

рис.3 представлена трехмерная модель распространения поверхностной волны по заливу, где наблюдается расползание цуга волны в результате дисперсии.

Следовательно, можно подчеркнуть, что рассмотренный нами метод позволяет проследить динамику нелинейных поверхностных гравитационных волн с дисперсией в условиях мелководья.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Peregrine D.H.* Long waves on a beach // *J. Fluid Mech.* – 1967. V.27. – № 4. – P. 815-827.
2. *Диденкулова И.И., Заибо Н., Куркин А.А., Пелиновский Е.Н.* Крутизна и спектр нелинейно деформируемой волны на мелководье // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* – 2006. Т.42. – № 6. – С. 839-842.
3. *Шерменева М.А., Шуган И.В.* Расчет наката волн на пологий откос // *Письма в ЖТФ.* – 2006. Т.32. – Вып. 2. – С. 33-38.
4. *Кузнецов С.Ю., Сапрыкина Я.В.* Экспериментальные исследования эволюции групп волн в береговой зоне моря // *Океанология.* – 2002. Т.42. – № 3. – С. 356-363.
5. *Аббасов И.Б.* Исследование и моделирование нелинейных поверхностных волн на мелководье // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана.* – 2003. Т.39. – №4. – С. 568-573.
6. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977. – 622 с.
7. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. – М.: Наука, 1979. – 383 с.

#### **Аббасов Ифтихар Балакишневич**

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: igkd@egf.tsure.ru

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 8(8634)371-794.

Кафедра инженерной графики и компьютерного дизайна; доцент

#### **Bogdanov Sergey Aleksandrovich**

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: igkd@egf.tsure.ru

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: 8(8634)371-663.

The Department of Engineering Drawing and Computer Design; associate professor.

УДК 518.5.001.57

**Т.А. Чистякова**

### **ДИСКРЕТНАЯ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ, ОПИСЫВАЕМАЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЕМ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА**

*Работа посвящена разработке дискретной математической модели распространения волновых пучков. Для разработки численной модели рассматриваемых волновых явлений отдано предпочтение методу расщепления по физическим процессам.*

*Волновые пучки; интегроинтерполяционный метод; преобразование Фурье; аппроксимация.*

**T.A. Chistyakova**

**DISCRETE FINITE-DIFFERENCE MODEL OF PROPAGATION OF WAVE BEAMS DESCRIBED BY QUASILINEAR EQUATION OF PARABOLIC TYPE**

*This work is dedicated to building of mathematical model of propagation of wave beams. We gave preference to method of decomposition on physical processes for building of numerical model of considered wave effects.*

*Wave beams, integro-interpolation method, Fourier transformation, approximation.*

Процесс распространения звуковых волн в неоднородных средах при наличии других процессов и гидрофизических полей сопровождается такими явлениями, как рассеяние волн на случайных и регулярных неоднородностях среды и других гидрофизических полях, генерация шумового акустического поля, нелинейное искажение формы звуковой волны при достаточно большой интенсивности звука, поглощение и рассеяние звука турбулентностью и другие. Эти явления возникают в результате нелинейности основных законов сохранения в гидродинамике или, другими словами, в результате взаимодействий основных типов всевозможных движений сплошной среды или нормальных гидродинамических мод, отчетливо различающихся по своему характеру и своей природе. Этими типами движений (или колебаний) являются: вихревая компонента, энтропийная компонента и потенциальная (в том числе и акустическая), связанная с пульсациями потенциальной части поля скорости и пульсациями давления.

Большинство приложений упругих волн связано с созданием волнового поля в виде пучков. Практически во всех приборах и устройствах с применением упругих волн (дефектоскопия, медицинская диагностика, звуколокация) поле создается в виде ограниченных в пространстве волновых пучков.

Для разработки численной модели рассматриваемых волновых явлений отдается предпочтение методу расщепления по физическим процессам, так как двухслойная конечно-разностная схема, полученная путем замены частных производных их дискретными аналогами, не является устойчивой, а метод гармоник требует больших вычислительных затрат.

Запишем исходное уравнение Хохлова – Заболоцкой – Кузнецова:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - v \frac{\partial v}{\partial \theta} - \Gamma \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) = \frac{N}{4} \Delta_{\perp} v, \quad (1)$$

где  $v = v(z, \theta, r)$  – величина скорости частиц среды,  $\Gamma$  – диссипативный параметр,  $\theta$  – фаза волны,  $z$  – расстояние,  $N$  – параметр уравнения, характеризующий соотношение нелинейности и дисперсии,  $\Delta_{\perp}$  – поперечный лапласиан

$$\left( \Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

Задача (1) задана при следующем начальном условии:

$$v(0, \theta, r) = V(\theta, r) \quad (2)$$

и граничных условиях:

