Shishenya Alexander Vladimirovich
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.
E-mail: primat-55-alex@yandex.ru.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: 8(928)322-282, 8(908)176-18-37.
The Department of Higher Mathematics; student.

Афонин Анатолий Андреевич
Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.
E-mail: afonin_920@gmail.com.
347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
Тел.: 8(8634)371-606
Кафедра высшей математики; профессор.

Afonin Anatoliy Andreevicy
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.
E-mail: afonin_920@gmail.com.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: 8(8634)371-606
The Department of Higher Mathematics; professor.

Сухинов Александр Иванович
Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.
E-mail: sukhinov@gmail.com.
347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
Тел.: 8(8634)310-599; 7(928)102-11-06.
Руководитель ТТИ ЮФУ; профессор.

Sukhinov Alexander Ivanovich
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.
E-mail: sukhinov@gmail.com.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: 8(8634)310-599; 7(928)102-11-06.
Chief of TIT SFedU; professor.

УДК 534.29:551.594.25

А.А. Афонин, А.И. Сухинов

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ГЕОФИЛЬТРАЦИИ И ГЕОМИГРАЦИИ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ, ОБЛАДАЮЩИХ ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ

В данной статье представлены двумерные линейные модели, вытекающие из обобщенного уравнения Буссинеска, описывающего геофильтрацию в почвах с фрактальной структурой. Кроме того представлены математические модели геомиграции загрязнений в грунтовых водах в классической постановке, а также в почвах, обладающих фрактальной структурой.

Геофильтрация; уравнение Буссинеска; фрактальные структуры; геомиграция, грунтовые воды; почвы.

A.A. Afonin, A.I. Sukhinov

MATHEMATICAL MODELS OF GEOFILTRRATION AND GEOMIGRATION IN POROUS MEDIA WITH FRACTAL STRUCTURE

In this study 2-D linear models are coming from generalised, Boussinesq eqution describing geofiltration in soils with fractal structures are presented. In this study are presented too mathematical models geomigration of contaminations with groundwater in classical way and in soils with fractal structures.

Geofltration; Boussinesq equation; fractal structures; geomigration; groundwater; soils.

Геофильтрация

Уравнение Буссинеска было выведено при условиях, соответствующих гидравлической постановке задачи, а именно при условиях осреднения фильтрационного потока по высоте.

Рассмотрим неустановившееся движение грунтовых вод в безнапорном пласте со слабопроницаемым водоупором

$$z = h_0(x, y),\ (x, y) \in D$$

и слабоизменяющейся свободной поверхностью

$$z = h(x, y, t),\quad (x, y) \in D,\ 0 \le t \le T \cdot$$

Занятая грунтовой водой пористая неоднородная среда D в любой момент времени t от начального $t = 0$ до расчетного $t = T$ в каждом вертикальном сечении определяется функцией

$$H(x, y, t) = h(x, y, t) - h_0(x, y) \cdot$$

Тогда, используя уравнение баланса для столба жидкости высотой $H(x,y,t)$ с площадью $\Delta x \cdot \Delta y,$ можно получить [1] *уравнение Буссинеска*:

$$\frac{\partial(mh)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(H\frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(H\frac{\partial h}{\partial y}\right) + w, \tag{1}$$

где $h = \dfrac{p}{\rho g} + z$ – функция напора, m – пористость среды, w – разность между инфильтрацией и испарением, рассчитанная на единицу площади горизонтальной проекции поверхности грунтовых вод.

