

Раздел V. Моделирование сложных систем

УДК 681.5

А.А. Колесников, А.С. Капустина

СИНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД СИНТЕЗА ГЕНЕРАТОРОВ «УПРАВЛЯЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ» В СИСТЕМАХ С ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКОЙ

В настоящее время большое развитие получили методы и теория хаотической динамики. Открытие неожиданных свойств хаотического поведения в нелинейных детерминированных динамических системах, вызвало бурный интерес к этой проблеме. Во многих сложных системах могут возникать хаотические режимы, которые могут быть как нежелательными, так и необходимыми. В связи с этим большое развитие в науке получила проблема управления хаосом. В статье предложен метод синергетического синтеза генераторов «управляющих параметров», позволяющий сформировать в структуре модели Лоренца желаемые аттракторы.

Динамическая система; хаос; аттрактор; хаотический генератор.

A.A. Kolesnikov, A.S. Kapustina

METHOD OF SYNERGETICS SYNTHESIS OF CONTROLLING PARAMETERS GENERATOR IN SYSTEMS WITH CHAOTIC DYNAMICS

Nowadays, methods and theory of chaos dynamics are strongly developed. These problems attract great interest due to discovering new properties of chaotic evolution in the explored systems. Many complex systems may emerge a chaotic regimes of operation; this regimes may be as negative, as positive ones. So, the problem of chaos control is highly important in the modern science. We propose the method of synergetics synthesis of controlling parameters generator that provides desired attractor foundation in the Lorentz's model structure.

Dynamics system; chaos; attractor; synergetics observer; chaotic generator; data securing.

Развитие современной нелинейной науки показало, что во многих сложных природных и технических системах существенную роль играют диссипативные структуры, сопровождаемые бифуркационными и хаотическими явлениями. Хаотические режимы таких систем могут быть как нежелательными, так и требуемыми технологическими процессами. Примером желательности хаотического поведения являются технологии псевдооживления, широко применяемые при сжигании топлива на электростанциях, сушке различных материалов, в химических процессах и др. Нежелательное хаотическое поведение объектов часто возникает в критических режимах их движения, например в летательных аппаратах, энергосистемах и т.д.

В этой связи возникает принципиально новая проблема управления хаосом, которой уделяется нарастающее внимание в научно-технической литературе [1-3]. В большинстве работ для управления хаосом используются три основных направления: программное управление, периодически возмущающее систему; метод линеаризации отображения Пуанкаре и метод запаздывающей обратной связи [4]. В качестве базовых моделей, в которых возникает хаотическая динамика, обычно

выступают модели Лоренца, Рёсслера и некоторые подобные им модели нелинейных объектов.

Проблема управления хаосом еще ждет своего решения и требует развития новых направлений в науке управления. В этой связи рассмотрим применение метода аналитического конструирования агрегированных регуляторов [5-7] для решения сложной задачи управления нелинейными объектами с хаотической динамикой на примере модели Лоренца, в которой при отсутствии управления возникают хаотические режимы движения.

В синергетике и нелинейной динамике широко распространена модель Лоренца:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sigma y - \sigma x, \\ \dot{y}(t) &= -y + rx - xz, \\ \dot{z}(t) &= -bz + xy,\end{aligned}\tag{1}$$

описывающая в зависимости от значений управляющего параметра r , как устойчивые, так и хаотические процессы в различных физических системах.

Модель Лоренца (1) сыграла выдающуюся роль в возникновении новых направлений науки – теории «странных» аттракторов, фрактальной теории и вообще в развитии синергетики. Флагманская роль модели Лоренца в современной нелинейной науке объясняется чрезвычайной сложностью ее динамики и необычностью поведения при малейшем изменении параметра r . С. Смейл [8] отнес проблему изучения структуры модели Лоренца даже к одной из главных проблем математики XXI века. В России решению этой проблемы в последнее время посвятили свои работы Н.А. Магницкий и С.В. Сидоров [9], Г.А. Леонов [10], И.В. Зубов [11], Ю.И. Неймарк и П.С. Ланда [12] и др. Указанная проблема трудно разрешима и требует привлечения новых подходов. В этой связи рассмотрим структуру модели Лоренца с точки зрения системного анализа на основе идеологии метода АКАР.

