

УДК 534.29:551.594.25

А.В. Шишениа, А.А. Афонин, А.И. Сухинов**ПОСТРОЕНИЕ ТРЁХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ГЕОФИЛЬТРАЦИИ ФЛЮИДА
В МНОГОСЛОЙНЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ**

Целью данной работы является построение и исследование трёхмерной модели фильтрации флюида в многослойной среде. В результате работы были получены поля пьезометрической высоты и скорости фильтрации флюида в модельной области с двумя типами грунта.

Уравнение Дарси; уравнение неразрывности; задачи фильтрации; трёхмерная визуализация.

A.V. Shishenya, A.A. Afonin, A.I. Sukhinov**THREE-DIMENSIONAL MODEL OF FLUID FILTRATION
IN A MULTI-LAYER POROUS MEDIA STRUCTURE**

The main purpose of the work is to create and to investigate three-dimensional model of fluid filtration in a multi-layer environment. Fields of hydraulic head and filtration velocity in the model region had been received as a result.

Darcy equation; continuity equation; filtration; 3D visualization.

Подземные пространства, в которых протекают гидродинамические процессы, представляют собой, как правило, пористые или трещиновато-пористые тела, характеризующиеся сложной системой пор, каналов, трещин, по которым может происходить течение флюида – жидкости или газа. Течение через такие пористые тела, при котором сила трения флюида о скелет играет определяющую роль, называется фильтрацией.

Численное решение задач фильтрации играет важную роль при строительстве дамб, скважин, ирригационных сооружений, а также при проектировании, постройке и эксплуатации гидротехнических и мелиоративных сооружений, в горном деле, при решении экологических проблем. С точки зрения теории такие задачи приводят к нелинейным уравнениям математической физики с весьма общими свойствами [1].

Целью данной работы является построение комплекса программ для нахождения трёхмерных полей пьезометрической высоты и скорости фильтрации флюида в многослойном грунте, а также средств, позволяющих визуализировать и изучать результаты расчетов.

В качестве модели рассмотрим процесс фильтрации флюида в грунте, состоящем из двух горизонтальных слоёв с различными характеристиками. Будем предполагать, что рассматриваемая область граничит с одной стороны с источником флюида, например, рекой, а с другой – с поверхностью высачивания, например, со стенкой оврага. Остальные стенки считаем непроницаемыми. Направим координатную ось z против вектора ускорения свободного падения, а оси x и y так, чтобы построенная система координат оказалась правой прямоугольной. В качестве расчетной области D возьмем прямоугольный параллелепипед (рис. 1).

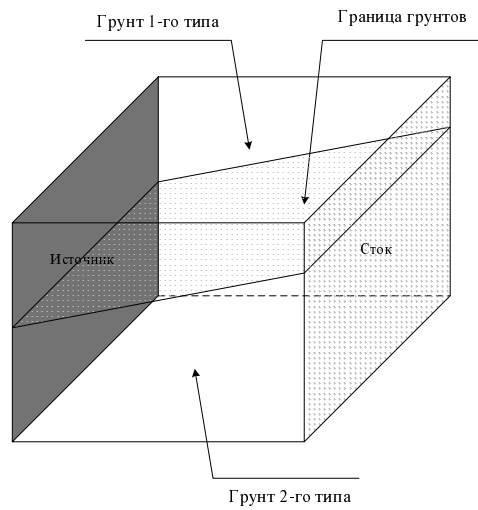


Рис. 1. Модельная область D с указанием типов граничных условий и положения грунтов

Опишем модель геофильтрации следующими уравнениями [2]:

- ◆ уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho m(p)S(p)) = -\text{div}(\rho \vec{v}) + q, \quad (1)$$

- ◆ закон Дарси:

$$\vec{v} = -K \cdot \text{grad}(h), \quad (2)$$

где K – в общем случае тензор 2-го ранга.

Для изотропной среды тензор $K = k \cdot E$, где k – скалярная функция, E – единичный тензор. Для анизотропной среды тензор K имеет произвольный вид.

p – поровое давление (давление флюида),

ρ – плотность носителя (флюида),

$m(p)$ – пористость (отношение объема порового пространства к полному объёму тела),

$S(p)$ – функция водонасыщения,

q – мощность источников,

\vec{v} – скорость фильтрации,

$$h = \frac{p}{\rho g} + z \quad (3)$$

зависимость напора от давления (пьезометрическая высота),

K – тензор гидравлической проводимости.

