right] \sin \frac{\pi n}{l} x_j \sin \frac{\pi n}{l} \xi_i + \\ \sum_p \sum_{n=1}^k \frac{2}{l} \exp \left[- \left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 (t - \tau_p) \right] \sin \frac{\pi n}{l} x_j \sin \frac{\pi n}{l} \xi_{z(p)},$$

где d – количество источников; $p=1, 2, 3, \dots$ – порядковый номер включения источника; $z(p)$ – один из источников; τ_p – момент времени включения источника под номером $z(p)$. Время достижения в крайних точках отрезка значения $T_{зад}$ определим по формуле [5]:

$$\tau_1 = \left(\frac{l}{\pi a} \right)^2 \ln \left(\frac{2 \sin \frac{\pi}{l} x_{зад} \sum_{i=1}^d \sin \frac{\pi}{l} \xi_i}{T_{зад}} \right). \quad (2)$$

Мгновенный точечный импульс в точках ξ_1 и ξ_d , приложенный в момент времени τ_1 , с течением времени $t > \tau_1$, оказывает воздействие на все точки отрезка. Время «прихода» максимума этого сигнала для всех точек различно. Очевидно, это время зависит от расстояния между точкой включения источника ξ и точкой наблюдения x . Время прихода максимума сигнала от точки воздействия источника ξ_1 до середины отрезка можно определить по формуле [5]:

$$t_m = \begin{cases} \left(\frac{l - \xi_1}{2} \right)^2 / 2a^2 + \tau_1; & \text{при } \frac{3l}{10} \leq \xi_1 \leq \frac{l}{2} \\ - \left(\frac{l}{10} - \xi_1 \right)^2 / 2a^2 + \frac{l^2}{25a^2} + \tau_1; & \text{при } \frac{l}{10} \leq \xi_1 \leq \frac{3l}{10} \\ \left(\frac{l}{10} - \xi_1 \right)^2 / 4a^2 + \frac{l^2}{25a^2} + \tau_1; & \text{при } 0 \leq \xi_1 \leq \frac{l}{10} \end{cases}; \quad (3)$$

Для абсолютной устойчивости положения равновесия нелинейной сосредоточенной системы с устойчивой линейной частью достаточно существования действительного значения q , для которого выполняется условие:

$$\forall \omega \geq 0: \operatorname{Re}[(1 + j\omega q)W(j\omega)] > -\frac{1}{k},$$

где k – угол абсолютной устойчивости, являющийся некоторым предельным параметром нелинейной характеристики $\varphi(\sigma)$, произвольно располагающейся в заданной области $0 \leq \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} \leq k$, при $\sigma \neq 0$, $\varphi(0) = 0$. Система будет абсолютно устойчивой, если выполняется условие:

$$\operatorname{Re}[(1 + j\omega q)W(j\omega)] > -\frac{1}{k}.$$

В системах с распределенными параметрами входной сигнал может зависеть не только от времени, но и от пространственных координат. Пусть нелинейный элемент задается функцией $z = \varphi(\sigma)$, которая значению $\sigma(x,t)$ входного сигнала ставит в соответствие значение $z(x,t)$ выходного сигнала звена, т.е. $z(x,t) = \varphi(\sigma(x,t))$. Представим угловой коэффициент k в виде пространственно усилительного звена распределенной системы [4]:

$$K(G) = E_1 \left[\frac{n_1 - 1}{n_1} + \frac{1}{n_1} G \right], \quad 0 \leq G \leq \infty. \quad (4)$$

где E_1 – общий коэффициент усиления (заданное число); n_1 – весовой коэффициент ($n_1 \geq 1$); G – непрерывная функция с областью определения $[0; \infty)$, охватывающая все дискретные значения $\tilde{G}_n = \left(\frac{n\pi}{l_x} \right)^2$. Тогда уравнение прямой, ограничивающей сектор нелинейной характеристики сверху, для каждого контура можно записать в виде:

$$z_n = E_1 \left[\frac{n_1 - 1}{n_1} + \frac{1}{n_1} G_n \right] \cdot \sigma_n,$$

где n – номер контура.

Можно дать следующую интерпретацию критерия Попова: Если передаточная функция разомкнутой системы не имеет полюсов, лежащих в правой полуплоскости, тогда для абсолютной устойчивости замкнутой системы достаточно, чтобы модифицированный пространственный годограф не пересекал поверхность,

проходящую через линию: $\left\{ \text{Re}(W) = -\frac{1}{E_1 \left[\frac{n_1 - 1}{n_1} + \frac{1}{n_1} G \right]}; \text{Im}(W) = 0 \right\}$ и прямую:

$$\{\text{Re}(W) = 0; \text{Im}(W) = q; G\}.$$

Передаточная функция объекта по n -й моде входного воздействия может быть представлена в виде [4]:

$$W_n(s) = \frac{\exp[\beta_n x_H] + \exp[-\beta_n x_H]}{\exp[\beta_n l] + \exp[-\beta_n l]}, \quad (n = \overline{1, \infty}),$$

где $\beta_n = \left(\frac{s}{a} + \varphi_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, x_H – точка наблюдения. Для частотного анализа положим

$s = j\omega$. Входным сигналом нелинейного звена будет отклонение функции выхода системы от заданного значения $\sigma(x,t) = T(x,t) - T_{зад}$. Выразим значение сигнала, используя формулу (1).

$$\sigma(x_H, \tau_1) = \frac{2}{l} \exp \left[-\left(\frac{\pi a}{l} \right)^2 \tau_1 \right] \sin \frac{\pi}{l} x_H \sum_{i=1}^d \sin \frac{\pi}{l} \xi_i - T_{зад}. \quad (5)$$

