

## Раздел II. Математическое моделирование сложных физических процессов

УДК 534.22

О.А. Савицкий

### ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН С РАЗЛИЧНЫМИ ВРЕМЕННЫМИ МАСШТАБАМИ\*

*В работе задача о нелинейном взаимодействии упругих волн с различными временными масштабами рассмотрена в общей постановке. Из уравнения Хохлова – Заболотской удается получить частные уравнения, описывающие эволюцию каждой компоненты волнового поля. Показан односторонний характер такого взаимодействия. Влияние низкочастотной волны на высокочастотную проявляется, главным образом, в амплитуднозависимом изменении фазовой скорости высокочастотной волны.*

*Волна; нелинейные взаимодействия; звуковой пучок; временной масштаб; дифракция; волна конечной амплитуды.*

O.A. Savitsky

### WAVES INTERACTION WITH DIFFERENT TEMPORAL SCALES

*In this paper the problem about nonlinear interaction of elastic waves with different temporal scales surveyed in common statement. From Khokhlov-Zabolotskaia equation it is possible to receive the partial equations describing evolution of each component of a wave field. One-sided character of such interaction is shown. Influence of a low-frequency wave on high-frequency is exhibited primarily in amplitude dependence of a high-frequency wave phase velocity variation;*

*Wave; nonlinear interactions; a sound beam; a temporal scale; a diffraction.*

В ряде работ [1,2] рассматривалось взаимодействие первоначально гармонических волн  $v_1$  и  $v_2$ , частоты которых  $\omega_1$  и  $\omega_2$  удовлетворяют условию  $\omega_2 \ll \omega_1$ , в квадратично-нелинейной среде, не обладающей физической дисперсией. При этом исследователи ограничивались рассмотрением случая плоских волн, накладывалось также дополнительное условие на амплитудные соотношения в исходном спектре  $v_{20} \gg v_{10}$ .

Вместе с тем представляет теоретический и практический интерес рассмотреть задачу взаимодействия высокочастотной и низкочастотной волн в общем виде, не накладывая условия монохроматичности и одномерности исходных возмущений, а также не делая каких-либо предположений относительно соотношения амплитуд взаимодействующих волн.

Описание дифракционных явлений во взаимодействующих волнах будем проводить в рамках квазиоптического приближения. Таким образом, в качестве модельного уравнения воспользуемся уравнением Хохлова – Заболотской [3]:

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке по гранту РНПВШ 2.1.1/6584.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial V}{\partial z} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = \frac{N}{4} \Delta_{\perp} V. \quad (1)$$

С целью сокращения записи будем считать, что акустическое поле обладает осевой симметрией ( $\Delta_{\perp} V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right)$ ,  $r$  – поперечная координата). Из дальнейшего будет видно, что это предположение никак не повлияет на общность получаемых результатов.

Будем искать решение уравнения (1) в виде

$$V(z, r, \theta) = V_1(z, r, \theta) + V_2(z, r, k\theta), \quad (2)$$

т.е. в виде суммы компонент с сильно различающимися временными масштабами, так что выполнено условие,  $k \ll 1$ . Такой вид решения (1) соответствует начальному условию