Примем следующие упрощения для коэффициентов и функций, участвующих в уравнениях. Будем считать, что жидкость несжимаемая, а источники отсутствуют:

$$\rho = \text{const}, \quad q = 0.$$

Также допуская, что пористость слабо зависит от порового давления, положим, что пористость есть функция только координат:

$$m = m(x, y, z),$$

а функцию водонасыщения приближённо зададим полиномом [3]:

$$S(p) = \frac{1}{3} a(x, y, z) \cdot p^3 + \frac{1}{2} b(x, y, z) \cdot p^2. \quad (4)$$

$$\text{Положим } K = \begin{pmatrix} k_1(x, y, z) & 0 & 0 \\ 0 & k_2(x, y, z) & 0 \\ 0 & 0 & k_3(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

Упростим уравнения (1), (2) модели, учитывая перечисленные предположения. Имеем

$$\vec{v} = -K \cdot \text{grad}(h); \quad (1')$$

$$\rho \cdot m \frac{\partial}{\partial t} (S(p)) = -\rho \cdot \text{div}(\vec{v}). \quad (2')$$

Выразим из (3) поровое давление и подставим в левую часть уравнения (2'). Тогда с учётом выражения (4) имеем:

$$p = \rho g (h - z),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} S(\rho g (h - z)) = h'_t \cdot g \rho \cdot \left(a(x, y, z) \cdot (\rho g (h - z))^2 + b(x, y, z) \cdot \rho g (h - z) \right).$$

Подставляя уравнение (1') в уравнение (2') и учитывая принятые упрощения, приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} h'_t \cdot g \rho \cdot m(x, y, z) \cdot \left(a(x, y, z) \cdot (\rho g (h - z))^2 + b(x, y, z) \cdot \rho g (h - z) \right) = \\ = (k_1(x, y, z) h'_x)'_x + (k_2(x, y, z) h'_y)'_y + (k_3(x, y, z) h'_z)'_z \end{aligned} \quad (5)$$

$$\vec{v} = -K \cdot \text{grad}(h). \quad (6)$$

Поставим граничные условия в соответствии с описываемой моделью.

1. Левая стенка – источник. Граничное условие 2-го рода:

$$\frac{\partial h}{\partial n} = \varphi_1(x, y, z). \quad (7)$$

2. Правая стенка – сток (высачивание). Граничное условие 1-го рода:

$$\begin{aligned} p &= \varphi_2(x, y, z), \\ h &= \frac{\varphi_2(x, y, z)}{\rho g} + z. \end{aligned} \quad (8)$$

3. Верхняя, нижняя, передняя, задняя стенки – непроницаемая граница

$$\frac{\partial h}{\partial n} = 0,$$

$$v_n = 0.$$

4. Граница двух пластов.

$$p_1 = p_2,$$

$h_1 = h_2$, т.е. функция пьезометрической высоты непрерывна.

Выполним аппроксимацию уравнений модели.

Производная по временной координате.

Обозначим

$$f(x, y, z) = g\rho \cdot m(x, y, z) \cdot \left(a(x, y, z) \cdot (\rho g(h - z))^2 + b(x, y, z) \cdot \rho g(h - z) \right),$$

тогда

$$h'_i \cdot f(x, y, z) \cong \frac{h^{n+1} - h^n}{\tau} \cdot f_{i,j,k}^n.$$

Производные по пространственным координатам в центральных узлах в общем случае аппроксимируют следующим образом:

