

УДК 551.466

И.Б. Аббасов**МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ
ПОВЕРХНОСТНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН С УЧЕТОМ
ДИСПЕРСИИ**

В работе рассматриваются вопросы моделирования распространения *нелинейных поверхностных гравитационных волн на мелководье с учетом дисперсионных эффектов. По полученным аналитическим выражениям для горизонтальной скорости частиц среды описывается эволюция профиля нелинейных поверхностных гравитационных волн при распространении в условиях мелководья.*

Нелинейные поверхностные гравитационные волны; мелководье; дисперсия; профиль волны.

I.B. Abbasov**MODELLING OF PROPAGATION OF NONLINEAR SURFACE GRAVITY
WAVES WITH DISPERSION**

In article problems modeling of propagation of nonlinear surface gravity waves in a *shallow-water condition with dispersions effects are considered. On the basic of the analytical expressions for horizontal velocity of medium particles evolution of a profile of nonlinear surface gravity waves is described at propagation in the shallow-water condition.*

Nonlinear surface gravity waves; shallow-water; dispersions effects; profile waves.

Волновые явления на поверхности моря в общей постановке носят нелинейный характер. Вопросы распространения нелинейных поверхностных гравитационных волн в условиях мелководья имеют достаточно давнюю историю [1], однако к ним не уменьшается интерес и в наше время. Нелинейная динамика поверхностных гравитационных волн в длинноволновом приближении описывается в работах [2]. Работа [3] посвящена моделированию наката волн на основе уравнений Буссинеска. Экспериментальные данные по влиянию дисперсионных эффектов на распространение нелинейных поверхностных волн в прибойной зоне представлены в работе [4].

В работе [5] методом последовательных приближений было получено решение уравнения мелкой воды с учетом квадратичной нелинейности. В рамках соответствующих ограничений этот метод позволяет проследить эволюцию профиля нелинейной поверхностной гравитационной волны при распространении по мелководью. Однако для адекватного рассмотрения исследуемого явления необходимо учитывать одновременно и нелинейность, и дисперсию. Особенно дисперсия будет ощутима для генерируемых высших гармоник основной волны.

Поверхностные гравитационные волны на мелководье в приближении слабой нелинейности и слабой дисперсии описываются давно известным уравнением Кортевега и де Вриза [6]. В уравнении слабая нелинейность, приводящая к укручению волны, и слабая дисперсия, приводящая к её размытию, компенсируют друг друга. При этом возникает стационарная нелинейная волна (названная им кноидальной волной), которая распространяется без изменения формы с постоянной скоростью. Кноидальные волны ограничены по высоте и являются фактически по форме периодической последовательностью солитонов. Неизменность форм кноидальных

волн не позволяет проследить динамику нелинейных поверхностных гравитационных волн при распространении по мелководью.

В данной работе исследуются вопросы распространения нелинейных поверхностных гравитационных волн в условиях мелководных заливов с учетом дисперсии. Для слежения за динамикой процесса распространения поверхностных гравитационных волн с учетом дисперсии воспользуемся аналитическим выражением для горизонтальной скорости частиц среды, полученным в работе [5]:

$$\begin{aligned} u_{\text{гм.}}(x, t) &= \varepsilon u_{\text{нрв.}}^{(1)}(x, t) + \varepsilon^2 u_{\text{гм.}}^{(2)}(x, t) = \\ &= [\varepsilon^2 U_0 \exp(ikx) - ikt\varepsilon^3 U_0^2 \exp(2ikx)] + \\ &+ [k^2 t^2 \varepsilon^5 U_0^3 \exp(ikx) + ikt\varepsilon^4 U_0^2 \exp(2ikx) + \\ &+ 3k^2 t^2 \varepsilon^5 U_0^3 \exp(3ikx) - 2ik^3 t^3 \varepsilon^6 U_0^4 \exp(4ikx)] + (\text{к.с.}), \end{aligned} \quad (1)$$

где k – волновое число, ε – параметр нелинейности, (к.с.) – комплексно-сопряженное первому слагаемому, $u_{\text{нрв.}}^{(1)}(x, t)$, $u_{\text{гм.}}^{(2)}(x, t)$ – решения в первом и втором приближениях.