Если ввести обозначение $kH = K,$ называемое как и в случае напорного пласта, *проводимостью* пласта из (1) получим *классическое уравнение Буссинеска* для безнапорного установившегося движения жидкости в пористой среде:

$$\frac{\partial(mh)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial h}{\partial y}\right) + w, \tag{2}$$

Если w_0 – скорость фильтрации слабопроницаемого водоупора с коэффициентом фильтрации $k_0 (k_0 << k)$, мощностью (толщиной) d_0 и напором H_0, то $w_0 = -\dfrac{k_0}{d_0}(h - H_0),$ и уравнение Буссинеска представляется в виде

$$\frac{\partial(mh)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial h}{\partial y}\right)-\frac{k_0}{d_0}(h-H_0), \quad (3)$$

которое может быть представлено в более удобной форме:

$$\frac{\partial(mh)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial h}{\partial y}\right)-\frac{k_0}{kd_0}K+f_0, \quad (4)$$

где $f_0=-\frac{k_0}{d_0}(h_0-H_0)+w,$

В случае горизонтального водоупора $\left(h_0(x,y)\equiv 0\right)$ последнее уравнение может быть представлено в виде:

$$\frac{\partial(mh)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(kh\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(kh\frac{\partial h}{\partial y}\right)-\frac{k_0}{d_0}h+f_0, \quad (5)$$

где $f_0=\frac{k_0H_0}{d_0}+w.$

Если m и k – постоянные величины, уравнение Буссинеска может быть представлено следующим образом:

$$\frac{\partial h}{\partial t}=\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial h}{\partial y}\right)\right)-\beta h+\gamma f_0=0, \quad (6)$$

где $\alpha=\frac{k}{m},\ \beta=\frac{k_0}{md_0},\ \gamma=\frac{1}{m}.$

Изменение уровня грунтовых вод в классической теории фильтрации определяется величиной $h_t=\frac{\partial h}{\partial t}$. Это допущение находит экспериментальное подтверждение в несильно пористых средах. Реальные пористые среды, в особенности реальные почвы, хорошо интерпретируются как среды с фрактальными структурами [2, 3]. Примем гипотезу:

$$h_t=\kappa\int_0^t(t-\tau)^{-\alpha}\frac{\partial h(x,y,\tau)}{\partial\tau}d\tau, \quad (7)$$

где κ и α – безразмерные величины, характеризующие фрактальную природу процесса движения грунтовых вод в сильно пористых средах, $\kappa>0,\quad 0<\alpha<1.$

Введем оператор дробного, в смысле Римана – Лиувилля, интегродифференцирования порядка $|\alpha|$ с началом в начальный момент времени $t=0$ и с концом в текущий момент времени $t>0$, который действует на функцию $\varphi(t)\in L[0,T]$ по формуле [4]:

$$D_{0t}^{\alpha}\varphi = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(-\alpha)} \displaystyle\int_0^t \dfrac{\varphi(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1}}, & \alpha < 0, \\ \varphi(t), & \alpha = 0, \\ \dfrac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial t^{[\alpha]+1}} D_{0t}^{\alpha-[\alpha]-1}\varphi, & \alpha > 0. \end{cases} \tag{8}$$

Тогда гипотезу (7) можно записать в виде

$$h_t = \kappa\Gamma(1-\alpha) D_{0t}^{\alpha-1} \frac{\partial h(x,y,\tau)}{\partial \tau}, \tag{9}$$

где $D_{0t}^{\alpha-1}$ – оператор дробного дифференцирования порядка α – 1 с началом в начальный момент времени $t = 0$.

Введем в рассмотрение оператор дробного дифференцирования M. Caputo [4] порядка α:

$$\partial_{0t}^{\alpha} h(x,y,t) = D_{0t}^{\alpha-1} \frac{\partial h(x,y,\tau)}{\partial \tau}, \qquad 0 < \alpha \le 1. \tag{10}$$

Сравнивая (9) и (10), имеем

$$h_t = \kappa\Gamma(1-\alpha)\partial_{0t}^{\alpha} h(x,y,t), \tag{11}$$

Учитывая (4) и (10), получим

$$\kappa\Gamma(1-\alpha)\partial_{0t}^{\alpha}\left(mh(x,y,t)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial h}{\partial y}\right) - \frac{k_0}{kd_0}K + f_0, \tag{12}$$

Уравнение (12) называется обобщенным уравнением Буссинеска с дробной производной по времени.