$$\begin{aligned} (k_1 h'_x)'_x &\cong a_{1i+1} \frac{h_{i+1,j,k} - h_{i,j,k}}{h_x^2} - a_{1i} \frac{h_{i,j,k} - h_{i-1,j,k}}{h_x^2}, \\ (k_2 h'_y)'_y &\cong a_{2j+1} \frac{h_{i,j+1,k} - h_{i,j,k}}{h_y^2} - a_{2j} \frac{h_{i,j,k} - h_{i,j-1,k}}{h_y^2}, \\ (k_3 h'_z)'_z &\cong a_{3k+1} \frac{h_{i,j,k+1} - h_{i,j,k}}{h_z^2} - a_{3k} \frac{h_{i,j,k} - h_{i,j,k-1}}{h_z^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} a_{1i+1} &= \left(\frac{1}{h_x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{k_1(x, y, z)} \right)^{-1}, \\ a_{2j+1} &= \left(\frac{1}{h_y} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{dy}{k_2(x, y, z)} \right)^{-1}, \\ a_{3k+1} &= \left(\frac{1}{h_z} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{dz}{k_3(x, y, z)} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Учитывая, что коэффициенты диффузии $k_1(x, y, z)$, $k_2(x, y, z)$, $k_3(x, y, z)$ являются кусочно-непрерывными функциями и терпят разрыв 1-го рода на границе грунтов, получаем:

$$\begin{aligned} a_{1i+1} &= k_{1i+\frac{1}{2},j,k}, \quad a_{1i} = k_{1i-\frac{1}{2},j,k}, \\ a_{2j+1} &= k_{2j+\frac{1}{2},j,k}, \quad a_{2j} = k_{2j-\frac{1}{2},j,k}, \end{aligned}$$

$$a_{3k+1} = k_{3k+\frac{1}{2},j,k}, \quad a_{3k} = k_{3k+\frac{1}{2},j,k}.$$

Учитывая полученные равенства в формулах (9), имеем:

$$\begin{aligned} (k_1 h'_x)'_x &\cong k_{1i+\frac{1}{2},j,k} \frac{h_{i+1,j,k} - h_{i,j,k}}{h_x^2} - k_{1i-\frac{1}{2},j,k} \frac{h_{i,j,k} - h_{i-1,j,k}}{h_x^2}, \\ (k_2 h'_y)'_y &\cong k_{2i,j+\frac{1}{2},k} \frac{h_{i,j+1,k} - h_{i,j,k}}{h_y^2} - k_{2i,j-\frac{1}{2},k} \frac{h_{i,j,k} - h_{i,j-1,k}}{h_y^2}, \\ (k_3 h'_z)'_z &\cong k_{3i,j,k+\frac{1}{2}} \frac{h_{i,j,k+1} - h_{i,j,k}}{h_z^2} - k_{3i,j,k-\frac{1}{2}} \frac{h_{i,j,k} - h_{i,j,k-1}}{h_z^2}. \end{aligned} \quad (9')$$

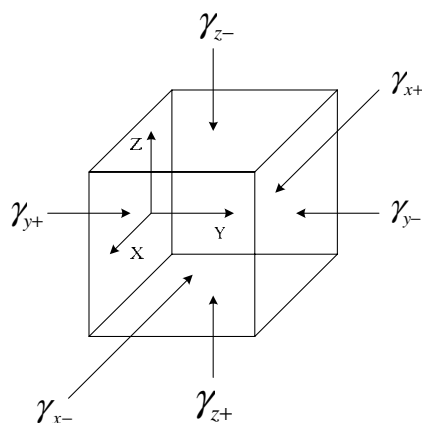


Рис. 2. Положение типов границ

Займемся аппроксимацией уравнений на границах. Обозначим через γ_{x+} , γ_{x-} , γ_{y+} , γ_{y-} , γ_{z+} , γ_{z-} типы границ, ортогональные соответствующим координатным осям, на которых аппроксимация уравнений будет отличаться (рис. 2).

На границе с граничным условием 2-го рода (7) аппроксимация производных по пространственным координатам имеет вид

