УДК 519.6

Е.А. Проценко

МОДЕЛЬ И АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ТРАНСПОРТЕ НАНОСОВ

В статье рассмотрена нестационарная пространственно-одномерная модель транспорта наносов в прибрежной зоне водоемов и алгоритм численного решения дискретной задачи, базирующийся на методе прогонки.

Математическое моделирование; транспорт наносов; аккумуляция и абразия.

E.A. Protsenko

MODEL AND ALGORITHMS OF THE SEDIMENT TRANSPORT PROBLEM DECISION

The non-stationary one-dimensional model of sediment transport has been considered in a coastal zone of reservoirs and algorithm of the numerical decision of the appropriate discrete problem based on a thomas method has been developed in this paper.

Mathematical modeling; sediment transportation; accumulation and erosion.

Математическое моделирование изменения профиля дна в прибрежной зоне имеет важное как теоретическое, так и прикладное значение.

Для описания динамики морских наносов в данной работе применяется модель, которая описывает переформирование прибрежной зоны водоемов за счет движения воды и твердых частиц в одном направлении.

Соответствующая начально-краевая задача имеет вид

$$(1-\varepsilon)\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial Q_S}{\partial x}=h_0\sin(\varpi t+\theta)\,, \tag{1}$$

$$Q_S = A\varpi d\psi_S^{\beta}\,, \tag{2}$$

$$Q_0 = A\varpi d\psi_0^{\beta}\,, \tag{3}$$

$$\psi_0=\frac{\tau_B}{(\rho_1-\rho_0)gd}\,, \tag{4}$$

$$\tau_B=-0{,}6\,CU_B\left|U_B\right|, \tag{5}$$

где ε – пористость грунта; H – глубина дна, отсчитываемая от невозмущенного уровня водоема; Q – расход наносов; A и β – безразмерные постоянные (в настоящей работе A равна 19,5; β равна 3); τ_B – касательное напряжение на дне; ϖ – частота волны; ψ_0 – параметр Шильдса (касательное напряжение на дне, записанное в безразмерном виде); ρ_1, ρ_0 – плотности твердых частиц и воды; C – коэффициент сопротивления твердых частиц; U_B – придонная скорость в области неразрушенных волн.

Входящие в формулы значения U_B и τ_B интерпретируются не как мгновенные, а как усредненные в течение половины периода волны.

$$U_B = U_{BC}\left(\frac{x_n - x}{x_n - x_0}\right)^n, \tag{6}$$

где U_{BC} – скорость на критической глубине *H*; x_n – координата верхней границы наката; x_0 – координата точки опрокидывания волн; n – постоянная (в данной работе n=0,33).

При β=3 получаются известные в речной гидравлике формулы расхода наносов А. Шильдса (1948), Мейера – Петера и Мюллера (1948), Х. Эйнштейна – С. Брауна (1950).

Уравнение неразрывности дополняется начальным условием:

$$H(x) = S_0 x \text{ при } t = t_0\,. \tag{7}$$

В верхней границе наката, где скорость обращается в ноль, берег не подвергается деформациям:

$$H(x_H, t) = H_H, \quad x_H = H_H / S_0\,. \tag{8}$$

На границе «глубокой воды» глубина также не изменяется:

$$H(x_{ГЛ}, t) = H_{ГЛ}, \quad H_{ГЛ} = \lambda_0 / 2\,. \tag{9}$$

Предполагается, что на профиле перемещение осадков происходит только в сторону результирующего переноса. Движением частиц в направлении, противоположном направлению результирующего переноса, пренебрегаем. Таким образом, предполагается, что при моделировании аккумулятивных процессов осредненные скорости U_B направлены в сторону берега и имеют отрицательный знак в принятой системе координат, а наносы перемещаются только в сторону берега. Напротив, при моделировании абразии допускается, что все скорости U_B положительны, которые направлены в сторону моря, в этом же направлении перемещаются и наносы.

Далее используется декартова прямоугольная система координат, начало которой совмещено с урезом воды. Ось Ox совмещена с поверхностью невозмущенной жидкости и направлена в сторону моря. Предполагается, что в начальный момент времени $(t = 0)$ к откосу, сложенному из осадочных пород, подходят монохроматические волны.