Нелинейность – ε и дисперсия – γ определяются выражениями

$$\varepsilon = \frac{\vartheta_x}{c} = \frac{a}{H}, \quad \gamma = \left(\frac{H}{\lambda} \right)^2,$$

где ϑ_x – горизонтальная скорость частиц, c – скорость распространения гравитационных волн, a – амплитуда вертикального смещения свободной поверхности, H – глубина жидкости, λ – длина волны.

Выражение (1) было получено решением уравнения мелкой воды с квадратичной нелинейностью в отсутствии дисперсии методом последовательных приближений. Метод последовательных приближений достаточно давно известен и является наиболее прямым путем решения нелинейных уравнений [7]. Здесь используется разложение по малому параметру ε ($\varepsilon \ll 1$), и ограничиваемся первыми двумя членами при условии $u^{(n+1)} \ll u^{(n)}$. В результате взаимодействия основной волны k со второй $2k$ возникают вторичные волны с удвоенными значениями $2k$, $4k$ и комбинационные волны k и $3k$. Появление в спектре высших гармоник приводит со временем к искажению профиля волны.

Влияние дисперсии на процесс распространения мы учтем в первоначальном виде, через известный закон дисперсии для круговой частоты поверхностных гравитационных волн [6]:

$$\omega = \sqrt{gk \cdot \text{th } kH},$$

фазовая скорость гравитационных волн при этом определяется выражением

$$c_\phi = \frac{\omega}{k} = c_0 \cdot \sqrt{\frac{\text{th } kH}{kH}}, \quad (2)$$

где $c_0 = \sqrt{gH}$ – скорость распространения поверхностных волн в приближении мелкой воды (отсутствие дисперсии), g – гравитационная постоянная. Из выраже-

ния (2) следует, что скорость распространения для появляющихся высших гармоник основной волны с уменьшением длины волны будет уменьшаться.

Для проверки влияния дисперсии на нелинейные волновые процессы воспользуемся гидрологическими условиями Таганрогского залива Азовского моря. Средняя глубина Таганрогского залива не превышает 5 м, поэтому условиям мелководности будут удовлетворять гравитационные волны с длинами свыше 30 м, дно ровное, поверхностное натяжение отсутствует, влияние ветра не учитывается.

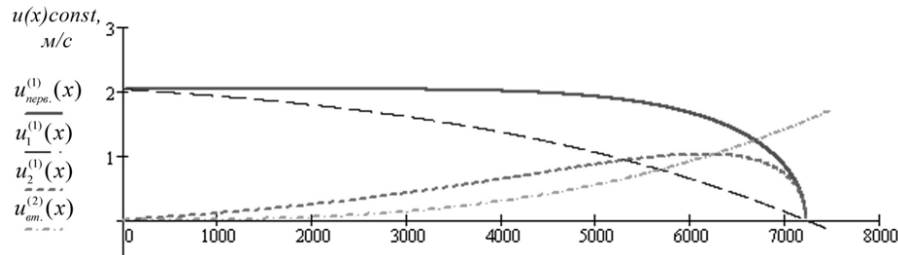
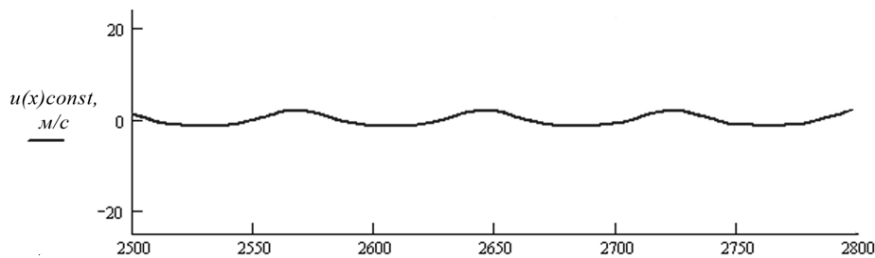