◆ условие периодичности сигнала:

$$v(z, 0, r) = v(z, 2\pi, r), \quad (3)$$

$$v'_\theta(z, 0, r) = v'_\theta(z, 2\pi, r), \quad (4)$$

- ◆ условие симметричности:

$$v'_r(z, \theta, 0) = 0, \quad (5)$$

- ◆ условие отсутствия энергии в бесконечно удаленной точке:

$$v(z, \theta, \infty) = 0. \quad (6)$$

Расчетная область по пространственным направлениям  $x, y, z$  представляет собой цилиндр. Для построения решения разностной схемы будем использовать равномерную сетку:

$$w_h = \{z_i = nh_z, \theta_j = j\tau, r_k = kh_r; n = \overline{1..N_z}, j = \overline{0..M}, k = \overline{0..P}; N_z h_z = l, M\tau = 2\pi, Ph_r = R\},$$

где  $n, j, k$  – индексы по направлениям  $z, \theta, r$  соответственно;

$h_z, \tau, h_r$  – шаги по направлениям  $z, \theta, r$  соответственно;

$N_z, M, P$  – количество узлов сетки по направлениям  $z, \theta, r$  соответственно;

$l, R$  – высота и радиус цилиндра соответственно.

В уравнении (1) аппроксимируем частную производную по пространственной координате  $z$ , в результате чего получим:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{v^{n+1} - v^n}{h_z} - v^n \frac{\partial v^{n+\tilde{\mu}}}{\partial \theta} - \Gamma \frac{\partial^2 v^{n+\tilde{\mu}}}{\partial \theta^2} \right) = \frac{N}{4} \Delta_\perp v^{n+\tilde{\lambda}},$$

где  $v^{n+1} = v^{n+1}(\theta, r)$  – величина скорости частиц среды на текущем пространственном слое по  $z$ ,  $v^n = v^n(\theta, r)$  – на предыдущем пространственном слое,  $v^{n+\tilde{\mu}}, v^{n+\tilde{\lambda}}$  – значения поля  $v$  на некотором пространственном слое.

Для поля скорости частиц введем промежуточный пространственный слой  $v^{n+\sigma}$ ,  $\sigma \in (0; 1)$ :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{v^{n+1} - v^{n+\sigma} + v^{n+\sigma} - v^n}{h_z} - v^n \frac{\partial v^{n+\tilde{\mu}}}{\partial \theta} - \Gamma \frac{\partial^2 v^{n+\tilde{\mu}}}{\partial \theta^2} \right) = \frac{N}{4} \Delta_\perp v^{n+\tilde{\lambda}} \text{ или}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{v^{n+\sigma} - v^n}{h_z} - v^n \frac{\partial v^{n+\tilde{\mu}}}{\partial \theta} - \Gamma \frac{\partial^2 v^{n+\tilde{\mu}}}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{v^{n+1} - v^{n+\sigma}}{h_z} \right) = \frac{N}{4} \Delta_\perp v^{n+\tilde{\lambda}}.$$

Введем обозначения:

$$u^n \equiv v^n, u^{n+1} \equiv w^n \equiv v^{n+\sigma}, w^{n+1} \equiv v^{n+1}, v^{n+\tilde{\mu}} \equiv u^{n+\mu}, v^{n+\tilde{\lambda}} \equiv w^{n+\lambda}.$$

С учетом введенных обозначений последнее уравнение примет вид

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{u^{n+1} - u^n}{h_z} - u^n \frac{\partial u^{n+\mu}}{\partial \theta} - \Gamma \frac{\partial^2 u^{n+\mu}}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{w^{n+1} - w^n}{h_z} \right) = \frac{N}{4} \Delta_{\perp} w^{n+\lambda}.$$

Разобьем полученное выражение на две части:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{u^{n+1} - u^n}{h_z} - u^n \frac{\partial u^{n+\mu}}{\partial \theta} - \Gamma \frac{\partial^2 u^{n+\mu}}{\partial \theta^2} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{w^{n+1} - w^n}{h_z} \right) = \frac{N}{4} \Delta_{\perp} w^{n+\lambda},$$

при этом  $\mu, \lambda$  заданы следующим образом:

$$\begin{aligned} u^{n+\mu} &= \mu u^{n+1} + (1-\mu) u^n, \\ w^{n+\lambda} &= \lambda w^{n+1} + (1-\lambda) w^n, \quad \mu \in [0;1], \quad \lambda \in [0;1]. \end{aligned}$$

С учетом отсутствия источников поля скорости частиц, задача (1) может быть записана в виде следующей системы уравнений:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{h_z} - u^n \frac{\partial u^{n+\mu}}{\partial \theta} - \Gamma \frac{\partial^2 u^{n+\mu}}{\partial \theta^2} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{w^{n+1} - w^n}{h_z} \right) = \frac{N}{4} \Delta_{\perp} w^{n+\lambda}.$$