Запишем модель (1) в виде:

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) + (1 + \sigma)\dot{x}(t) + \sigma(1 - r - z)x &= 0; \\ \dot{z}(t) &= -bz + \frac{1}{\sigma}x\dot{x}(t) + x^2.\end{aligned}\tag{2}$$

Добавив и вычтя x^2 в правой части второго уравнения системы (2), перепишем его в виде

$$\dot{z}(t) + bz - x^2 + \left(1 - \frac{b}{2\sigma}\right)x^2 - \frac{1}{\sigma}x\dot{x}(t) = 0.\tag{3}$$

Теперь, введя макропеременную

$$\psi_1 = z - \frac{1}{2\sigma}x^2\tag{4}$$

на основе (3) и первого уравнения системы (2), запишем модель Лоренца в следующей новой форме:

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) + (1 + \sigma)\dot{x}(t) + \sigma\left(1 - r + \frac{1}{2\sigma}x^2 + \psi_1\right)x &= 0; \\ \dot{\psi}_1(t) + b\psi_1 - \left(1 - \frac{b}{2\sigma}\right)x^2 &= 0.\end{aligned}\tag{5}$$

Полученная форма модели Лоренца (5) позволяет выявить некоторые дополнительные ее особенности. Так, например, если положить

$$b \geq 2\sigma, \quad (6)$$

то тогда модель Лоренца (5) будет приведена к стандартной форме метода АКАР. В этом случае модель Лоренца, стартуя из любых начальных условий x_0, \dot{x}_0, z_0 при любых значениях «управляющего параметра» r , через время $t = \frac{3 \div 4}{\sigma}$ неизбежно выходит на двумерно инвариантное многообразие $\psi_1 = 0$ (4), движение вдоль которого описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\ddot{x}_\psi(t) + (1 + \sigma)\dot{x}_\psi(t) + \sigma\left(1 - r + \frac{1}{2\sigma}x_\psi^2\right)x_\psi = 0. \quad (7)$$

Итак, при выполнении параметрического условия (6) модель Лоренца (5) будет представлять собой систему нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка, обладающую двумерным притягивающим многообразием, описываемым уравнением (7). Если в (5) параметр $r \leq 1$, то, согласно (7), система Лоренца (5) обладает асимптотически устойчивым состоянием равновесия: $x_S = \dot{x}_S = z_S = 0$. При $r > 1$ модель Лоренца при условии (6) выходит на аттрактор с бифуркацией типа «вилки».

Синтезируем генератор «управляющего параметра» $r(t)$. Для этого расширим модель (2), записав ее в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= y, \\ \dot{y}(t) &= -(1 + \sigma)y - \sigma(1 - r + z)x, \\ \dot{z}(t) &= -bz + \frac{1}{\sigma}xy + x^2, \\ \dot{r}(t) &= u(x, y, z) = F(t), \end{aligned} \quad (8)$$

где $u(x, y, z) = F(t)$ – генератор желаемых изменений «управляющего параметра» $r(t)$ с целью формирования соответствующих структур – аттракторов в модели Лоренца.

Итак, ставится задача: синтезировать обратную связь $u(x, y, z)$, обеспечивающую при произвольных начальных условиях x_0, y_0, z_0, r_0 формирование в структуре модели Лоренца (7) желаемых аттракторов с соответствующими бифуркациями, например, типа «вилки». Для решения этой задачи введем, согласно методу АКАР, следующую макропеременную:

$$\psi_2 = z - r + \mu - \alpha \cos x. \quad (9)$$

Производная макропеременной ψ_2 (9):

$$\dot{\psi}_2(t) = \frac{\partial \psi}{\partial z} \dot{z}(t) + \frac{\partial \psi}{\partial r} \dot{r}(t) + \frac{\partial \psi}{\partial x} \dot{x}(t), \quad (10)$$

где $\frac{\partial \psi}{\partial z} = 1, \frac{\partial \psi}{\partial r} = -1, \frac{\partial \psi}{\partial x} = \alpha \sin x$.