$$\begin{aligned} \gamma_{x+} : (k_1 h'_x)'_x &\cong \frac{1}{h_x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} (k_1 h'_x)'_x dx = \frac{1}{h_x} \left((k_1 h'_x)_{i+\frac{1}{2},j,k} - (k_1 h'_x)_{i-\frac{1}{2},j,k} \right) = \frac{1}{h_x} \left((k_1 h'_x)_{i+\frac{1}{2},j,k} - k_{1i,j,k} \varphi_{i,j,k} \right) = \\ &= k_{1i+\frac{1}{2},j,k} \frac{h_{i+1,j,k} - h_{i,j,k}}{h_x^2} - \frac{k_{1i,j,k}}{h_x} \varphi_{i,j,k}, \\ \gamma_{x-} : (k_1 h'_x)'_x &\cong \frac{1}{h_x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} (k_1 h'_x)'_x dx = \frac{1}{h_x} \left((k_1 h'_x)_{i+\frac{1}{2},j,k} - (k_1 h'_x)_{i-\frac{1}{2},j,k} \right) = \frac{1}{h_x} \left(k_{1i,j,k} \varphi_{i,j,k} - (k_1 h'_x)_{i-\frac{1}{2},j,k} \right) = \\ &= \frac{k_{1i,j,k}}{h_x} \varphi_{i,j,k} - k_{1i-\frac{1}{2},j,k} \frac{h_{i,j,k} - h_{i-1,j,k}}{h_x^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_{y+} : (k_2 h'_y)'_y &\equiv \frac{1}{h_y} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} (k_2 h'_y)'_y dy = \frac{1}{h_y} \left((k_2 h'_y)_{i,j+\frac{1}{2},k} - (k_2 h'_y)_{i,j-\frac{1}{2},k} \right) = \frac{1}{h_y} \left((k_2 h'_y)_{i,j+\frac{1}{2},k} - k_{2i,j,k} \varphi_{i,j,k} \right) = \\
 &= k_{2i,j+\frac{1}{2},k} \frac{h_{i,j+1,k} - h_{i,j,k}}{h_y^2} - \frac{k_{2i,j,k}}{h_y} \varphi_{i,j,k}, \\
 \gamma_{y-} : (k_2 h'_y)'_y &\equiv \frac{1}{h_y} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} (k_2 h'_y)'_y dy = \frac{1}{h_y} \left((k_2 h'_y)_{i,j+\frac{1}{2},k} - (k_2 h'_y)_{i,j-\frac{1}{2},k} \right) = \frac{1}{h_y} \left(k_{2i,j,k} \varphi_{i,j,k} - (k_2 h'_y)_{i,j-\frac{1}{2},k} \right) = \\
 &= \frac{k_{2i,j,k}}{h_y} \varphi_{i,j,k} - k_{2i,j-\frac{1}{2},k} \frac{h_{i,j,k} - h_{i,j-1,k}}{h_y^2}, \\
 \gamma_{z+} : (k_3 h'_z)'_z &\equiv \frac{1}{h_z} \int_{z_{k-\frac{1}{2}}}^{z_{k+\frac{1}{2}}} (k_3 h'_z)'_z dz = \frac{1}{h_z} \left((k_3 h'_z)_{i,j,k+\frac{1}{2}} - (k_3 h'_z)_{i,j,k-\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{h_z} \left((k_3 h'_z)_{i,j,k+\frac{1}{2}} - k_{3i,j,k} \varphi_{i,j,k} \right) = \\
 &= k_{3i,j,k+\frac{1}{2}} \frac{h_{i,j+1,k} - h_{i,j,k}}{h_z^2} - \frac{k_{3i,j,k}}{h_z} \varphi_{i,j,k}, \\
 \gamma_{z-} : (k_3 h'_z)'_z &\equiv \frac{1}{h_z} \int_{z_{k-\frac{1}{2}}}^{z_{k+\frac{1}{2}}} (k_3 h'_z)'_z dz = \frac{1}{h_z} \left((k_3 h'_z)_{i,j,k+\frac{1}{2}} - (k_3 h'_z)_{i,j,k-\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{h_z} \left(k_{3i,j,k} \varphi_{i,j,k} - (k_3 h'_z)_{i,j,k-\frac{1}{2}} \right) = \\
 &= \frac{k_{3i,j,k}}{h_z} \varphi_{i,j,k} - k_{3i,j,k-\frac{1}{2}} \frac{h_{i,j,k} - h_{i,j,k-1}}{h_z^2}.
 \end{aligned}$$