Данную задачу будем решать в два этапа. На первом шаге производится учет нелинейных и диссипативных процессов. Данный процесс представлен уравнением Бюргера:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{h_z} - u^n \frac{\partial u^{n+\mu}}{\partial \theta} - \Gamma \frac{\partial^2 u^{n+\mu}}{\partial \theta^2} = 0. \quad (7)$$

Уравнение представлено при следующих граничных условиях (предполагается периодичность волнового процесса):

$$u(z, 0, r) = u(z, 2\pi, r), \quad (8)$$

$$u'_{\theta}(z, 0, r) = u'_{\theta}(z, 2\pi, r). \quad (9)$$

На втором шаге считаем величину скорости волны с учетом дисперсии, т.е. диффузии энергии в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{w^{n+1} - w^n}{h_z} \right) = \frac{N}{4} \Delta_{\perp} w^{n+\lambda}, \quad (10)$$

где  $h_z$  – шаг по пространству вдоль оси  $z$ ,  $w^n$  – величина скорости частиц среды в поле волны на промежуточном временном слое,  $w^{n+1}$  – величина скорости волны на следующем временном слое.

Уравнение (10) задано при следующих граничных условиях:

$$w'_r(z, \theta, 0) = 0, \quad (11)$$

$$w(z, \theta, \infty) = 0 \quad (12)$$

Условие (11) отражает симметрию поля относительно оси  $z$ , а условие (12) – отсутствие источников поля в бесконечно удаленных от оси  $z$  точках пространства.

В уравнениях (7) с учетом граничных условий (8-9) заменяем непрерывные операторы на их конечноразностные аналоги, полученные при помощи интегро-интерполяционного метода.

Данная непрерывная задача не зависит от пространственной координаты  $r$  и для получения дискретной задачи все рассуждения будут проходить при  $r = const$ , для сокращения формы записи опустим индекс по данной переменной (второй нижний индекс).

Запишем конечно-разностный аналог оператора  $uu'_\theta$ , описывающего нелинейность процесса, для этого найдем среднее значение функции  $uu'_\theta$  на отрезке

$$\theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_{j+1}; \quad j = \overline{1, M-1}:$$

$$\begin{aligned} uu'_\theta &\approx \frac{1}{2\tau} \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_{j+1}} uu'_\theta d\theta = \frac{1}{2\tau} \left( \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} uu'_\theta d\theta + \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} uu'_\theta d\theta \right) \approx \frac{1}{2\tau} \left( u_{j+1/2} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} u'_\theta d\theta + u_{j-1/2} \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} u'_\theta d\theta \right) = \\ &= u_{j+1/2} \frac{u_{j+1} - u_j}{2\tau} + u_{j-1/2} \frac{u_j - u_{j-1}}{2\tau}, \end{aligned}$$

$$\text{где } u_{j+1/2} \equiv \frac{u_{j+1} + u_j}{2}, \quad u_{j-1/2} \equiv \frac{u_j + u_{j-1}}{2}.$$

Таким образом, получим конечно-разностный аналог оператора  $u^n (u'_\theta)^{n+\mu}$ :

$$u^n (u'_\theta)^{n+\mu} = u_{j+1/2, k}^n \frac{u_{j+1, k}^{n+\mu} - u_{j, k}^{n+\mu}}{2\tau} + u_{j-1/2, k}^n \frac{u_{j, k}^{n+\mu} - u_{j-1, k}^{n+\mu}}{2\tau}.$$

Запишем конечно-разностный аналог оператора  $u''_{\theta\theta}$ , описывающего диссипативные процессы, для этого найдем среднее значение функции  $u''_{\theta\theta}$  на отрезке

$$\theta_{j-1/2} \leq \theta \leq \theta_{j+1/2}; \quad j = \overline{1, M-1}:$$

$$u''_{\theta\theta} \approx \frac{1}{\tau} \int_{\theta_{j-1/2}}^{\theta_{j+1/2}} u''_{\theta\theta} d\theta = \frac{1}{\tau} u'_\theta \Big|_{\theta_{j-1/2}}^{\theta_{j+1/2}} = \frac{1}{\tau} \left( (u'_\theta)_{j+1/2} - (u'_\theta)_{j-1/2} \right).$$

Обозначим оператор первой производной по временной переменной  $\theta$ :

$$Z = \frac{\partial}{\partial \theta} u.$$

Проинтегрируем обе части данного выражения на отрезке  $\theta_j \leq \theta \leq \theta_{j+1}$ ;  $j = \overline{0, M-1}$ :

$$\int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} Z d\theta = \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{\partial}{\partial \theta} u d\theta = z|_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} = u(\theta_{j+1}) - u(\theta_j) \approx u_{j+1} - u_j.$$

Аппроксимация для оператора первой производной в узле  $j + 1/2$  имеет вид

$$(u'_\theta)_{j+1/2} = Z_{j+1/2} \approx \frac{1}{\tau} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} Z d\theta \approx \frac{u_{j+1} - u_j}{\tau}.$$