Тогда, подставляя ψ_2 (9) и $\dot{\psi}_2(t)$ (10) в функциональное уравнение

$$T\dot{\psi}_2(t) + \psi_2 = 0,$$

получим

$$\dot{z}(t) - \dot{r}(t) + \alpha y \sin x + \frac{1}{T}\psi_2 = 0.$$

Подставим в это уравнение соответствующие выражения для $\dot{z}(t)$ и $\dot{r}(t)$ из (7) и получим

$$-bz + \frac{1}{\sigma}xy + x^2 - u + \alpha y \sin x + \frac{1}{T}\psi_2 = 0,$$

отсюда

$$u = -bz + \frac{1}{\sigma}xy + x^2 + \alpha y \sin x + \frac{1}{T}\psi_2. \quad (11)$$

Очевидно, что система (8), (11), стартуя из произвольных начальных условий x_0, y_0, z_0, r_0 , через время $t = (3 \div 4)T$ неизбежно выходит на многообразии $\psi = 0$ (8), движение вдоль которого описывается дифференциальным уравнением:

$$\ddot{x}_\psi(t) + (1 + \sigma)\dot{x}_\psi(t) + \sigma(1 - \mu + \alpha \cos x_\psi)x_\psi = 0. \quad (12)$$

На рис. 1-5 приведены результаты моделирования системы (8), (11) для параметров $\sigma = 10$; $b = 8/3$; $\mu = 0,5$; $\alpha = -2$; $T = 0,2$ при начальных условиях $r(0) = 28$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0,2$, $z(0) = 0$. В этом случае, согласно структуре уравнения (12), система (8), (11) на финишном этапе своего движения выходит на аттрактор с бифуркацией типа «вилки», параметры которой зависят от знака начальных условий по координате $\pm x_0$, что наглядно видно из рис. 1. При этом графики изменения $z(t)$, $r(t)$, $\psi(t)$ практически не различаются. Из рис. 1-5 следует, что в системе (7), (10) не возникает каких-либо хаотических режимов движения, хотя, как известно, в модели Лоренца (1) с параметрами $\sigma = 10$; $b = 8/3$; $r_0 = 28$ такие режимы всегда существуют, при этом в установившемся режиме параметр $r = 72$.