$$V(0, r, \theta) = V_1(0, r, \theta) + V_2(0, r, k\theta). \quad (3)$$

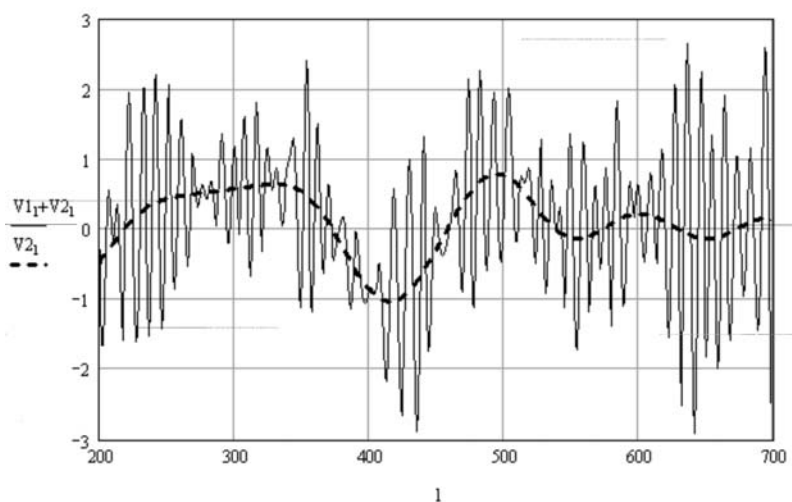


Рис. 1. К постановке задачи

Пример начального условия для рассматриваемого класса задач приведен на рис. 1.

Будем считать, что для обеих компонент решения, а значит и для самой искомой функции  $V(z, r, \theta)$ , их среднее значение по достаточно большому промежутку времени ( $\theta, \theta + \Delta\theta$ ) равно нулю

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\Delta\theta} \int_{\theta}^{\theta + \Delta\theta} V_1(z, r, \theta) d\theta \right) = \lim_{\Delta\theta \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\Delta\theta} \int_{\theta}^{\theta + \Delta\theta} V_2(z, r, k\theta) d\theta \right) = 0. \quad (4)$$

Это означает, что в решении отсутствует компонента спектра, представляющая собой постоянный поток среды. Такое условие выглядит достаточно естественным для всех практически значимых ситуаций.

Малость параметра  $k$ , входящего в предполагаемое решение позволяет с помощью операции усреднения «отфильтровать» одну компоненту решения от другой. Действительно, усредняя (2) по временному интервалу  $(\theta, \theta + \Delta\theta)$ , когда  $\Delta\theta$  является большим параметром и одновременно величина  $k\Delta\theta$  является малой, получим

$$\lim_{\substack{\Delta\theta \rightarrow \infty \\ k\Delta\theta \rightarrow 0}} \left( \frac{1}{\Delta\theta} \int_{\theta}^{\theta + \Delta\theta} V(z, r, \theta) d\theta \right) = \lim_{\Delta\theta \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\Delta\theta} \int_{\theta}^{\theta + \Delta\theta} V_1(z, r, \theta) d\theta \right) + \\ + \lim_{\substack{\Delta\theta \rightarrow \infty \\ k\Delta\theta \rightarrow 0}} \left( \frac{1}{\Delta\theta} \int_{\theta}^{\theta + \Delta\theta} V_2(z, r, k\theta) d\theta \right) = V_2(z, r, k\theta)$$

Выбранная величина интервала усреднения значительно превышает характерный временной масштаб высокочастотной компоненты решения, но в то же время является малой величиной для низкочастотной компоненты.

Воспользуемся указанным свойством решения (2) для выяснения наиболее общих закономерностей поведения взаимодействующих волн. Для этого усредним уравнение (1) по временному промежутку  $(\theta, \theta + \Delta\theta)$ , длину которого удовлетворяет поставленным выше условиям  $\Delta\theta \rightarrow \infty$  и  $k\Delta\theta \rightarrow 0$ .

В результате почленного усреднения уравнения (1), с учетом (4), и отбрасывания малых членов порядка  $k\Delta\theta$  и выше, получим следующие оценки различных членов уравнения (1):