Выпишем полученное сеточное уравнение в центральных узлах:

$$\begin{aligned}
 h_{i,j,k}^{n+1} &\left(\frac{f_{i,j,k}^n}{h_t} + \frac{k_{1i+\frac{1}{2},j,k}}{h_x^2} + \frac{k_{1i-\frac{1}{2},j,k}}{h_x^2} + \frac{k_{2i,j+\frac{1}{2},k}}{h_y^2} + \frac{k_{2i,j-\frac{1}{2},k}}{h_y^2} + \frac{k_{3i,j,k+\frac{1}{2}}}{h_z^2} + \frac{k_{3i,j,k-\frac{1}{2}}}{h_z^2} \right) - \\
 &- \frac{k_{1i+\frac{1}{2},j,k}}{h_x^2} h_{i+1,j,k}^{n+1} - \frac{k_{1i-\frac{1}{2},j,k}}{h_x^2} h_{i-1,j,k}^{n+1} - \frac{k_{2i,j+\frac{1}{2},k}}{h_y^2} h_{i,j+1,k}^{n+1} - \\
 &- \frac{k_{2i,j-\frac{1}{2},k}}{h_y^2} h_{i,j-1,k}^{n+1} - \frac{k_{3i,j,k+\frac{1}{2}}}{h_z^2} h_{i,j,k+1}^{n+1} - \frac{k_{3i,j,k-\frac{1}{2}}}{h_z^2} h_{i,j,k-1}^{n+1} = \\
 &= \frac{f_{i,j,k}^n}{h_t} h_{i,j,k}^n.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Исследуем разностную схему на устойчивость.

Канонический вид сеточных уравнений в общем случае даётся формулой

$$A(p)y(p) - \sum_{q \in \mathcal{M}'(p)} B(p,q)y(q) = -F(p), \forall p \in \omega.$$

Сравнивая с (10), получаем:

$$B(p,q) = \frac{k(p) + k(q)}{2h_{x|y|z}^2},$$

$$F(p) = \frac{f^n(p)}{h_t} h^n(p),$$

$$A(p) = \frac{f^n(p)}{h_t} + \sum_{q \in \Pi'(p)} B(p, q).$$

Коэффициенты теплопроводности являются положительными функциями как и функция $f(x, y, z)$, поэтому

$$B(p, q) > 0,$$

$$A(p) > 0,$$

$$D(p) = A(p) - \sum_{q \in \Pi'(p)} B(p, q) = \frac{f^n(p)}{h_t} > 0,$$

значит, полученная разностная схема абсолютно устойчива.

Исследуем разностную схему на консервативность.

Проинтегрируем исходное дифференциальное уравнение по всей области:

$$\iiint_D (h'_t \cdot f) dV = \iiint_D \operatorname{div}(K \cdot \operatorname{grad}(h)) dV.$$

Применяя к правой части формулу Остроградского-Гаусса, получаем

$$\iiint_D (h'_t \cdot f) dV = \iint_{\partial D} K \cdot \operatorname{grad}(h) d\bar{w}$$

или согласно формуле (2)

$$\iiint_D (h'_t \cdot f) dV = - \iint_{\partial D} \bar{v} d\bar{w}$$

или

$$\iiint_D (h'_t \cdot f) dV = - \iint_{\partial D} \bar{v}_n d\bar{w}.$$

Таким образом, изменение количества вещества и энергии внутри области происходит только за счёт потока через стенки области.

Докажем, что аналогичный закон выполняется и для сеточного уравнения.

Для этого понадобится вспомогательное соотношение:

$$\begin{aligned} & k_{N_1+\frac{1}{2}} \frac{h_{N_1+1} - h_{N_1}}{h_x} + \sum_{i=N_1+1}^{N_2-1} \left(k_{i+\frac{1}{2}} \frac{h_{i+1} - h_i}{h_x^2} - k_{i-\frac{1}{2}} \frac{h_i - h_{i-1}}{h_x^2} \right) h_x - k_{N_2-\frac{1}{2}} \frac{h_{N_2} - h_{N_2-1}}{h_x} = \\ & = \sum_{i=N_1}^{N_2} \left(k_{i+\frac{1}{2}} \frac{h_{i+1} - h_i}{h_x^2} - k_{i-\frac{1}{2}} \frac{h_i - h_{i-1}}{h_x^2} \right) h_x + k_{N_1-\frac{1}{2}} \frac{h_{N_1} - h_{N_1-1}}{h_x} - k_{N_2+\frac{1}{2}} \frac{h_{N_2+1} - h_{N_2}}{h_x} = \\ & = \sum_{i=N_1}^{N_2} \left(k_{i+\frac{1}{2}} \frac{h_{i+1} - h_i}{h_x^2} \right) h_x - \sum_{i=N_1}^{N_2} \left(k_{i-\frac{1}{2}} \frac{h_i - h_{i-1}}{h_x^2} \right) h_x + k_{N_1-\frac{1}{2}} \frac{h_{N_1} - h_{N_1-1}}{h_x} - k_{N_2+\frac{1}{2}} \frac{h_{N_2+1} - h_{N_2}}{h_x} = \\ & = \sum_{i=N_1}^{N_2} \left(k_{i+\frac{1}{2}} \frac{h_{i+1} - h_i}{h_x^2} \right) h_x - \sum_{i=N_1-1}^{N_2-1} \left(k_{i+\frac{1}{2}} \frac{h_{i+1} - h_i}{h_x^2} \right) h_x + k_{N_1-\frac{1}{2}} \frac{h_{N_1} - h_{N_1-1}}{h_x} - k_{N_2+\frac{1}{2}} \frac{h_{N_2+1} - h_{N_2}}{h_x} = \\ & = k_{N_2+\frac{1}{2}} \frac{h_{N_2+1} - h_{N_2}}{h_x} - k_{N_1-\frac{1}{2}} \frac{h_{N_1} - h_{N_1-1}}{h_x} + k_{N_1-\frac{1}{2}} \frac{h_{N_1} - h_{N_1-1}}{h_x} - k_{N_2+\frac{1}{2}} \frac{h_{N_2+1} - h_{N_2}}{h_x} = 0. \end{aligned}$$

Обозначим

$$k \frac{\partial h}{\partial n} \Big|_{\gamma_{x+}} = \varphi_1, \quad k \frac{\partial h}{\partial n} \Big|_{\gamma_{x-}} = \varphi_2,$$

тогда

$$\begin{aligned} & k_{N_1+\frac{1}{2}} \frac{h_{N_1+1} - h_{N_1}}{h_x} - k_{N_1-\frac{1}{2}} \frac{h_{N_1} - h_{N_1-1}}{h_x^2} + \sum_{i=N_1+1}^{N_2-1} \left(k_{i+\frac{1}{2}} \frac{h_{i+1} - h_i}{h_x^2} - k_{i-\frac{1}{2}} \frac{h_i - h_{i-1}}{h_x^2} \right) h_x + \\ & + k_{N_2+\frac{1}{2}} \frac{h_{N_2+1} - h_{N_2}}{h_x^2} - k_{N_2-\frac{1}{2}} \frac{h_{N_2} - h_{N_2-1}}{h_x} = k_{N_1+\frac{1}{2}} \frac{h_{N_1+1} - h_{N_1}}{h_x} + \varphi_1 + \\ & + \sum_{i=N_1+1}^{N_2-1} \left(k_{i+\frac{1}{2}} \frac{h_{i+1} - h_i}{h_x^2} - k_{i-\frac{1}{2}} \frac{h_i - h_{i-1}}{h_x^2} \right) h_x + \varphi_2 - k_{N_2-\frac{1}{2}} \frac{h_{N_2} - h_{N_2-1}}{h_x} = \varphi_1 + \varphi_2. \end{aligned}$$

То есть для сеточного уравнения выполняются те же законы сохранения, что и для непрерывного, значит, полученная разностная схема консервативна.

Найдём порядок аппроксимации исходного дифференциального уравнения разностной схемой.