Таким образом, получим конечно-разностный аналог оператора второй производной:

$$(u''_{\theta\theta})^{n+\mu} \approx \frac{1}{\tau} \left( \frac{u_{j+1,k}^{n+\mu} - u_{j,k}^{n+\mu}}{\tau} - \frac{u_{j,k}^{n+\mu} - u_{j-1,k}^{n+\mu}}{\tau} \right) = \frac{u_{j+1,k}^{n+\mu} - 2u_{j,k}^{n+\mu} + u_{j-1,k}^{n+\mu}}{\tau^2},$$

$$\text{где } u_{j,k}^{n+\mu} = \frac{1}{\tau} \int_{\theta_{j-1/2}}^{\theta_{j+1/2}} u^{n+\mu}(\theta, r_k) d\theta.$$

С учетом данных аппроксимаций, граничных условий (8–9) и начального условия (2) задача (7–9) запишется в следующем виде:

$$\frac{u_{0,k}^{n+1} - u_{0,k}^n}{h_z} - \left( u_{1/2,k}^n \frac{u_{1,k}^{n+\mu} - u_{0,k}^{n+\mu}}{2\tau} + u_{M-1/2,k}^n \frac{u_{0,k}^{n+\mu} - u_{M-1,k}^{n+\mu}}{2\tau} \right) - \Gamma \frac{u_{1,k}^{n+\mu} - 2u_{0,k}^{n+\mu} + u_{M-1,k}^{n+\mu}}{\tau^2} = 0,$$

$$j = 0;$$

$$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{h_z} - \left( u_{j+1/2,k}^n \frac{u_{j+1,k}^{n+\mu} - u_{j,k}^{n+\mu}}{2\tau} + u_{j-1/2,k}^n \frac{u_{j,k}^{n+\mu} - u_{j-1,k}^{n+\mu}}{2\tau} \right) - \Gamma \frac{u_{j+1,k}^{n+\mu} - 2u_{j,k}^{n+\mu} + u_{j-1,k}^{n+\mu}}{\tau^2} = 0,$$

$$1 \leq j \leq M - 2; (13)$$

$$\frac{u_{M-1,k}^{n+1} - u_{M-1,k}^n}{h_z} - \left( u_{M-1/2,k}^n \frac{u_{0,k}^{n+\mu} - u_{M-1,k}^{n+\mu}}{2\tau} + u_{M-3/2,k}^n \frac{u_{M-1,k}^{n+\mu} - u_{M-2,k}^{n+\mu}}{2\tau} \right) - \Gamma \frac{u_{0,k}^{n+\mu} - 2u_{M-1,k}^{n+\mu} + u_{M-2,k}^{n+\mu}}{\tau^2} = 0,$$

$$j = M - 1;$$

$$u_{j,k}^0 = V_{j,k}.$$

Данная задача решается относительно каждого пространственного слоя по координате  $r$  при  $k = \overline{0..P}$ . Приведем конечно-разностную задачу (13) к сеточному уравнению. Каноническая форма сеточного уравнения имеет вид

$$Lu(p) = A(p)u(p) - \sum_{Q \in \mathcal{N}'(P)} B(p, q)u(q) = F(p), \quad (14)$$

где  $L$  – некоторый сеточный оператор,  $p \equiv (z_t, \theta_j, r_k)$  – центр шаблона,  $q_1 \equiv (z_t, \theta_{j+1}, r_k)$ ,  $q_2 \equiv (z_t, \theta_{j-1}, r_k)$ ,  $q_3 \equiv (z_{t-1}, \theta_j, r_k)$ ,  $q_4 \equiv (z_{t-1}, \theta_{j+1}, r_k)$ ,  $q_5 \equiv (z_{t-1}, \theta_{j-1}, r_k)$

$\mathcal{N}'(p) = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$  – окрестность центра шаблона,  $q \in \mathcal{N}'(p)$ .

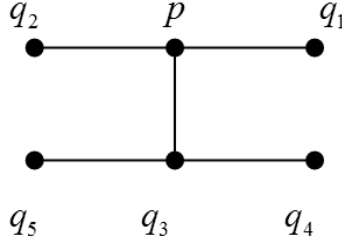


Рис.1. Шаблон конечно-разностной схемы для задачи (14)

Рассмотрим исходное уравнение (13):

$$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{h_z} - \left( u_{j+1/2,k}^n \frac{u_{j+1,k}^{n+\mu} - u_{j,k}^{n+\mu}}{2\tau} + u_{j-1/2,k}^n \frac{u_{j,k}^{n+\mu} - u_{j-1,k}^{n+\mu}}{2\tau} \right) - \Gamma \frac{u_{j+1,k}^{n+\mu} - 2u_{j,k}^{n+\mu} + u_{j-1,k}^{n+\mu}}{\tau^2} = 0. \quad (15)$$