$$\frac{1}{\Delta\theta} \int_{\theta}^{\theta + \Delta\theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial z} d\theta = \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z} \left( \frac{1}{\Delta\theta} \int_{\theta}^{\theta + \Delta\theta} (V_1(z, r, \theta) + V_2(z, r, k\theta)) d\theta \right) = \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z} \left( \frac{1}{\Delta\theta} \int_{\theta}^{\theta + \Delta\theta} V_1(z, r, \theta) d\theta + \right. \\ \left. + \frac{1}{\Delta\theta} \int_{\theta}^{\theta + \Delta\theta} V_2(z, r, k\theta) d\theta \right) \approx \frac{\partial^2 V_2}{\partial \theta \partial z}; \\ \frac{1}{\Delta\theta} \int_{\theta}^{\theta + \Delta\theta} (\Delta_{\perp} V) d\theta = \Delta_{\perp} \left( \frac{1}{\Delta\theta} \int_{\theta}^{\theta + \Delta\theta} (V_1(z, r, \theta) + V_2(z, r, k\theta)) d\theta \right) = \Delta_{\perp} \left( \frac{1}{\Delta\theta} \int_{\theta}^{\theta + \Delta\theta} V_1(z, r, \theta) d\theta + \right. \\ \left. + \frac{1}{\Delta\theta} \int_{\theta}^{\theta + \Delta\theta} V_2(z, r, k\theta) d\theta \right) \approx \Delta_{\perp} V_2; \\ \frac{1}{\Delta\theta} \int_{\theta}^{\theta + \Delta\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( V \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) d\theta = \frac{1}{2\Delta\theta} \int_{\theta}^{\theta + \Delta\theta} \frac{\partial^2 (V^2)}{\partial \theta^2} d\theta = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{1}{\Delta\theta} \int_{\theta}^{\theta + \Delta\theta} V^2 d\theta \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{1}{\Delta\theta} \int_{\theta}^{\theta + \Delta\theta} V_1^2 d\theta + \right. \\ \left. + \frac{1}{\Delta\theta} \int_{\theta}^{\theta + \Delta\theta} V_1 V_2 d\theta + \frac{1}{\Delta\theta} \int_{\theta}^{\theta + \Delta\theta} V_2^2 d\theta \right) \approx \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_2^2}{\partial \theta^2}; \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial V_2}{\partial z} - V_2 \frac{\partial V_2}{\partial \theta} \right) = \frac{N}{4} \Delta_{\perp} V_2. \quad (5)$$

Полученный результат (5) показывает, что низкочастотная компонента решения с точностью до малых величин порядка  $k\Delta\theta$  подчиняется уравнению, совпадающему с уравнением (1), т. е. искажается точно так же, как если бы высокочастотной компоненты не существовало. Другими словами, в нелинейной среде высокочастотная волна никак не влияет на распространение низкочастотной волны, несмотря на конечность ее амплитуды. Вместе с тем обратное влияние низкочастотной волны на высокочастотную компоненту поля имеет место. К такому же вы-

воду пришли авторы экспериментальной работы [2] при наблюдении взаимодействия первоначально гармонических волн конечной амплитуды. Нетрудно убедиться, что указанная закономерность поведения низкочастотной компоненты решения (2) имеет место и в случае нелинейностей более высоких порядков, для этого достаточно рассмотреть соответствующее модельное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial V}{\partial z} - V^\alpha \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = \frac{N}{4} \Delta_{\perp} V, \quad (6)$$

где  $\alpha > 1$ .

Рассмотрим теперь закономерности распространения высокочастотной компоненты. Подставим решение в виде (2) в уравнение (1)

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial V_1}{\partial z} + \frac{\partial V_2}{\partial z} - V_1 \frac{\partial V_1}{\partial \theta} - V_1 \frac{\partial V_2}{\partial \theta} - V_2 \frac{\partial V_1}{\partial \theta} - V_2 \frac{\partial V_2}{\partial \theta} \right) = \frac{N}{4} \Delta_{\perp} V_1 + \frac{N}{4} \Delta_{\perp} V_2$$

и вычтем из него уравнение (5), тогда, отбрасывая малые величины порядка  $k\Delta\theta$  и выше, получим

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial V_1}{\partial z} - V_1 \frac{\partial V_1}{\partial \theta} \right) = \frac{N}{4} \Delta_{\perp} V_1 + V_2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial \theta^2}, \quad (7)$$

где функция  $V_2(z, r, k\theta)$  является решением уравнения Хохлова–Заболотской (1). Таким образом, решение задачи о взаимодействии акустических волн с различными временными масштабами можно свести к последовательному решению уравнений Хохлова–Заболотской (1) для низкочастотной компоненты  $V_2(z, r, k\theta)$ , а затем – уравнения (7) для высокочастотной волны  $V_1(z, r, \theta)$ .