Хорошо известны оценки вида:

$$\begin{aligned} h'_t - \frac{h^{n+1} - h^n}{h_t} &= O(h_t), \\ (kh'_x)'_x - \left(k_{i+\frac{1}{2},j} \frac{h_{i+1,j} - h_{i,j}}{h_x^2} - k_{i-\frac{1}{2},j} \frac{h_{i,j} - h_{i-1,j}}{h_x^2} \right) &= O(h_x^2), \\ (kh'_y)'_y - \left(k_{i+\frac{1}{2},j} \frac{h_{i+1,j} - h_{i,j}}{h_x^2} - k_{i-\frac{1}{2},j} \frac{h_{i,j} - h_{i-1,j}}{h_x^2} \right) &= O(h_y^2), \\ (kh'_z)'_z - \left(k_{i+\frac{1}{2},j} \frac{h_{i+1,j} - h_{i,j}}{h_z^2} - k_{i-\frac{1}{2},j} \frac{h_{i,j} - h_{i-1,j}}{h_z^2} \right) &= O(h_z^2). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь нелинейный коэффициент в левой части уравнения.

$$f^{n+1} = f^n + O(h_t),$$

а так как

$$h'_t = \frac{h^{n+1} - h^n}{h_t} + O(h_t),$$

то

$$\begin{aligned} h'_t f^{n+1} &= \frac{h^{n+1} - h^n}{h_t} f^n + \frac{h^{n+1} - h^n}{h_t} O(h_t) + f^n O(h_t) + O(h_t^2), \\ h'_t f^{n+1} &= \frac{h^{n+1} - h^n}{h_t} f^n + O(h_t). \end{aligned}$$

Таким образом, порядок аппроксимации исходного дифференциального уравнения полученной разностной схемой составляет $O(h_t + h_x^2 + h_y^2 + h_z^2)$.

В результате аппроксимации систем линейных алгебраических уравнений была получена СЛАУ большой размерности. Матрица СЛАУ является симметричной, положительно определённой и имеет разреженную структуру, поэтому в качестве экономичного метода решения данной системы решено было использовать адаптивный попеременно-треугольный метод скорейшего спуска [4].

Решение исходной системы

$$Au = f$$

заменяется итерационным процессом

$$B_n \frac{y^{n+1} - y^n}{\tau_{n+1}} + Ay^n = f, \\ y^0 = u_0,$$

где в качестве матрицы переобуславливателя берётся следующая матрица:

$$B_n = (E + \omega_n A_1)(E + \omega_n A_2), \quad A = A_1 + A_2, \quad A_1 = A_2^*,$$

а

$$\omega_n = \frac{\|y^n\|}{\|A_2 y^n\|}, \quad \tau_{n+1} = 2\omega_n,$$

где A_1 и A_2 соответственно верхне- и нижнетреугольные матрицы, составленные из элементов матрицы A .

Результаты

По результатам работы были составлены параллельная и последовательная версии программы. Параллельная версия программы была реализована на кластере распределённых вычислений под управлением MPI.

Результаты моделирования представляют собой трёхмерные сеточные функции напора и скоростей движения флюида и требуют адекватной визуализации. Эффективным средством представления трёхмерных объектов является программно-аппаратный комплекс трёхмерной визуализации. Программное обеспечение Visual Instruments, установленное на комплексе представляет собой постпроцессор и предназначено для удобного представления трёхмерных сеточных функций и вывода изображений в объёмном виде. Программа Visual Instruments содержит функции построения срезов, изоповерхностей, линий тока, траекторий движения весомых частиц, графиков распределения величины на заданной поверхности и способна выводить все вышеперечисленные объекты в виде, воспринимаемом человеком как трёхмерный. Комплекс способен читать некоторые промышленные форматы данных, такие, как VIB и encase. В связи с этим были изучены структуры данных форматов и реализованы специальные процедуры преобразования внутреннего формата сеток модели в форматы VIB и encase.