Упростим данное выражение, в результате чего получим:

$$\frac{u_{j,k}^{n+1}}{h_z} - \frac{u_{j,k}^n}{h_z} - u_{j+1/2,k}^n \frac{u_{j+1,k}^{n+\mu}}{2\tau} + u_{j+1/2,k}^n \frac{u_{j,k}^{n+\mu}}{2\tau} - u_{j-1/2,k}^n \frac{u_{j,k}^{n+\mu}}{2\tau} + u_{j-1/2,k}^n \frac{u_{j-1,k}^{n+\mu}}{2\tau} - \Gamma \frac{u_{j+1,k}^{n+\mu}}{\tau^2} + \Gamma \frac{2u_{j,k}^{n+\mu}}{\tau^2} - \Gamma \frac{u_{j-1,k}^{n+\mu}}{\tau^2} = 0$$

С учетом формулы  $u^{n+\mu} = \mu u^{n+1} + (1-\mu)u^n$  получим:

$$\begin{aligned} & \frac{u_{j,k}^{n+1}}{h_z} - \frac{u_{j,k}^n}{h_z} - \mu u_{j+1/2,k}^n \frac{u_{j+1,k}^{n+1}}{2\tau} - (1-\mu) u_{j+1/2,k}^n \frac{u_{j+1,k}^n}{2\tau} + \mu u_{j+1/2,k}^n \frac{u_{j,k}^{n+1}}{2\tau} + (1-\mu) u_{j+1/2,k}^n \frac{u_{j,k}^n}{2\tau} - \mu u_{j-1/2,k}^n \frac{u_{j,k}^{n+1}}{2\tau} - \\ & - (1-\mu) u_{j-1/2,k}^n \frac{u_{j,k}^n}{2\tau} + \mu u_{j-1/2,k}^n \frac{u_{j-1,k}^{n+1}}{2\tau} + (1-\mu) u_{j-1/2,k}^n \frac{u_{j-1,k}^n}{2\tau} - \mu \Gamma \frac{u_{j+1,k}^{n+1}}{\tau^2} - (1-\mu) \Gamma \frac{u_{j+1,k}^n}{\tau^2} + \\ & + \mu \Gamma \frac{2u_{j,k}^{n+1}}{\tau^2} + (1-\mu) \Gamma \frac{2u_{j,k}^n}{\tau^2} - \mu \Gamma \frac{u_{j-1,k}^{n+1}}{\tau^2} - (1-\mu) \Gamma \frac{u_{j-1,k}^n}{\tau^2} = 0. \end{aligned}$$

Сгруппируем слагаемые относительно узлов шаблона:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{h_z} + \mu \left( \frac{u_{j+1/2,k}^n}{2\tau} - \frac{u_{j-1/2,k}^n}{2\tau} + \frac{2\Gamma}{\tau^2} \right) \right) u_{j,k}^{n+1} - \mu \left( \frac{u_{j+1/2,k}^n}{2\tau} + \frac{\Gamma}{\tau^2} \right) u_{j+1,k}^{n+1} - \mu \left( -\frac{u_{j-1/2,k}^n}{2\tau} + \frac{\Gamma}{\tau^2} \right) u_{j-1,k}^{n+1} - \\ & - \left( \frac{1}{h_z} + (1-\mu) \left( -\frac{u_{j+1/2,k}^n}{2\tau} + \frac{u_{j-1/2,k}^n}{2\tau} - \frac{2\Gamma}{\tau^2} \right) \right) u_{j,k}^n - (1-\mu) \left( \frac{u_{j+1/2,k}^n}{2\tau} + \frac{\Gamma}{\tau^2} \right) u_{j+1,k}^n - \\ & - (1-\mu) \left( -\frac{u_{j-1/2,k}^n}{2\tau} + \frac{\Gamma}{\tau^2} \right) u_{j-1,k}^n = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, получим коэффициенты сеточного уравнения (16), записанного в канонической форме (14) в случае  $n > 0$ :

$$B(p, q_1) = \mu \left( \frac{u_{j+1/2,k}^n}{2\tau} + \frac{\Gamma}{\tau^2} \right),$$

$$\begin{aligned}
 B(p, q_2) &= \mu \left( -\frac{u_{j-1/2, k}^n}{2\tau} + \frac{\Gamma}{\tau^2} \right), \\
 B(p, q_3) &= \frac{1}{h_z} + (1-\mu) \left( -\frac{u_{j+1/2, k}^n}{2\tau} + \frac{u_{j-1/2, k}^n}{2\tau} - \frac{2\Gamma}{\tau^2} \right), \\
 B(p, q_4) &= (1-\mu) \left( \frac{u_{j+1/2, k}^n}{2\tau} + \frac{\Gamma}{\tau^2} \right), \\
 B(p, q_5) &= (1-\mu) \left( -\frac{u_{j-1/2, k}^n}{2\tau} + \frac{\Gamma}{\tau^2} \right), \\
 A(p) &= \sum_{n=1}^5 B(p, q_n), \\
 F(p) &= 0.
 \end{aligned} \tag{17}$$