Легко убедиться, что

$$\lim_{\alpha\to 1}\partial_{0t}^{\alpha} h(x,y,t) = \frac{\partial h(x,y,t)}{\partial t}.$$

Поэтому уравнение (12) совпадает с классическим уравнением Буссинеска только в предельном случае, когда

$$\kappa = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \text{ и } \alpha \to 1.$$

Линеаризируя уравненеие Буссинеска, можно получить линейные двумерные модели фильтрации грунтовых вод, в том числе и в пористых средах с фрактальной структурой. Если в уравнении Буссинеска в форме (6) заменить множитель h в круглых скобках и свободном члене некоторым постоянным значением $h_{\text{ср}}$, получим уравнение

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right) + f(x,y,t), \tag{13}$$

где $a=\dfrac{kh_{cp}}{m}, \quad f=\dfrac{f_0}{m}-\dfrac{k_0h_{cp}}{md_0}.$

Уравнение (13) описывает плановую задачу о течении в верхней полуплоскости плоскости Oxy. Пусть ось Ox представляет собой вертикальный берег доходящего до горизонтального водоупора канала. В начальный момент времени имеется постоянная глубина грунтовых вод H_0 и уровень воды в канале внезапно изменяется так, чтобы в одной части его при x < 0 устанавливается глубина воды H_1, а в другой, при x > 0 – глубина H_2, которые затем поддерживаются постоянными. Требуется найти уравнение свободной поверхности грунтовых вод $z=h(x,y,t)$ в полуплоскости y > 0, т.е. по одну сторону канала при начальном и граничном условиях соответственно:

$$h(x,y,0)=\varphi(x,y),\ \ h(x,0,t)=F(x,t). \tag{14}$$

Кроме того, уравнение (13) описывает образование и растекание бугров грунтовых вод, которые возникают при поливах или при выпадении осадков, которые в дальнейшем медленно рассасываются, создавая местное повышение уровня грунтовых вод. В уравнении (13) по-прежнему $a=\dfrac{kh_{cp}}{m}$, а свободный член *f* учитывает влияние инфильтрации и испарения, а также слабопроводящего водоупора на процесс растекания бугра грунтовых вод. Различные случаи начальных условий и вида $f(x,y,t)$, а также решения задачи о растекании бугров грунтовых вод при различных условиях в квадратурах представлены в работе [5].

Линеаризация уравнения Буссинеска (6) может быть осуществлена также, если положить $h^2=u$; в этом случает мы также приходим к уравнению (13), но относительно функции $u(x,y,t)$. В некоторых случаях более близкие к точному решению (6) Буссинеска могут быть получены при первом способе линеаризации, в других случаях – при втором.

В случае фрактальной организации грунта, с учетом обобщенного уравнения Буссинеска, уравнение (13) может быть трансформировано к следующему виду:

$$\partial_{0t}^{\alpha}h(x,y,t)=a\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t), \tag{15}$$

где ∂_{0t}^{α} – оператор дробного (в смысле M. Caputo) дифференцирования по *t* порядка $\alpha\in[0,1]$ с началом в начальный момент времени $t=0$:

$$\partial_{0t}^{\alpha}h(x,y,t)=\int_0^t\frac{(t-\tau)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\cdot\frac{\partial h(x,y,\tau)}{\partial\tau}d\tau. \tag{16}$$

Для широкого класса реальных задач фильтрации грунтовых вод для грунтов, которые могут быть интерпретированы как фрактальные, уравнение (15) с начальными и граничными условиями могут представлять линейные двумерные модели, выведенные из обобщенного уравнения Буссинеска.

