В отличие от классических подходов, основанных на уравнениях Навье – Стокса, которые, как правило, требуют итерационных процедур.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *S. Chen and G. Doolen, Ann. Rev.* Fluid Mech. 8, 2527 (1998).
2. *S. Succi,* The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond (Clarendon Press, Oxford, 2001).
3. *Bhatnagar P.L., Gross E.P. and Krook M.,* A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component system, Phys. Rev., 94, 1954. – P. 511-525.
4. *D. Kandhai, A. Koponen, A. Hoekstra, M. Kataja, J. Timonen, and P.M.A. Sloot,* Implementation aspects of 3D lattice-BGK: boundaries, accuracy, and a new fast relaxation method, J. Comput. Phys., 150, 1999. – P. 482-501.
5. *D. d'Humières, I. Ginzburg, M. Krafczyk, P. Lallemand, and L.-S. Luo,* Multi-relaxation time lattice Boltzmann models in three dimensions, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 360, 2002. – P. 437-451.
6. *S. Chen, D. Martínez, and R. Mei,* On boundary conditions in lattice Boltzmann method, Phys. Fluids 8, 1996. – P. 2527-2536.
7. *Q. Zou and X. He,* On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model, Phys. Fluids 9, 1997. – P. 1591-1598.

Сидоренко Борис Владимирович

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: sidorenkobv@mail.ru.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 8(8634)371-606.

Кафедра высшей математики; аспирант и ассистент.

Sidorenko Boris Vladimirovich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education "Southern Federal University".

E-mail: sidorenkobv@mail.ru.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: 8(8634)371-606.

The Department of Higher Mathematics; post-graduate student and assistant.

УДК 518.5.001.57

Т.В. Камышникова

ВЫВОД ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ПРИМЕСЕЙ В МЕЛКОВОДНОМ ВОДОЕМЕ

Изучение гидрохимических характеристик вод мелководного водоема является весьма актуальным, так как их изменчивость, как правило, является отражением возможных отклонений в функционировании водоема. И здесь математическое моделирование может оказать неоценимую помощь.

Модель «мелкой воды»; адвективно-диффузионное уравнение.

T.V. Kamyshnikova

RECEPTION OF TWO-DIMENSIONAL MODEL POLLUTING IMPURITY DISTRIBUTION IN SHALLOW WATER BASIN

Water basin hydro chemical characteristics' studying is actual problem because of variability as possible deviations' reflection in water basin functioning. The best method of this problem solving is mathematical modeling.

"Shallow water" model; the advection-diffusion equation.

Если на практике нет необходимости решать полные трехмерные уравнения, то, как правило, размерность задачи снижают применяя осреднение по глубине и пользуясь определенными предположениями, упрощающими решение гидродинамических уравнений и уравнений переноса и диффузии. Усреднение в двумерных моделях по вертикальной координате, предшествующее дифференцированию по пространственным переменным без соответствующего учета изменения полной глубины, либо с достижением требуемых свойств «простейшими», зачастую искусственными приемами, приводит к появлению дополнительных источников импульса или энергии, и как следствие, нарушению соответствующих законов сохранения.

Модель распространения загрязняющих примесей в мелководном водоеме включает в себя гидродинамическую задачу мелкой воды и задачу переноса примеси. Уравнения мелкой воды составляют самостоятельную задачу расчета гидродинамики мелкого водоема, которая была рассмотрена вне рамок данной работы, и результаты которой используются в данной работе при решении задачи распространения примеси в мелководном водоеме [3], [6]. Рассмотрим пространственно-трехмерную систему уравнений распространения загрязнений:

$$u'_x + v'_y + w'_z = 0, \tag{1}$$

$$u'_t + (u^2)'_x + (uv)'_y + (uw)'_z =$$
$$= -\frac{1}{\rho} p'_x - \varphi'_x + \frac{\eta}{\rho}\left(u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}\right) + 2\Omega\left(v \sin\vartheta - w \sin\vartheta\right), \tag{2}$$

$$v'_t + (uv)'_x + (v^2)'_y + (vw)'_z =$$
$$= -\frac{1}{\rho} p'_y - \varphi'_y + \frac{\eta}{\rho}\left(v''_{xx} + v''_{yy} + v''_{zz}\right) - 2\Omega u \sin\vartheta, \tag{3}$$

$$w'_t + (uw)'_x + (vw)'_y + (w^2)'_z =$$
$$= -\frac{1}{\rho} p'_z - \varphi'_z + \frac{\eta}{\rho}\left(w''_{xx} + w''_{yy} + w''_{zz}\right) + 2\Omega u \cos\vartheta. \tag{4}$$