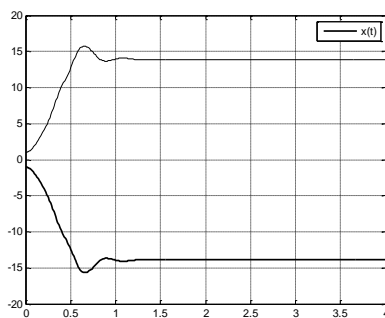


Рис. 1. Графики изменения $x(t)$

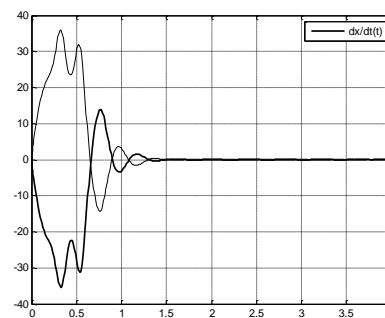


Рис. 2. Графики изменения $\dot{x}(t)$

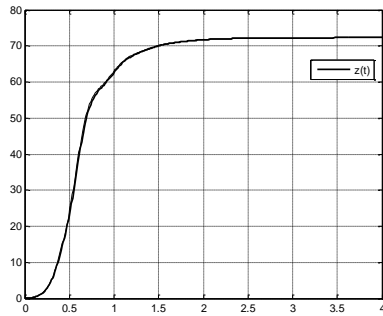


Рис. 3. Графики изменения $z(t)$

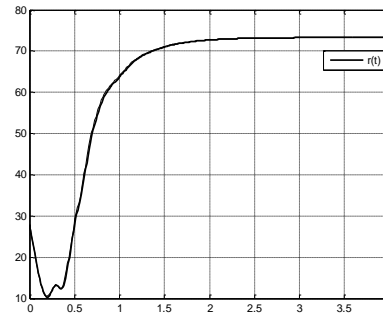


Рис. 4. Графики изменения $r(t)$

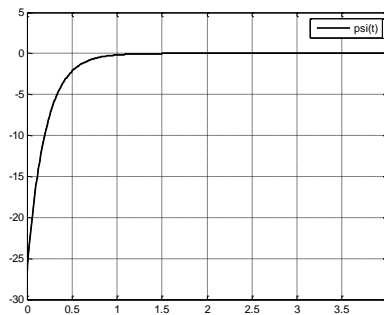


Рис. 5. Графики изменения $\psi(t)$

Аналогично на рис. 6-10 приведены результаты моделирования системы (8), (11) для параметров $\sigma = 10$; $b = 8/3$; $\mu = 0,5$; $\alpha = 2$; $T = 0,2$ при начальных условиях $r(0) = 28$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0,2$, $z(0) = 0$. В этом случае система (8), (11) на финишном этапе своего движения также выходит на аттрактор с бифуркацией типа «вилки», параметры которой зависят от знака начальных условий по координате $\pm x_0$, что наглядно видно из рис. 6, при этом графики изменения $z(t)$, $r(t)$, $\psi(t)$ также практически не различаются. Из рис. 6-10 следует, что в системе (8), (11) не возникает каких-либо хаотических режимов движения.