Реакцией нелинейного элемента $\varphi(\sigma(x,t))$ будет суммарное значение импульсных воздействий вырабатываемых в крайних точках ξ_1 и ξ_d .

$$\varphi(\sigma(x_i, t_m)) = \frac{4}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[-\left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 (t_m - \tau_1) \right] \sin \frac{\pi n}{l} x_H \sin \frac{\pi n}{l} \xi_1. \quad (6)$$

Выражения (5) и (6) определяют неявную зависимость между входным и выходным сигналами нелинейного элемента. Угловой коэффициент прямой, ограничивающей сектор, в котором располагается нелинейная характеристика, определим как отношение:

$$k = \frac{\varphi(\sigma(x_H, t_m))}{\sigma(x_H, \tau_1)}$$

Приняв в (4) $E_1 = k$ и $n_1 = 1$, определим значения угловых коэффициентов для каждой пространственной моды: $K_n = E_1 G_n$. Тогда, подобрав действительное число q , можно построить для каждой пространственной моды прямую Попова, проходящую через точку $(-\frac{1}{K_n}, 0)$ действительной оси и точку $(0, q)$ мнимой оси комплексной плоскости.

Рассмотрим объект управления при следующих заданных параметрах: $l = 0,45$ – длина стержня; $x_H = l/2$ – точка наблюдения; $a = 0,0044$ – коэффициент температуропроводности материала. Пусть количество секций нагревателя $r = 20$, тогда $\xi_1 = l/20 = 0,0225$ – середина левой крайней секции, $\xi_{20} = l - \xi_1 = 0,4275$ – середина правой крайней секции.

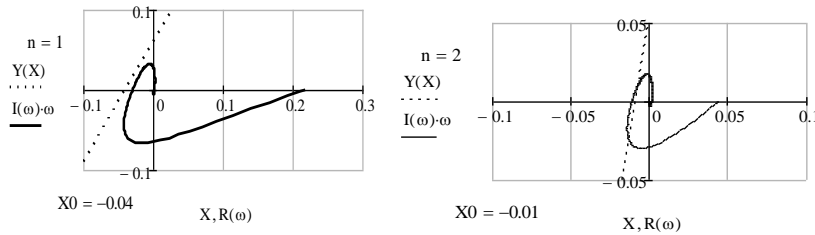


Рис. 1. Взаимное расположение годографа и прямой при $r = 20$; $n = 1$ и $n = 2$

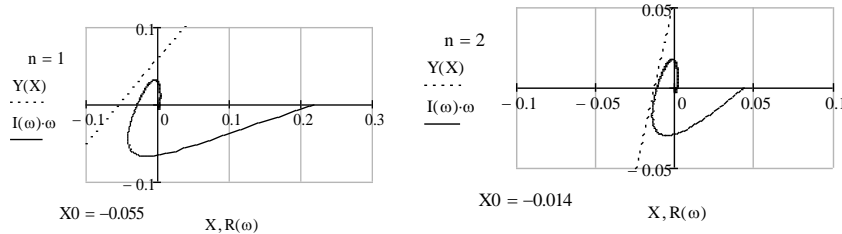


Рис. 2. Взаимное расположение годографа и прямой при $r = 23$; $n = 1$ и $n = 2$

Для второй моды годограф пересекает прямую Попова, следовательно, при количестве секций равно 20 рассматриваемая система неустойчива (см. рис. 1). Пусть количество секций равно 23, тогда анализ пространственных мод показывает, что система будет устойчивой (см. рис. 2).

Установлена зависимость устойчивости нелинейной распределенной системы от величины шага дискретизации управляющих воздействий. Количество точек дискретизации, с практической точки зрения, для рассматриваемого объекта можно интерпретировать как количество секций секционного нагревателя. Увеличение шага дискретизации, начиная с некоторого значения, приводит к тому, что устойчивая система становится неустойчивой.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Козлов В.Н., Магомедов К.А.* Негладкие операторы и распределенные системы // Модели теплопроводности. – СПб.: Изд-во СПб ГТУ, 2003. – 196 с.
2. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высшая школа, 2001. – 550 с.
3. *Чернышев А.Б.* Исследование нелинейных систем с распределенными параметрами. – Кисловодск: Изд-во МИЛ, 2009. – 208 с.
4. *Першин И.М.* Анализ и синтез систем с распределенными параметрами. – Пятигорск: Изд-во РИА-КМВ, 2007. – 244 с.

Чернышев Александр Борисович

Пятигорский государственный технологический университет.
E-mail: chalbor@rambler.ru.
357736 г. Кисловодск, ул. Челюскинцев, д. 5 «Б», кв. 42.
Тел.: 887973507.
Кафедра информатики и информационных технологий; доцент.

Ильюшин Юрий Валерьевич

E-mail: bdbyu@rambler.ru.
357700, г. Кисловодск, пр. Победы, 124, кв. 25.
Тел.: 88793628361.
Кафедра информатики и информационных технологий; ассистент.

Chernyshev Alexander Borisovich

Pyatigorsk State Technological University.
E-mail: chalbor@rambler.ru.
5 b, Chelyuskintsev Street, fl. 42, Kislovodsk, 357736, Russia.
Phone: +787973507.
The Department of Computer Science and Information Technology; Associate Professor.

Pyushin Yury Valeryevich

E-mail: bdbyu@rambler.ru.
124, Winning pr., kv. 25, Kislovodsk, 357700, Russia.
Phone: +78793628361.
The Department of Computer Science and Information Technology; Assistant.