В случае  $n = 0$  каноническая форма сеточного уравнения для задачи (16) имеет вид

$$\begin{aligned}
 B(p, q_1) &= \mu \left( \frac{u_{j+1/2, k}^n}{2\tau} + \frac{\Gamma}{\tau^2} \right), \\
 B(p, q_2) &= \mu \left( -\frac{u_{j-1/2, k}^n}{2\tau} + \frac{\Gamma}{\tau^2} \right), \\
 A(p) &= \frac{1}{h_z} + \mu \left( \frac{u_{j+1/2, k}^n}{2\tau} - \frac{u_{j-1/2, k}^n}{2\tau} + \frac{2\Gamma}{\tau^2} \right), \\
 F(p) &= \left( \frac{1}{h_z} + (1-\mu) \left( -\frac{u_{j+1/2, k}^n}{2\tau} + \frac{u_{j-1/2, k}^n}{2\tau} - \frac{2\Gamma}{\tau^2} \right) \right) V_{j, k} + (1-\mu) \left( \frac{u_{j+1/2, k}^n}{2\tau} + \frac{\Gamma}{\tau^2} \right) V_{j+1, k} + \\
 &\quad + (1-\mu) \left( -\frac{u_{j-1/2, k}^n}{2\tau} + \frac{\Gamma}{\tau^2} \right) V_{j-1, k}.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Для каждого  $k = \overline{1..P}$  данное сеточное уравнение нетрудно свести к множеству сеточных уравнений количеством  $N_z$ . Решением каждого из них является значение поля скорости движения частиц на пространственном слое по координате  $z$ . При этом в окрестности центра шаблона будут лежать две точки. Запишем коэффициенты сеточного уравнения и правую часть в случае трехточечного шаблона.

$$\begin{aligned}
 B(p, q_1) &= \mu \left( \frac{u_{j+1/2, k}^n}{2\tau} + \frac{\Gamma}{\tau^2} \right), \\
 B(p, q_2) &= \mu \left( -\frac{u_{j-1/2, k}^n}{2\tau} + \frac{\Gamma}{\tau^2} \right),
 \end{aligned}$$



$$A(p) = \frac{1}{h_z} + \mu \left( \frac{u_{j+1/2,k}^n}{2\tau} - \frac{u_{j-1/2,k}^n}{2\tau} + \frac{2\Gamma}{\tau^2} \right), \quad (19)$$

$$F(p) = \left( \frac{1}{h_z} + (1-\mu) \left( -\frac{u_{j+1/2,k}^n}{2\tau} + \frac{u_{j-1/2,k}^n}{2\tau} - \frac{2\Gamma}{\tau^2} \right) \right) u_{j,k}^n + (1-\mu) \left( \frac{u_{j+1/2,k}^n}{2\tau} + \frac{\Gamma}{\tau^2} \right) u_{j+1,k}^n +$$

$$+ (1-\mu) \left( -\frac{u_{j-1/2,k}^n}{2\tau} + \frac{\Gamma}{\tau^2} \right) u_{j-1,k}^n.$$

Сеточное уравнение (16), аппроксимирующее исходную задачу (7-9), имеет матрицу коэффициентов специального вида размерности  $M \times M$ :

$$A = \begin{pmatrix} c_0 & -b_0 & & & -a_0 \\ -a_1 & c_1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & c_{M-2} & -b_{M-2} \\ -b_{M-1} & & & -a_{M-1} & c_{M-1} \end{pmatrix}.$$

Систему уравнений (16) можно решить методом циклической прогонки.

Решение уравнения (10) находится методом гармоник. Величину скорости частиц среды можно разложить в ряд Фурье следующим образом:

$$w^n(\theta, r) = \sum_{j=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}} c_j^n(r) \exp(i\omega j\theta), \quad (20)$$

где  $\omega$  – частота первой гармоники,  $j$  – номер гармоники,  $M$  – количество дискретных значений величины скорости частиц среды на период.

Подставим выражение (20) в уравнение (10), получим:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{j=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}} \frac{c_j^{n+1}(r) - c_j^n(r)}{h_z} \exp(i\omega j\theta) = \frac{N}{4} \Delta_{\perp} \sum_{j=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}} c_j^{n+\lambda}(r) \exp(i\omega j\theta),$$

где  $i$  – мнимая единица.