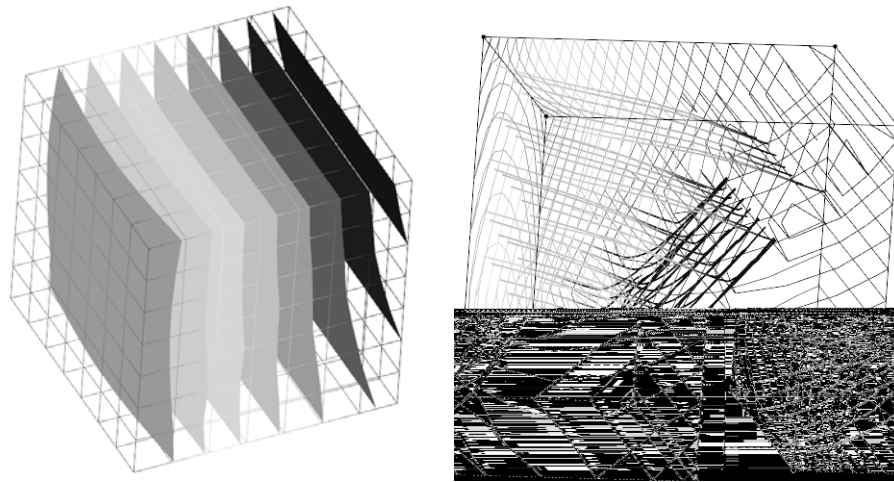


Рис. 3. Изоповерхности пьезометрической высоты (слева) и линии тока флюида и изолинии пьезометрической высоты на поверхности области (справа)

Расчет был проведён для модельной задачи. За отсутствием реальных данных о свойствах почв для грунта первого типа были взяты характеристики $k_1 = k_2 = k_3 = 1000 \frac{м}{мес}$, $m = 0,3$, $S(p) = 0,2$, для грунта второго типа $k_1 = k_2 = k_3 = 700 \frac{м}{мес}$, $m = 0,03$, $S(p) = 0,2$, т.е. грунт второго типа малопроницаем. Граница грунтов проходит по диагонали области. Для расчётной сетки были взяты шаги $h_x = h_y = h_z = 1$, $h_t = 0,1$, а количество узлов $n = m = k = 8$. Качественные результаты расчёта приведены на рис. 3.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Афонин А.А.* Задачи фильтрации жидкостей в пористых средах со свободной границей. – Ростов-на-Дону. 2008. – С. 6.
2. *Величко О.М., Горев В.В., Горев И.В., Дерюгин Ю.Н., Зеленский Д.К., Панов А.И., А.А. Савельев, Селин В.В., Субботин А.Г., Тихомиров Б.П., Чекалин А.Н.* Математическое моделирование. 2001. Т. 13. №2. Методика «Триада» численного решения трёхмерных задач переноса примесей подземными водами.
3. *Принцыпар Г.В., Сухинов А.И.* / Математическое моделирование задач двухфазной фильтрации на кластере распределённых вычислений. 2008. – С. 17.
4. *Коновалов А.Н.* // Сибирский математический журнал, май-июнь 2002. Т. 43, – №3. – С. 552-572. К теории попеременно-треугольного итерационного метода.

Шишня Александр Владимирович

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: primat-55-alex@yandex.ru.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 8(928)322-282, 8(908)176-18-37.

Кафедра высшей математики; студент.

Shishenya Alexander Vladimirovich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: primat-55-alex@yandex.ru.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: 8(928)322-282, 8(908)176-18-37.

The Department of Higher Mathematics; student.

Афонин Анатолий Андреевич

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: afonin_920@gmail.com.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 8(8634)371-606

Кафедра высшей математики; профессор.

Afonin Anatoliy Andreevich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: afonin_920@gmail.com.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: 8(8634)371-606

The Department of Higher Mathematics; professor.

Сухинов Александр Иванович

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: sukhinov@gmail.com.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 8(8634)310-599; 7(928)102-11-06.

Руководитель ТТИ ЮФУ; профессор.

Sukhinov Alexander Ivanovich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: sukhinov@gmail.com.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: 8(8634)310-599; 7(928)102-11-06.

Chief of TIT SFedU; professor.

УДК 534.29:551.594.25

А.А. Афонин, А.И. Сухинов

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ГЕОФИЛЬТРАЦИИ И ГЕОМИГРАЦИИ
В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ, ОБЛАДАЮЩИХ ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ**

В данной статье представлены двумерные линейные модели, вытекающие из обобщенного уравнения Буссинеска, описывающего геофильтрацию в почвах с фрактальной структурой. Кроме того представлены математические модели геомиграции загрязнений в грунтовых водах в классической постановке, а также в почвах, обладающих фрактальной структурой.

Геофильтрация; уравнение Буссинеска; фрактальные структуры; геомиграция, грунтовые воды; почвы.