Наличие в правой части уравнения (7) дополнительного члена  $V_2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial \theta^2}$  отражает возможное влияние присутствующей в среде низкочастотной волны на эволюцию волнового профиля высокочастотной компоненты, причем это влияние пропорционально амплитуде низкочастотной волны  $V_2$ . Волна  $V_2(z, r, k\theta)$ , не испытывая на себе влияния  $V_1(z, r, \theta)$ , может играть роль своеобразного «катализатора» для нелинейной трансформации волны  $V_1(z, r, \theta)$ , определяющего направление и интенсивность нелинейных процессов. Как следует из уравнения (7), важными свойствами такого воздействия низкочастотной компоненты поля на высокочастотную являются локальность и безынерционность.

Совместный анализ уравнений (5) и (7) позволяет обобщить вывод об одностороннем характере взаимодействия одномерных синусоидальных волн с существенно разными частотами [1,2] на случай взаимодействия неодномерных волн с различными временными масштабами, амплитудными соотношениями и произвольной формой временной зависимости.

Если переписать уравнение (7) в виде

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial V_1}{\partial z} - (V_2 + V_1) \frac{\partial V_1}{\partial \theta} \right) = \frac{N}{4} \Delta_{\perp} V_1,$$

то с точностью до величин порядка  $k\Delta\theta$  можно считать, что основным механизмом воздействия низкочастотной волны на высокочастотную является локальное изменение скорости смещения волновых профилей  $V_1(z, r, \theta)$  на величину  $V_2$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тагунов Е.Я. Исследование нелинейных взаимодействий слабых ультразвуковых сигналов с мощными низкочастотными акустическими возмущениями. – М.: Изд-во МГУ. 1981. – 14 с.
2. Moffett M. et. al. Experimental demonstration of the absorption of sound by sound in water. // J. Acoust. Soc. Amer. - 1978. - Vol. 63. – P. 1048-1051.
3. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн – М.: Наука, 1990. – 432 с.

#### **Савицкий Олег Анатольевич**

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: osav66@mail.ru.

347932 г. Таганрог, ул. Ломоносова 57/1, кв. 57.

Тел.: 8(8634)315-638; 8-903-435-40-49.

Кафедра высшей математики; доцент; зам. директора НОЦ Комплексных исследований и математического моделирования сложных природных и техногенных систем, с.н.с. ОКБ «Ритм» ЮФУ.

#### **Savitsky Oleg Anatoljevich**

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: osav66@mail.ru.

57/1 Lomonosov street, sq. 57, 347932. Taganrog, Russia.

Phone: 8(8634)315-638; 8-903-435-40-49.

The Department of Higher Mathematics; associate professor; the deputy director REC «Complex research and mathematical modeling of the complex natural and anthropogenic systems», senior staff scientist of the Design Office "RITM".

УДК 551.594

**А.А. Редин, А.Г. Клово, Г.В. Куповых, В.Н. Морозов**

### **ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АТМОСФЕРНОГО ПРИЗЕМНОГО СЛОЯ**

*В работе построена модель нестационарного горизонтально-однородного приземного слоя с учетом однократно заряженного аэрозоля.*

*Получены распределения электрических характеристик в приземном слое атмосферы в зависимости от интенсивности турбулентного перемешивания и концентраций аэрозольных частиц.*

*Приземный слой; аэрозоль; ионы; турбулентное перемешивание; электродный эффект; электрическое поле.*