Внесем операторы частных производных под знак суммы, в результате получим

$$\sum_{j=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{c_j^{n+1}(r) - c_j^n(r)}{h_z} \exp(i\omega j\theta) \right) = \frac{N}{4} \Delta_{\perp} \sum_{j=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}} c_j^{n+\lambda}(r) \exp(i\omega j\theta).$$

Возьмем частную производную по  $\theta$ :

$$\sum_{j=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}} \left( i\omega j \frac{c_j^{n+1}(r) - c_j^n(r)}{h_z} \exp(i\omega j\theta) \right) = \sum_{j=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}} \frac{N}{4} \Delta_{\perp} c_j^{n+\lambda}(r) \exp(i\omega j\theta).$$

Так как функции  $\exp(i\omega j\theta)$  для различных  $j$  линейно независимы, то получим уравнение:

$$i\omega j \frac{c_j^{n+1}(r) - c_j^n(r)}{h_z} = \frac{N}{4} \Delta_{\perp} c_j^{n+\lambda}(r). \quad (21)$$

Уравнение (21) задано при следующих граничных условиях:

$$\left( c_j^n(r) \right)' \Big|_{r=0} = 0, \quad (22)$$

$$c_j^n(r) \Big|_{r=\infty} = 0. \quad (23)$$

Данное уравнение описывает диффузию энергии для различных частот. Для него строится конечно-разностная схема и вычисляется спектр величины скорости частиц на следующем временном слое, для этого поперечный лапласиан  $\Delta_{\perp}$  запишем в полярной системе координат:

$$\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial}{r\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} + r \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right). \quad (24)$$

Запишем уравнение (21) с учетом (24):

$$i\omega j \frac{c_j^{n+1}(r) - c_j^n(r)}{h_z} = \frac{N}{4r} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} c_j^{n+\lambda}(r) \right) \right).$$

Умножив обе части уравнения на  $r$ , получим:

$$i\omega jr \frac{c_j^{n+1}(r) - c_j^n(r)}{h_z} = \frac{N}{4} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} c_j^{n+\lambda}(r) \right) \right). \quad (25)$$

При помощи интегроинтерполяционного метода аппроксимируем оператор второй разностной производной в уравнении (25). Для этого проинтегрируем обе части уравнения по отрезку  $r_{k-1/2} \leq r \leq r_{k+1/2}$ ;  $k = 1, P-1$ :

$$\begin{aligned} i\omega j \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} r \frac{c_j^{n+1}(r) - c_j^n(r)}{h_z} dr &= \frac{N}{4} \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} c_j^{n+\lambda}(r) \right) dr, \\ \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} r \frac{c_j^{n+1}(r) - c_j^n(r)}{h_z} dr &\approx r_k \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} \frac{c_j^{n+1}(r) - c_j^n(r)}{h_z} dr = r_k \frac{c_{j,k}^{n+1} - c_{j,k}^n}{h_z} h_r, \\ \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} c_j^{n+\lambda}(r) \right) dr &= \left( r \frac{\partial}{\partial r} c_j^{n+\lambda}(r) \right) \Big|_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} = r_{k+1/2} \frac{\partial}{\partial r} c_j^{n+\lambda}(r_{k+1/2}) - r_{k-1/2} \frac{\partial}{\partial r} c_j^{n+\lambda}(r_{k-1/2}). \end{aligned}$$

Обозначим  $\frac{\partial}{\partial r} c_j^{n+\lambda}(r) = Z$ . Проинтегрируем обе части данного выражения на отрезке  $r_k \leq r \leq r_{k+1}$ ;  $k = 0, P-1$ :

$$\int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{\partial}{\partial r} c_j^{n+\lambda}(r) dr = \int_{r_k}^{r_{k+1}} Z dr,$$

$$c_j^{n+\lambda}(r_{k+1}) - c_j^{n+\lambda}(r_k) = \int_{r_k}^{r_{k+1}} Z dr.$$

Аппроксимация выражения  $\frac{\partial}{\partial r} c_j^{n+\lambda}(r_{k+1/2})$  примет вид

$$\frac{\partial}{\partial r} c_j^{n+\lambda}(r_{k+1/2}) = Z(r_{k+1/2}) = \frac{1}{h_r} \int_{r_k}^{r_{k+1}} Z dr = \frac{c_j^{n+\lambda}(r_{k+1}) - c_j^{n+\lambda}(r_k)}{h_r} \approx \frac{c_{j,k+1}^{n+\lambda} - c_{j,k}^{n+\lambda}}{h_r}.$$

Таким образом, дискретный аналог уравнения (11) запишется в виде

$$i\omega j r_k \frac{c_{j,k}^{n+1} - c_{j,k}^n}{h_z} h_r = \frac{N}{4} \left( r_{k+1/2} \frac{c_{j,k+1}^{n+\lambda} - c_{j,k}^{n+\lambda}}{h_r} - r_{k-1/2} \frac{c_{j,k}^{n+\lambda} - c_{j,k-1}^{n+\lambda}}{h_r} \right).$$

С учетом  $r_k = kh_r$  получим:

$$i\omega j k \frac{c_{j,k}^{n+1} - c_{j,k}^n}{h_z} = \frac{N}{4} \left( \left( k + \frac{1}{2} \right) \frac{c_{j,k+1}^{n+\lambda} - c_{j,k}^{n+\lambda}}{h_r^2} - \left( k - \frac{1}{2} \right) \frac{c_{j,k}^{n+\lambda} - c_{j,k-1}^{n+\lambda}}{h_r^2} \right), \quad (26)$$

где  $c_{j,k} = \frac{1}{h_r} \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} c_j(r) dr$ .