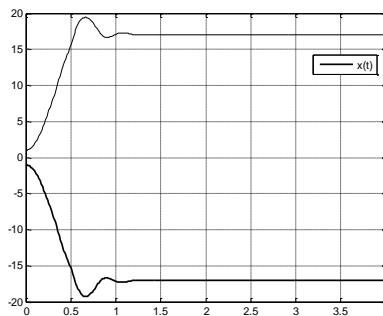


Рис. 6. Графики изменения $x(t)$

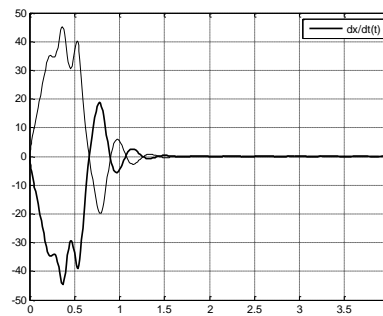


Рис. 7. Графики изменения $\dot{x}(t)$

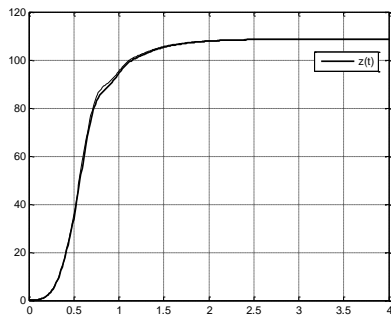


Рис. 8. Графики изменения $z(t)$

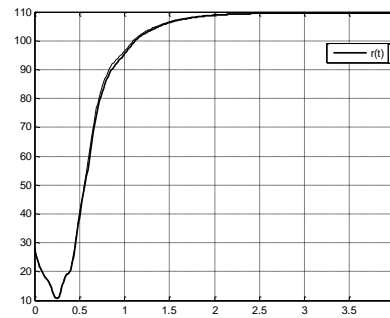


Рис. 9. Графики изменения $r(t)$

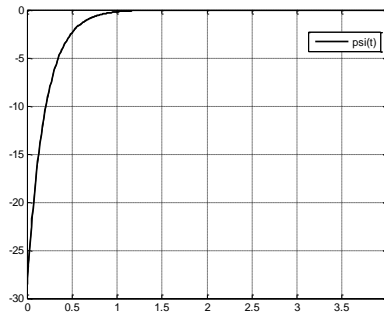


Рис. 10. Графики изменения $\psi(t)$

При большом значении параметра r получаются результаты моделирования системы (7), (10), приведенные на рис. 11-15. В данном случае были выбраны параметры $\sigma = 10$; $b = 8/3$; $\mu = 0,5$; $\alpha = 2$; $T = 0,2$ и начальные условия $r(0) = 150$, $x(0) = \pm 0,5$, $\dot{x}(0) = 0$, $z(0) = 0,5$. В этом случае система (7), (10) на финишном этапе своего движения также выходит на аттрактор с бифуркацией типа «вилки», параметры которой зависят от знака начальных условий по координате $\pm x_0$, что наглядно видно из рис. 11.