Геомиграция

При мелиорации земель, проектировании и строительстве гидротехнических сооружений, в вопросах охраны окружающей среды, вопросах защиты территорий от подтопления, в вопросах строительства и эксплуатации водозаборных скважин важное значение играют геофильтрация и геомиграция водорастворимых веществ, в частности солей, в почве и грунтах.

При исследовании подземных вод важным является такой расчет работы водозаборных скважин, при котором они не загрязнялись промышленными стоками, сбрасываемыми в грунт или подземные хранилища в районе водозабора. При работе водозаборных скважин в районе морских побережий, засоленных озер и солончаков, существенно, чтобы водозабор не засорялся. Очевидно, что форма границ области загрязнения существенно влияет на условия работы водозабора.

Грунтовые воды всегда содержат то или иное количество растворимых солей. Некоторое количество солей находится в грунте в твердой фазе, они могут быть сорбированными на частицах грунта и десорбироваться с их поверхности, или быть рассеянными внутри пор. Имеет место то или иное первичное засоление почв и грунтов, в результате ирригации наблюдается вторичное засоление. Оно объясняется тем, что при подъеме грунтовых вод, когда они приблизятся к поверхности земли на достаточно близкое расстояние (обычно меньшее трех метров), испарение с их поверхности становится особенно интенсивным, и соли выносятся в верхние слои грунта и на его поверхность. При этом снижается плодородие почвы, а через некоторый промежуток времени она может стать совсем бесплодной. Поэтому вопросы прогноза водно-солевого режима почв и грунтов имеют весьма важное значение.

Считаем пористую среду, в которой происходит фильтрация недеформируемой; будем пренебрегать силами инерции, вызывающими конвективное ускорение, силами вязкого трения внутри жидкости; будем пренебрегать молекулярной диффузией, вызываемой градиентом температуры. Тогда для фильтрации неоднородной жидкости, являющейся смесью двух компонент, уравнение для фильтрации одной компоненты в смеси имеет вид

$$m\frac{\partial(\rho c)}{\partial t}+\nabla(\mathbf{v}\cdot\rho c)=\nabla(\rho D\nabla\cdot c), \qquad (17)$$

где $\rho=\rho(c)$ – плотность смеси; $m=m(x)$ – пористость среды; $v=v(x,t)$ – скорость фильтрации (смеси); $D=D(x)$ – коэффициент диффузии.

Если в уравнении (17) пренебречь инерционными членами $(\rho=const)$, уравнение (17) можно переписать в виде:

$$m\frac{\partial c}{\partial t}=\nabla\cdot(D\nabla c)-(\mathbf{v}\cdot\nabla)c. \qquad (18)$$

К уравнению (18) присоединяем закон Дарси и уравнение неразрывности:

$$\mathbf{v}=k(\mathbf{x})\nabla\varphi, \quad \nabla(\rho\mathbf{v})=0, \qquad (19)$$

где φ – обобщенный потенциал фильтрации ($\varphi=-k_0h$ в случае профильной фильтрации; $\varphi=-k_0Th$ в случае плановой напорной фильтрации; $\varphi=-\frac{1}{2}k_0h^2$

в случае плановой напорной фильтрации со свободной поверхностью, где h – пьезометрический напор; Т – мощность водопроницаемого пласта; k_0 – характерный размер); $k(\mathbf{x})$ – коэффициент фильтрации.

В принципе все задачи геофильтрации (или геомиграции) являются трехмерными. Однако во многих практических случаях фильтрационные течения таковы, что течениями в одном из трех координатных направлений можно пренебречь, и исследовать фильтрацию в двух других направлениях.

Плановые задачи геомиграции

Для незначительных по толщине и больших по простиранию водоносных пластов можно предположить, что градиенты давления, а следовательно, и фильтрация в направлении Oz пренебрежимо мала по сравнению с фильтрацией в двух других направлениях. Все величины, входящие в уравнения геомиграции (18-19), представляют собой усредненные тем или иным способом по оси Oz величины. Гравитационные члены, входящие в уравнение, считаются равными нулю.