Рис. 1. Графики суммарных амплитуд горизонтальных скоростей первичных $u_{перв.}^{(1)}(x, t)$ и вторичных $u_{от.}^{(2)}(x, t)$ волн, а также основной волны $u_1^{(1)}(x, t)$ и второй $u_2^{(1)}(x, t)$ гармоники

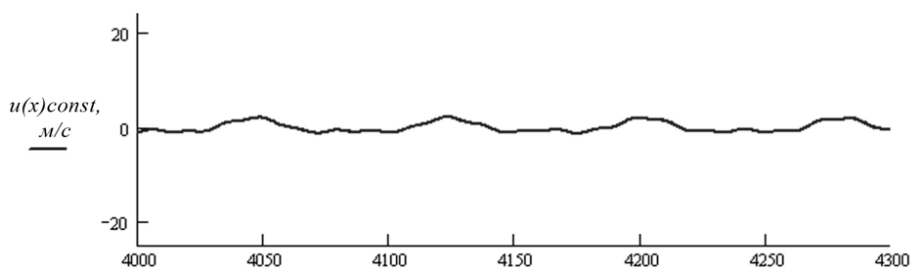
На рис. 1 представлены графики изменения от расстояния амплитуд скоростей первичных $u_{перв.}^{(1)}(x, t)$ и вторичных $u_{от.}^{(2)}(x, t)$ волн, а также основной $u_1^{(1)}(x, t)$ и второй $u_2^{(1)}(x, t)$. Для поверхностной волны с начальными параметрами: длина $\lambda=78$ м; начальная крутизна $2a/\lambda=0,014$, неустойчивость наступит на расстоянии $x \approx 7300$ м.

Анализируя рис. 1, можно отметить, что с ростом суммарной амплитуды вторичных волн амплитуда первичных волн падает. Амплитуда второй гармоники медленно нарастает, и к моменту неустойчивости резко падает, так как происходит полная перекачка энергии от первичных волн (основная волна и вторая гармоника) вторичным волнам.

Рассмотрим изменение профиля исходной гравитационной волны до расстояния $x \approx 4300$ м, где выполняется начальное условие для метода последовательных приближений $u^{(n+1)} \ll u^{(n)}$, т.е. суммарная амплитуда вторичных волн гораздо меньше амплитуды первичных волн. Следовательно, наше рассмотрение до данного расстояния является ещё корректным.



а



б

Рис. 2. Зависимость изменения горизонтальной скорости $u_{\text{гм.}}(x, t)$ от расстояния пробега поверхностной гравитационной волны с параметрами: частота $f=0,09$ Гц; длина $\lambda=78$ м; начальная крутизна $2a/\lambda=0,014$; $a/H=0,1$; $H/\lambda=0,06$

На рис. 2,а и 2,б представлены зависимости изменения горизонтальной скорости $u_{\text{гм.}}(x, t)$ от расстояния пробега на основе выражения (1). Волна с изначально косинусоидальным профилем за время пробега постепенно начинает искажаться, гребни заостряются, а впадины становятся все более пологими (рис.2,а). Это является следствием нелинейных процессов, приводящих к появлению высших гармоник. Далее начинает проявляться влияние дисперсии на высшие гармоники, для третьей и четвертой гармоник условия мелководности уже не соблюдается. Также если скорость распространения для основной волны (без учета дисперсии) составляет 7 м/с, то для четвертой гармоники скорость распространения уменьшается до 5,3 м/с.