Уравнение (1) − уравнение неразрывности, уравнения (2-4) – уравнения Навье-Стокса для вязкой (в линейном приближении) несжимаемой (плотность $\rho = const$) жидкости во вращающейся с угловой скоростью

$$\vec{\Omega} = \Omega\left(\cos\vartheta \cdot \vec{j} + \sin\vartheta \cdot \vec{k}\right),$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ − единичные орты, ρ − полное гидростатическое давление; φ − гравитационный потенциал; η − первый коэффициент вязкости в одном поле тяжести.

$$\nabla\varphi = -\vec{g} = -g\vec{k} = const; \quad \rho_0 = \rho_0(x,y,z,t); \quad \rho = \rho_0 + \rho g(\varsigma - z);$$

$$\nabla p = g\left(\varsigma_x'\vec{i} + \varsigma_y'\vec{j} - \vec{k}\right), \quad -h \le z \le \varsigma,$$

где $\varsigma(x,y,t)$ – поднятие уровня свободной поверхности жидкости по отношению к невозмущенному состоянию; $h(x,y,t)$ – высота столба жидкости под невозмущенной поверхностью.

Граничные условия:

$$\eta\frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x, \quad \eta\frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y \text{ на } z(x,y,t), \tag{5}$$

где τ_x, τ_y – составляющие касательного трения ветра. На дне и боковых границах условия прилипания:

$$u = v = w = 0. \tag{6}$$

Начальные условия:

$$u(x,y,z,0) = u_0, \quad v(x,y,z,0) = v_0,$$

$$w(x,y,z,0) = w_0, \quad \rho(x,y,z,0) = \rho_0, \tag{7}$$

Интегрированием уравнений неразрывности и Навье – Стокса (1-4) по вертикальной координате z от $-h$ до ς получены уравнения гидродинамической модели, учитывающей испарение жидкости и выпадение осадков ((w/ρ) – испаряющейся – выпадающий в виде осадков в единицу времени слой) [4]:

$$H_x' + U_x + V_y + \frac{w}{\rho} = 0, \tag{8}$$

$$U_t' + \left(\frac{UU}{H}\right)_x' + \left(\frac{VU}{H}\right)_y' + C\frac{wU}{\rho H} + gH\varsigma_x' =$$

$$= \frac{\eta}{\rho}\left(U_{xx}'' + U_{yy}''\right) - k\frac{U}{H} + H(f_s)_x + 2\Omega V\sin\vartheta, \tag{9}$$

$$V_t' + \left(\frac{UV}{H}\right)_x' + \left(\frac{VV}{H}\right)_y' + C\frac{wV}{\rho H} + gH\varsigma_y' =$$

$$= \frac{\eta}{\rho}\left(V_{xx}'' + V_{yy}''\right) - k\frac{V}{H} + H(f_s)_y + 2\Omega V\sin\vartheta, \tag{10}$$

где слагаемые, имеющие вид и размерность граничных вязких напряжений на поверхности жидкости отнесены на счет обобщенной силы ветра о поверхность f_s, а на дне – на счет обобщенной силы трения о дно $-\frac{k}{H^2}\left(U_i + V_j\right)$, $U = \int_{-h}^{\varsigma} u\,dz$, $V = \int_{-h}^{\varsigma} v\,dz$, $u = u(x,y,z,t)$ и $v = v(x,y,z,t)$ – горизонтальные компоненты вектора скорости жидкости в точке (x,y,z) в момент времени t. $H = h + \varsigma$ – полная глубина. Для описания поля некоторой субстанции обычно используется трехмерное адвективно-диффузионное уравнение [4].