Уравнения (18-19) для *плановой* геомиграции перепишутся в следующем виде:

$$m\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial c}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial c}{\partial y}\right)-\mathrm{v}_x\frac{\partial c}{\partial x}-\mathrm{v}_y\frac{\partial c}{\partial y}, \tag{20}$$

$$\mathbf{v}=k(x,y)grad\varphi, \quad \nabla(\rho\mathbf{v})=0. \tag{21}$$

Профильные задачи геомиграции

Пренебрегая фильтрацией в одном из горизонтальных направлений вместо вертикального направления, получим модель, которую называют *профильной.*

Этот вид можно использовать в тех случаях, когда фильтрация происходит преимущественно в вертикальном и одном из горизонтальных направлений. Величины, входящие в уравнения, представляют собой усредненные тем или иным способом по оси Оу величины.

Уравнения (20-21) для профильной геофильтрации можно записать в следующем виде:

$$m\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial c}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial c}{\partial y}\right)-\mathrm{v}_x\frac{\partial c}{\partial x}-\mathrm{v}_z\frac{\partial c}{\partial z}, \tag{22}$$

$$\mathbf{v}=k(x,z)grad\varphi, \quad \nabla(\rho\mathbf{v})=0. \tag{23}$$

Радиальные течения

К таким течениям относятся фильтрационные течения с одной скважиной (водозаборной или нагнетательной). В этом случае фильтрация вблизи скважин также является двумерной. Функции, входящие в уравнения геомиграции, представляют собой усредненные тем или иным способом по координате φ величины.

В настоящее время значительный интерес представляет разработка математических моделей геомиграции, учитывающих влияние фрактальной структуры почвы на движение загрязнений в потоке грунтовых вод и на их водно-солевой режим.

Установлено [3], что почвогрунт имеет фрактальную структуру. В настоящее время разработаны методы, позволяющие наблюдать коллоидные структуры непосредственно в почвах, получать информацию о фрактальной размерности почв [6]. Учет этого фактора принципиально меняет уравнения геомиграции, превращая их в дифференциальные уравнения дробного порядка.

Для плановой геомиграции перепишем уравнение (20) с учетом коэффициента фрактальной диффузии и члена, учитывающего содержание солей в твердой фазе:

$$m\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_f\frac{\partial c}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D_f\frac{\partial c}{\partial y}\right)-\mathrm{v}_x\frac{\partial c}{\partial x}-\mathrm{v}_y\frac{\partial c}{\partial y}+\beta(c_m-c), \tag{24}$$

где β – коэффициент растворимости; c_m – предельная концентрация насыщения; D_f – коэффициент фрактальной диффузии.

Если рассматриваются хорошо растворимые соли, коэффициент растворимости β мал и членом $\beta(c_m-c)$ можно пренебречь.

Вводя D_{ot}^{β} и ∂_{ot}^{α} – операторы дробного интегродифференцирования порядка $|\beta|$ Римана – Лиувилля и M. Caputo порядка α [3], имеем аналог уравнения (24):

$$m\partial_{0t}^{\alpha}c(x,y,t)=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_f\frac{\partial c}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D_f\frac{\partial c}{\partial y}\right)-\mathrm{v}_x\frac{\partial c}{\partial x}-\mathrm{v}_y\frac{\partial c}{\partial y}+\beta(c_m-c), \tag{25}$$

где $0<\alpha\leq 1$.