В результате, если в нелинейность не доведет волну до обрушения (до критических значений угла заострения), то дисперсия приведет к распаду цуга волны, как на рис. 2,б. Дисперсия приводит к нарушению синхронизации между вторичными волнами, и профиль волны перестает быть периодическим. Чем лучше будет выполняться условие мелководности, тем менее ощутима будет дисперсия. Дисперсия также может компенсировать укрупнение фронта волны и на начальном этапе распространения, тем самым откладывая её обрушение по заливу.

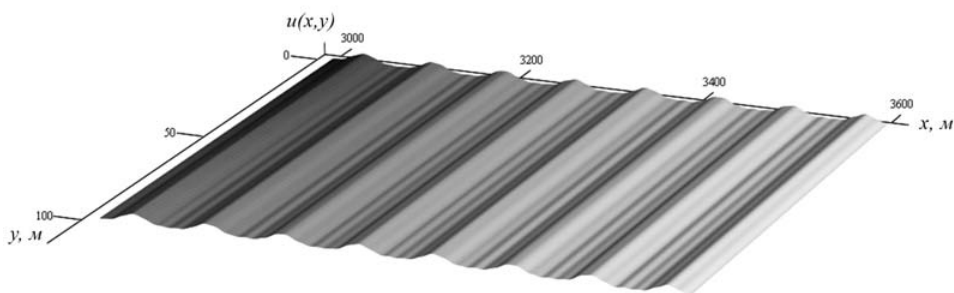


Рис. 3. Трехмерная модель распространения нелинейной поверхностной гравитационной волны с учетом дисперсии: частота $f=0,09$ Гц; длина $\lambda=78$ м; начальная крутизна $2a/\lambda=0,014$; $a/H=0,1$; $H/\lambda=0,06$

Следует отметить, что экспериментальные данные с распадом основного гребня поверхностной волны в результате дисперсии представлены в работе [6]. На

рис.3 представлена трехмерная модель распространения поверхностной волны по заливу, где наблюдается расползание цуга волны в результате дисперсии.

Следовательно, можно подчеркнуть, что рассмотренный нами метод позволяет проследить динамику нелинейных поверхностных гравитационных волн с дисперсией в условиях мелководья.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Peregrine D.H.* Long waves on a beach // *J. Fluid Mech.* – 1967. V.27. – № 4. – P. 815-827.
2. *Диденкулова И.И., Заибо Н., Куркин А.А., Пелиновский Е.Н.* Крутизна и спектр нелинейно деформируемой волны на мелководье // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* – 2006. Т.42. – № 6. – С. 839-842.
3. *Шерменева М.А., Шуган И.В.* Расчет наката волн на пологий откос // *Письма в ЖТФ.* – 2006. Т.32. – Вып. 2. – С. 33-38.
4. *Кузнецов С.Ю., Сапрыкина Я.В.* Экспериментальные исследования эволюции групп волн в береговой зоне моря // *Океанология.* – 2002. Т.42. – № 3. – С. 356-363.
5. *Аббасов И.Б.* Исследование и моделирование нелинейных поверхностных волн на мелководье // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана.* – 2003. Т.39. – №4. – С. 568-573.
6. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977. – 622 с.
7. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. – М.: Наука, 1979. – 383 с.

Аббасов Ифтихар Балакишневич

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: igkd@egf.tsure.ru

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 8(8634)371-794.

Кафедра инженерной графики и компьютерного дизайна; доцент

Bogdanov Sergey Aleksandrovich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: igkd@egf.tsure.ru

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: 8(8634)371-663.

The Department of Engineering Drawing and Computer Design; associate professor.

УДК 518.5.001.57

Т.А. Чистякова

ДИСКРЕТНАЯ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ, ОПИСЫВАЕМАЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЕМ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Работа посвящена разработке дискретной математической модели распространения волновых пучков. Для разработки численной модели рассматриваемых волновых явлений отдано предпочтение методу расщепления по физическим процессам.

Волновые пучки; интегроинтерполяционный метод; преобразование Фурье; аппроксимация.