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \bar{v}\nabla S - \sigma S = \mu \nabla^2 S + \frac{\partial}{\partial z}\left(v \frac{\partial S}{\partial z} \right) + f, \tag{11}$$

где S – концентрация субстанции; $\bar{v} = (u, v, w)$ – вектор скорости водного потока; μ, v – коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной диффузии; σS – характеризует взаимодействие вещества с водой; $f = f(x, y, z, t)$ – функция источников (стоков) веществ. Примесь предполагается пассивной, т.е. задаваемое поле скорости (u, v, w) не зависит от S. Рассмотрим краевую задачу для уравнения (11) в области $Q = \left\{ \bar{\Omega}(x, y, z), -h \le z \le \varsigma, t > 0 \right\}$, где боковая поверхность Ω является объединением двух частей: $\bar{\Omega} = \Omega_1 \bigcup \Omega$; $\Omega_1(x, y, z)$ – поверхность дна, $\Omega(x, y, z)$ – боковая цилиндрическая поверхность.

Запишем граничные условия по вертикали

$$v\frac{\partial S}{\partial n} = 0, \quad z = \varsigma(x, y, t), \tag{12}$$

$$v\frac{\partial S}{\partial n} = 0, \quad z = -h(x, y, t), \tag{13}$$

где n – внешняя нормаль. На боковой поверхности:

$$\mu \frac{\partial S}{\partial n} = 0. \tag{14}$$

Начальное состояние характеризуется фоном

$$S\Big|_{t=0} = S_0. \tag{15}$$

Остановимся на двумерном случае. В области $\Omega_2 = \left\{ x, y \in \Omega, t \ge 0 \right\}$ поле концентрации примеси описывается уравнением [4]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle S \right\rangle + \frac{\partial}{\partial x}\left\langle uS \right\rangle + \frac{\partial}{\partial y}\left\langle vS \right\rangle + \sigma \left\langle S \right\rangle = \mu \nabla^2 \left\langle S \right\rangle + \left\langle f \right\rangle, \tag{16}$$

$\left\langle S \right\rangle = \int\limits_{-h}^{\varsigma} S(x, y, z, t) dz = \bar{S}H$, $\left\langle f \right\rangle = \int\limits_{-h}^{\varsigma} f(x, y, z, t) dz$, которое получается интегрированием по вертикали трехмерного уравнения (11) по вертикальной координате z от $-h$ до ς с условием $\left. \frac{\partial S}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0.$

Недивергентная форма этого уравнения:

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial \bar{S}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{S}}{\partial y}-\sigma \bar{S}=\mu H^{-1}\nabla^{2}(\bar{S}H)+f, \tag{17}$$

где $H=h+\varsigma$. Иногда его используют в виде

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial \bar{S}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{S}}{\partial y}-\sigma \bar{S}=\mu H^{-1}\nabla^{2}(\bar{S}H)+f, \tag{18}$$

где $S=\bar{S},\quad v=(u,v)=\bar{V}$. Действительно, интегрируя слагаемые уравнения (11) по вертикали почленно будем иметь:

$$\int_{-h}^{\varsigma}\frac{\partial S}{\partial t}dz=\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{-h}^{\varsigma}Sdz\right)-\frac{\partial \xi}{\partial t}(S)\bigg|_{z=\varsigma}-\frac{\partial h}{\partial t}(S)\bigg|_{z=-h},$$

$$\int_{-h}^{\varsigma}\frac{\partial Su}{\partial x}dz=\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{-h}^{\varsigma}uSdz\right)-\frac{\partial \xi}{\partial x}(uS)\bigg|_{z=\varsigma}-\frac{\partial h}{\partial x}(uS)\bigg|_{z=-h},$$

$$\int_{-h}^{\varsigma}\frac{\partial Sv}{\partial y}dz=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{-h}^{\varsigma}vSdz\right)-\frac{\partial \xi}{\partial y}(vS)\bigg|_{z=\varsigma}-\frac{\partial h}{\partial y}(vS)\bigg|_{z=-h},$$

$$\int_{-h}^{\varsigma}\frac{\partial Sw}{\partial y}dz=\frac{\partial}{\partial z}\left(\int_{-h}^{\varsigma}vwdz\right)=-(wS)\big|_{z=\varsigma}-(wS)\big|_{z=-h},$$