Для профильной геомиграции перепишем уравнение (22) в виде

$$m\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_f\frac{\partial c}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D_f\frac{\partial c}{\partial z}\right)-\mathrm{v}_x\frac{\partial c}{\partial x}-\mathrm{v}_z\frac{\partial c}{\partial z}+\beta(c_m-c). \tag{26}$$

Учитывая, что движение примесей происходит преимущественно вдоль оси 0*z*, заменим соответствующие производные по *z* в уравнении (26) производными дробного порядка:

$$m\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_\xi\frac{\partial c}{\partial x}\right)+D_f\partial_{0z}^{\alpha}c(x,\xi,t)-\mathrm{v}_x\frac{\partial c}{\partial x}-\mathrm{v}_z D_{0z}^{\alpha-n}\frac{\partial c(x,\xi,t)}{\partial\xi}+\beta(c_m-c), \tag{27}$$

где

$$\partial_{0z}^{\alpha}c(x,\xi,t)=D_{0z}^{\alpha-n}\frac{\partial^n c(x,\xi,t)}{\partial\xi^n},\qquad n-1<\alpha\leq n,\quad n=1,2,\dots .$$

Коэффициент D_f в уравнениях (24-27) определяется фрактальной размерностью почв и зависит от их структуры и влажности. Исследование фрактальных размерностей различных типов почв и их анализ, полученные в работе [6] методом малоуглового рассеяния нейтронов, показывает, что D_f удовлетворяет неравенству $2,4\leq D_f\leq 3,22$. Фрактальная размерность почв дает интегральную характеристику их коллоидной структуры, и в первом приближении показатель порядка α уравнения (27) пропорционален или совпадает с фрактальной размерностью D_f. Приведенные уравнения, представляющие двумерные математические модели геомиграции в пластах с фрактальной структурой, имеют место для изотропных фрактальных сред с соответствующими порядками дробных производных по времени и пространственным переменным.

Одномерные классические профильные задачи вертикальной геомиграции солей, вытекающие из уравнения (22), были рассмотрены в работе [1]. Соответствующие уравнения, описывающие одномерную вертикальную геомиграцию с учетом фрактальной структуры грунтов, были рассмотрены в работе [8].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977.
2. *Нахушев А.М.* Элементы дробного исчисления и их применение. – Нальчик: Изд-во “КБНУ” РАН, 2000.
3. *Нахушев А.М., Нахушева В.А., Сербина Л.И.* О некоторых прикладных аспектах дробного исчисления. Тезисы докладов международной конференции «Воздействие интенсивных потоков на вещество». – Терскол, 1999.
4. *Caputo M.* Elasticita e Dissipazione. – Zanichelli, Bologna, 1969.
5. *Полубаринова – Кочина П.Я., Пряжинская В.Г., Эмих В.Н.* Математические методы в вопросах орошения. – М.: Наука, 1969.
6. *Федотов Г.Н., Третьяков Ю.Д., Иванов В.К., Куклин А.Н., Пахомов Е.Н., Исламов А.Х., Початкова Т.Н.* Влияние влажности на фрактальные свойства почвенных коллоидов // ДАН, 2006, Т409, 2.
7. *Сербина Л.И.* Об одной математической модели переноса субстанции во фрактальных средах // Математическое моделирование. 2003. Т15, 9.
8. *Беданокова С.Ю.* Математическое моделирование солевого режима почв с фрактальной организацией // Труды 2-го Международного форума (7-й международной конференции молодых ученых и студентов) «Актуальные проблемы современной науки». Самара. 2006. Ч. 1-3.

Афонин Анатолий Андреевич
Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.
E-mail: afonin_920@gmail.com.
347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
Тел.: 8(8634)371-606
Кафедра высшей математики; профессор.

Afonin Anatoliy Andreevicy
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.
E-mail: afonin_920@gmail.com.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: 8(8634)371-606
The Department of Higher Mathematics; professor.

Сухинов Александр Иванович
Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.
E-mail: sukhinov@gmail.com.
347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
Тел.: 8(8634)310-599; 7(928)102-11-06.
Руководитель ТТИ ЮФУ; профессор.

Sukhinov Alexander Ivanovich
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.
E-mail: sukhinov@gmail.com.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: 8(8634)310-599; 7(928)102-11-06.
Chief of TIT SFedU; professor.