Аппроксимация выражения  $\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} c_j^{n+\lambda}(r) \right)$  с граничными условиями (22)

примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} c_j^{n+\lambda}(r) \right) &\approx \frac{1}{h_r} \int_{r_{-1/2}}^{r_{1/2}} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} c_j^{n+\lambda}(r) \right) dr = \frac{1}{h_r} \int_0^{r_{1/2}} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} c_j^{n+\lambda}(r) \right) dr = \frac{1}{h_r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} c_j^{n+\lambda}(r) \right) \Big|_0^{r_{1/2}} = \\ &= \frac{1}{h_r} \left( r_{1/2} \frac{\partial}{\partial r} c_j^{n+\lambda}(r_{1/2}) - r_0 \frac{\partial}{\partial r} c_j^{n+\lambda}(r_0) \right) = \frac{1}{h_r} r_{1/2} \frac{\partial}{\partial r} c_j^{n+\lambda}(r_{1/2}) = r_{1/2} \frac{c_{j,1}^{n+\lambda} - c_{j,0}^{n+\lambda}}{h_r^2}. \end{aligned}$$

Запишем дискретный аналог выражения  $i\omega j r \frac{c_j^{n+1}(r) - c_j^n(r)}{h_z}$  на отрезке

$0 \leq r \leq r_{1/2}$ :

$$\begin{aligned} i\omega j r \frac{c_j^{n+1}(r) - c_j^n(r)}{h_z} &\approx \frac{2}{h_r} \int_0^{r_{1/2}} i\omega j r \frac{c_j^{n+1}(r) - c_j^n(r)}{h_z} dr \approx \frac{2}{h_r} i\omega j \frac{c_{j,k}^{n+1} - c_{j,k}^n}{h_z} \int_0^{r_{1/2}} r dr = \frac{2}{h_r} i\omega j \frac{c_{j,k}^{n+1} - c_{j,k}^n}{h_z} \frac{r^2}{2} \Big|_0^{r_{1/2}} = \\ &= \frac{2}{h_r} i\omega j \frac{c_{j,k}^{n+1} - c_{j,k}^n}{h_z} \frac{r_{1/2}^2}{2} = i\omega j \frac{c_{j,k}^{n+1} - c_{j,k}^n}{h_z} \frac{r_{1/2}}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, аппроксимация уравнения (25) при  $k = 0$  запишется в виде

$$i\omega j \frac{c_{j,k}^{n+1} - c_{j,k}^n}{h_z} \frac{r_{1/2}}{2} = \frac{N}{4} r_{1/2} \frac{c_{j,1}^{n+\lambda} - c_{j,0}^{n+\lambda}}{h_r^2},$$

$$i\omega j \frac{c_{j,k}^{n+1} - c_{j,k}^n}{h_z} = \frac{N}{2} \frac{c_{j,1}^{n+\lambda} - c_{j,0}^{n+\lambda}}{h_r^2}.$$

Таким образом, аппроксимация уравнения (21) с граничными условиями (22-23) запишется следующим образом:

$$i\omega j \frac{c_{j,k}^{n+1} - c_{j,k}^n}{h_z} = \frac{N}{2} \frac{c_{j,1}^{n+\lambda} - c_{j,0}^{n+\lambda}}{h_r^2}, \quad k=0$$

$$i\omega j k \frac{c_{j,k}^{n+1} - c_{j,k}^n}{h_z} = \frac{N}{4} \left( \left( k + \frac{1}{2} \right) \frac{c_{j,k+1}^{n+\lambda} - c_{j,k}^{n+\lambda}}{h_r^2} - \left( k - \frac{1}{2} \right) \frac{c_{j,k}^{n+\lambda} - c_{j,k-1}^{n+\lambda}}{h_r^2} \right), \quad 0 < k < P$$

$$c_{j,k}^{n+1} = 0, \quad k = P$$

Величина скорости волны считается по формуле:

$$w_{j,k}^{n+1} = \frac{1}{M} \sum_{j=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}} (c_{j,k}^{n+1})^* \exp(i\omega j \theta),$$

где  $(c_{j,k}^{n+1})^* = \text{Re}(c_{j,k}^{n+1}) - i \text{Im}(c_{j,k}^{n+1})$ .

Таким образом осуществляется переход на следующий временной слой.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. – М. Наука, 1979.
2. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М. Наука, 1989.

#### **Чистякова Татьяна Алексеевна**

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: a\_tanya84@mail.ru.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 8(8634)371-606.

Кафедра высшей математики; аспирантка.

#### **Chistyakova Tatyana Alexeevna**

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: a\_tanya84@mail.ru.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: 8(8634)371-606.

The Department of Higher Mathematics; post-graduate student.