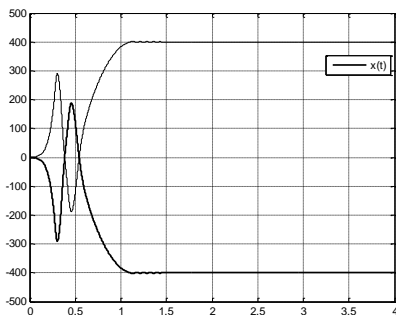


Рис. 11. Графики изменения $x(t)$

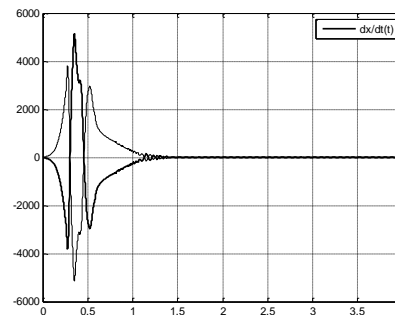


Рис. 12. Графики изменения $\dot{x}(t)$

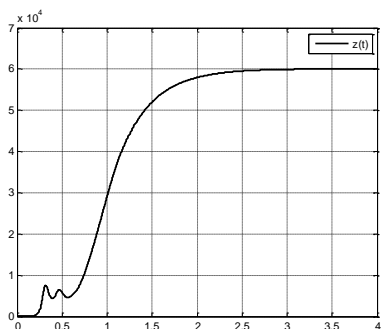


Рис. 13. Графики изменения $z(t)$

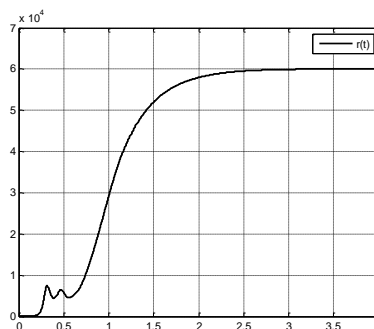


Рис. 14. Графики изменения $r(t)$

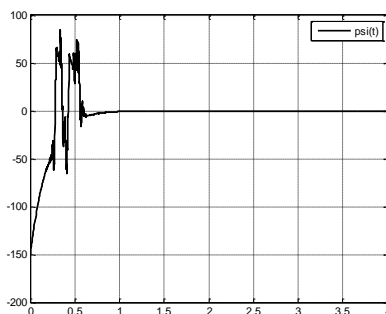


Рис. 15. Графики изменения $\psi(t)$

Итак, в статье показано, что если синтезировать генератор «управляющего параметра» $r(t)$, например вида (11), то тогда модель Лоренца становится обычной системой дифференциальных уравнений, в которой отсутствует странный аттрактор, фрактальная размерность и хаос. Это достаточно неожиданное обстоятельство требует, на наш взгляд, внесения изменений в понимание истинной сущности модели Лоренца, на чем настаивают, например, авторы монографии [9] и др.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Pecora L.M. Fundamentals of synchronization in chaotic systems. Concepts and applications / L.M. Pecora, T.L. Carroll, G.A. Jonnson, D.J. Mar, J.F. Heagy // Chaos. – 1997. – Vol. 7, № 4. – P. 520-543.
2. Peng J.N. Synchronizing hiperchaos with a scalar transmitted signal / J.N. Peng, E.J. Ding, M. Ding, W. Yang W. // Phys. Rev. Lett. – 1996. – Vol. 76, № 6. – P. 904-907.
3. Taanaka K. Unified Approach to Controlling Chaos via an LMI-Based Fuzzy Control Systems Design / K. Taanaka, T. Jkeda, H.O. Wang // IEEE Trans. Circuits Syst. J. – 1998. – Vol. 45, № 10. – P. 1021-1040.
4. Андриевский В.Р. Управление хаосом: методы и приложения. I. Методы / В.Р. Андриевский, А.Л. Фрадков // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 5.
5. Колесников А.А. Синергетическая теория управления. – М.: Энергоатомиздат, 1994.
6. Синергетика и проблемы теории управления / Под ред. А.А. Колесникова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
7. Колесников А.А. Синергетические методы управления сложными системами: теория системного синтеза. – М.: КомКнига, 2006.

8. Смейл С. Современные проблемы хаоса и нелинейности / С. Смейл. – Ижевк: ИКИ, 2004.
9. Магницкий Н.А. Новые методы хаотической динамики / Н.А. Магницкий, С.В. Сидоров. – М.: Едиториал УРСС, 2004.
10. Леонов Г.А. Странные аттракторы и классическая теория устойчивости движения / Г.А. Леонов. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004.
11. Зубов И.В. Методы анализа динамики управляемых систем / И.В. Зубов. – М.: Физматлит, 2003.
12. Неймарк Ю.И. Стохастические и хаотические колебания / Ю.И. Неймарк, П.С. Ланда. – М.: Наука, 1987.

Колесников Анатолий Аркадьевич

Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: anatoly.kolesnikov@gmail.com.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 88634360707.

Кафедра синергетики и процессов управления; заведующий кафедрой; профессор.

Капустина Анастасия Сергеевна

E-mail: nastena666@mail.ru.

Кафедра синергетики и процессов управления; аспирант.

Kolesnikov Anatoly Arkadevich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: anatoly.kolesnikov@gmail.com.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: +78634360707.

The Department of Synergetics and Control Processes; Head the Department; Professor.

Kapustina Anastasia Sergeevna

E-mail: nastena666@mail.ru.

The Department of Synergetics and Control Processes; Postgraduate Student.

УДК 621.3.013.62

С.С. Зельманов

**РЕЗОНАНС В ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЕ
С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ СОБСТВЕННЫМИ ПРОЦЕССАМИ**

Классическое определение резонанса, предложенное Н.Д. Папалекси в докладе «Эволюция понятия резонанса», не предполагает учета потерь в резонаторе, а, напротив, обращает эти потери в ноль и приводит колебания в резонаторе к нормальным колебаниям. Частота нормальных колебаний считается резонансной. Однако в RC-системах потери играют значительную конструктивную роль. В то же время в таких системах может иметь место как угодно острый резонанс. Поэтому объяснить явление резонанса в таких системах с позиций его классического определения не представляется возможным. Для устранения этого несоответствия предлагается спектральный критерий резонанса, связанный с экстремумом спектра свободного процесса системы, являющегося суммой собственных процессов. На основе этого критерия предлагается определение явления резонанса, распространяющееся на более широкий класс линейных стационарных систем с любым числом степеней свободы и без каких-либо ограничений на величину потерь в них.

Резонанс; нормальные колебания; свободный процесс; собственный процесс; экстремум огибающей модуля спектра.