Считаются заданными следующие параметры: S_0 – начальный уклон дна; h_0, λ_0 – высота и длина волны; τ – период волны; d, ρ_1, ρ_0 – характеристики осадков и воды; T – длительность шторма.

Итак, мы имеем уравнения:

$$(1-\varepsilon)\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Q_S}{\partial x} = h_0 \sin(\varpi t + \theta),$$

$$Q_S = A\varpi d \psi_S^{\beta},$$

$$Q_0 = A\varpi d\psi_0^{\beta}.$$

В выражении для параметра Шильдса используется уклон дна. Система уравнения для параметра Шильдса принимает следующий вид:

$$\psi_S = \psi_0\left(1 \pm \frac{\sin S}{tg\varphi_0}\right), \qquad (10)$$

где ψ_S – параметр Шильдса для наклонного дна; $S(x,t)$ – угол, составленный касательной к контуру дна в момент времени t; φ_0 – угол естественного откоса грунта в воде.

Физический смысл формулы для ψ_S состоит в следующем. При движении твердой частицы вверх по откосу в потоке должна быть совершена работа по преодолению силы тяжести. Поэтому при прочих равных условиях транспортирующая способность потока, переносящего наносы вверх по откосу, меньше, чем транспортирующая способность потока над горизонтальным дном. Соответственно расход потока, переносящего частицы в направлении к берегу, представляется в виде

$$Q_S = A\varpi d\psi_0^3\left(1 - \frac{\sin S}{tg\varphi_0}\right)^3. \qquad (11)$$

Делаем допущения при решении пространственной задачи о переформировании берегов: $\sin S \approx S \approx arctg\dfrac{\partial H}{\partial x} \approx \dfrac{\partial H}{\partial x}$.

С учетом этого допущения приходим к уравнению неразрывности вида:

$$(1-\varepsilon)\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(Q_0 - \frac{3Q_0}{tg\varphi_0}\frac{\partial H}{\partial x}\right) = h_0\sin(\varpi t + \theta). \qquad (12)$$

Вводя обозначения $a = \dfrac{3Q_0}{tg\varphi_0(1-\varepsilon)}$; $b = \dfrac{1}{1-\varepsilon}\dfrac{\partial Q_0}{\partial x}$; $f(x,t) = h_0\sin(\varpi t + \theta)$, получим уравнение, описывающее переформирование дна в случае, если все частицы наносов двигаются в сторону берега:

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial H}{\partial x}\right) + b = f(x,t). \qquad (13)$$

Соответственно расход наносов, переносимых волновым потоком в направлении моря, больше, чем в случае горизонтального дна, и записывается в виде:

$$Q_s = A\varpi d\psi_0^3\left(1 + \frac{\sin S}{tg\varphi_0}\right)^3.$$

Уравнение вида (13) описывает случай, когда все наносы перемещаются в сторону моря, т.е. имеет место абразия. Решение вопроса о направлении результирующего переноса осадков к берегу или от берега производится на основании «критерия крутизны», согласно которому длинные пологие волны намывающие берег, являются «конструктивными», а короткие и крутые – размывают берег и носят «деструктивный» характер.

Поставленная для уравнения параболического типа (13) начально-краевая задача решается приближенно конечно-разностным методом.

Строим сетку: интервал $\left(x_{Н}, x_{ГЛ}\right)$ и временной интервал разбиваются на равные части.

$$x_i = x_0 + i\cdot\Delta x, \quad i = 1,2,\ldots,N;$$
$$t_j = t_0 + j\cdot\Delta t, \quad j = 1,2,\ldots,M.$$

Уравнение в частных производных аппроксимируется двухслойной неявной схемой – системой трехточечных разностных уравнений:

$$\frac{H_i^{j+1}-H_i^j}{\Delta t}-\frac{1}{\Delta x}\left[a^j_{i+\frac{1}{2}}\left(\frac{H_{i+1}^{j+1}-H_i^{j+1}}{\Delta x}\right)-a^j_{i-\frac{1}{2}}\left(\frac{H_i^{j+1}-H_{i-1}^{j+1}}{\Delta x}\right)\right]+b_i^j = f_i^j,$$