$$\int_{-h}^{\varsigma}\frac{\partial^{2} S}{\partial x^{2}}dz=\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{-h}^{\varsigma}\frac{\partial S}{\partial x}dz\right)-\frac{\partial \xi}{\partial x}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)\bigg|_{z=\varsigma}-\frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)\bigg|_{z=-h},$$

$$\int_{-h}^{\varsigma}\frac{\partial^{2} S}{\partial y^{2}}dz=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{-h}^{\varsigma}\frac{\partial S}{\partial y}dz\right)-\frac{\partial \xi}{\partial y}\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)\bigg|_{z=\varsigma}-\frac{\partial h}{\partial y}\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)\bigg|_{z=-h},$$

$$\int_{-h}^{\varsigma}\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial S}{\partial z}\right)dz=\frac{\partial}{\partial z}\left(\int_{-h}^{\varsigma}v\frac{\partial S}{\partial z}dz\right)=v\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)\bigg|_{z=\varsigma}-v\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)\bigg|_{z=-h},$$

$$\int_{-h}^{\varsigma}\sigma Sdz=\sigma\int_{-h}^{\varsigma}Sdz;\quad \int_{-h}^{\varsigma}fdz=f.$$

С учетом граничных условий для компонентов скоростей задачи (1-4) и задачи (11-14) получим двумерное уравнение (18). Решение уравнения (18) для однородной несжимаемой жидкости ищется в области Ω с границей $\partial\Omega$ на участке $\partial\Omega_1$ – которой жидкость втекает, $\partial\Omega_2$ – вытекает, $\partial\Omega_0$ – непроницаемая часть границы [5], [6]. Имеют место граничные условия: на твердой границе $\partial\Omega_0$ ставится условие непротекания:

$$\frac{\partial S}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega_0}=0, \tag{19}$$

где n − нормаль к границе $\partial\Omega_0$. На участке $\partial\Omega_1$ стока в водоем задается значение

$$S\big|_{\partial\Omega_1} = S_1, \tag{20}$$

На участке выпуска воды, или на открытой границе $\partial\Omega_2$ ставится условие III рода:

$$\left.\frac{\partial S}{\partial n} + gS\right|_{\partial\Omega_2} = 0, \quad g = \begin{cases} v_n, v_n \geq 0 \\ 0, v_n \leq 0 \end{cases}, \tag{21}$$

где v_n − скорость течения по нормали $\overline{n}$ к $\partial\Omega_2$. Решение ищется при начальных данных:

$$S\big|_{t=0} = S_0(x, y). \tag{22}$$

Входящие в уравнение (18) и в граничные условия (19-21) компоненты вектора скорости и форму свободной границы можно считать известными функциями [6].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гидрометеорология и гидрохимия морей СССР. – СПб.: Гидрометеоиздат, 1991. – Т.5. – 236 с.
2. *Вольцингер Н.Е., Клеванный К.А., Пеликовский Е.Н.* Длиноволновая динамика прибрежной зоны. – Л.: Гидрометеоиздат, 1989. – 271 с.
3. *Васильев В.С., Сухинов А.И.* О моделировании ветровых течений в Таганрогском заливе с использованием квазиоптимальных сеток // Областная научно-техническая конференция, посвященная дню радио. – Ростов-на-Дону, 1993. – 26 с.
4. *Васильев В.С., Целых А.Н.* Принятие прогнозных решений в экологических задачах на основе методов численного моделирования. – Ростов-на-Дону: Изд-во Северо-Кавказского научного центра высшей школы, 1999. – 48 с.
5. *Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Самарская Е.А., Тишкин В.Ф.* Методы математического моделирования окружающей среды. – М.: Наука, 2000. – 391 с.
6. *Камышникова Т.В.* Математическое моделирование движения воздушной среды и загрязняющих примесей от автотранспорта в условиях городской застройки: дис. на соискание ученой степени канд тех наук. – Таганрог, 2003. – С. 182-191.

Камышникова Татьяна Владимировна
Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.
E-mail: kamyshtata@mail.ru.
347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
Тел.: 8(8634)371-606.
Кафедра высшей математики.

Kamishnikova Tatiana Vladimirovna
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.
E-mail: kamyshtata@mail.ru.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: 8(8634)371-606.
The Department of Higher Mathematics.