где $H_i^j = H(x_i, t_j)$; $a^j_{i+\frac{1}{2}} = \dfrac{a_{i+1}+a_i}{2}$;

$$a^j_{i-\frac{1}{2}} = \frac{a_{i-1}+a_i}{2};\ b_i^j = \frac{Q_{i+1}^j - Q_i^j}{\Delta x};$$
$$f_i^j = f(x_i, t_j).$$

Система уравнений преобразуется к стандартному виду:

$$A_i H_{i-1} - B_i H_i + C_i H_{i+1} + D_i = 0;$$
$$A_i = -a^j_{i-\frac{1}{2}}\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2};\quad B_i = 1 + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}a^j_{i+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}a^j_{i-\frac{1}{2}};$$
$$C_i = -a^j_{i+\frac{1}{2}}\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2};\quad D_i = (b_i^j - f_i^j)\Delta t - H_i^j.$$

Затем, в соответствии с теорией метода прогонки, определяются прогоночные коэффициенты:

$$P_i = \frac{C_i}{B_i - A_{i-1}P_i};\quad W_i = \frac{D_i + A_i W_{i-1}}{B_i - A_{i-1}P_{i-1}};\quad i = 1,2,\ldots,N-1.$$

Коэффициенты P_0, W_0 и P_N, W_N находятся из граничных условий:

$$P_0 = 0,\quad W_0 = H(x_0),\quad P_N = 0,\quad W_N = H(x_{ГЛ}).$$

После того, как прогоночные коэффициенты определены, вычисляются значения искомой функции $H_i^{j+1} = P_i\ H_{i+1}^{j+1} + W_i^{j+1}$.

Метод прогонки при выполнении условия: $A_i + B_i \le C_i$, что в данной работе, выполняется и устойчив.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Леонтьев И.О.* Прибрежная динамика: волны, течения, потоки наносов. – М.: Геос. 2001. – 272 с.

Проценко Елена Анатольевна
Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.
E-mail: vvpost@rambler.ru
347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
Тел.: 8(8634)371-606
Кафедра высшей математики; старший преподаватель.

Protsenko Elena Anatolievna
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.
E-mail: vvpost@rambler.ru
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: 8(8634)371-606
The Department of Higher Mathematics; senior teacher.

УДК 518.5.001.57

А.Е. Чистяков

ТРЕХМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ВОДНОЙ СРЕДЫ В АЗОВСКОМ МОРЕ С УЧЕТОМ ТРАНСПОРТА СОЛЕЙ И ТЕПЛА

Работа посвящена разработке математической модели для расчета полей скоростей применительно к Азовскому морю. В ходе выполнения работы построена математическая модель для расчета полей скоростей применительно к мелководным водоемам. Данная модель учитывает такие физические параметры как: сила Кориолиса, турбулентный обмен, сложная геометрия дна и береговой линии, испарение, стоки рек, переменная плотность жидкости, ветровые течения и трение о дно.

Гидродинамика; транспорт солей и тепла; переменная плотность жидкости.

A.E. Chistyakov

THREE-DIMENSIONAL MODEL OF MOVING OF AQUATIC ENVIRONMENT CONSIDERING TRANSPORT OF SALT AND HEAT IN AZOV SEA

This work is dedicated to building of mathematical model of computation of field of velocities with reference to Azov Sea. Mathematical model of computation of field of velocities with reference to shallow water basins was built in this work. This model takes into consideration physical properties: Coriolis force, turbulent exchange, complex geometry of seabed and coastline, evaporation, river flows, variable liquid density, wind currents and friction on seabed.

Hydrodynamics; transport of salt and heat; variable liquid density.

Экологическая система Таганрогского залива и Азовского моря в целом является уникальной. Наш залив – один из наиболее рыбопродуктивных естественных водоемов, что объясняется благоприятными природно-климатическими условиями, малосоленостью, обилием корма.