

Раздел I. Математическое моделирование в аэро- и гидродинамике

УДК 519.8:532

Е.В. Алексеенко, Б.В. Сидоренко, О.В. Колгунова, А.Е. Чистяков

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ КЛАССИЧЕСКИХ И НЕКЛАССИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ГИДРОДИНАМИКИ ВОДОЕМОВ С ТУРБУЛЕНТНЫМ ОБМЕНОМ

В данной работе рассматриваются и применяются на практике два подхода в моделировании гидродинамики водоемов. Один из них основан на численном решении уравнений Навье – Стокса, с помощью метода поправки к давлению. Другой подход основан на решении Lattice Boltzmann уравнения. Проводится сравнительный анализ этих двух подходов на примере водоема «Etang de Berre».

Уравнения Навье – Стокса; метод поправки к давлению; решеточное уравнение Больцмана; решеточный метод Больцмана.

E.V. Alekseenko, B.V. Sidorenko, O.V. Kolgunova, A.E. Chistyakov

THE COMPARATIVE ANALYSIS OF CLASSICAL AND NON-CLASSICAL MODELS OF FLUID DYNAMICS OF WATER BASINS WITH A TURBULENT EXCHANGE

In this work two approaches in simulation fluid dynamics of basins are considered and applied in practice. One of them is based on numerical solution of the Navier – Stokes equations by Pressure-Correction method. Other approach based on solution of the Lattice Boltzmann equation. The comparative analysis of these two approaches on a basin example «Etang de Berre» is performed.

Navier – Stokes equations; Pressure-Correction method; Lattice Boltzmann Equation; Lattice Boltzmann Method.

Данная работа посвящена сравнению принципиально разных подходов в решении гидродинамических задач на примере мелководного водоема на юге Франции – лагуны «Etang de Berre». Первый из них является классическим и берет свое начало из уравнений Навье-Стокса, а второй более молодой и основан на кинетическом уравнении Больцмана, которое стоит выше в иерархии моделей. Кратко опишем суть каждого из методов, а затем проведем сравнительный анализ на конкретном примере.

Исходными уравнениями гидродинамики являются [1, 2]:

♦ уравнения движения (Навье – Стокса):

$$u'_t + uu'_x + vv'_y + ww'_z = -\frac{1}{\rho} a'_x + (\mu u'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (v u'_z)'_z + 2\Omega(v \sin \theta - w \cos \theta), \quad (1)$$

$$v'_t + uv'_x + vv'_y + ww'_z = -\frac{1}{\rho} a'_y + (\mu v'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (v v'_z)'_z - 2\Omega u \sin \theta, \quad (2)$$

$$w'_t + uw'_x + vw'_y + ww'_z = -\frac{1}{\rho} a'_z + (\mu w'_x)'_x + (\mu w'_y)'_y + (v w'_z)'_z + 2\Omega u \cos \theta, \quad (3)$$

♦ уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости:

$$u'_x + v'_y + w'_z = 0, \quad (4)$$

где $V = \{u, v, w\}$ – компоненты вектора скорости, a – гидростатическое давление, ρ – плотность, Ω – угловая скорость вращения земли, θ – угол между вектором угловой скорости и вертикалью (широта местности), μ, ν – горизонтальная и вертикальная составляющая коэффициента турбулентного обмена.

Для получения консервативных разностных схем естественно исходить из уравнений баланса, записанных для элементарных объемов (ячеек) сеточной области. Входящие в эти уравнения баланса интегралы и производные следует заменить приближенными разностными выражениями. В результате получаем однородную разностную схему. Такой метод получения консервативных схем будем называть *интегро-интерполяционным методом (методом баланса)*.

Для уравнений (1-3) выполним аппроксимацию по временной координате

$$\frac{\bar{u} - u}{\tau} + u\tilde{u}'_x + v\tilde{u}'_y + w\tilde{u}'_z = -\frac{1}{\rho} a'_x + (\mu\tilde{u}'_x)'_x + (\mu\tilde{u}'_y)'_y + (v\tilde{u}'_z)'_z + 2\Omega(v \sin \theta - w \cos \theta), \quad (5)$$

$$\frac{\bar{v} - v}{\tau} + u\tilde{v}'_x + v\tilde{v}'_y + w\tilde{v}'_z = -\frac{1}{\rho} a'_y + (\mu\tilde{v}'_x)'_x + (\mu\tilde{v}'_y)'_y + (v\tilde{v}'_z)'_z - 2\Omega u \sin \theta, \quad (6)$$

$$\frac{\bar{w} - w}{\tau} + u\tilde{w}'_x + v\tilde{w}'_y + w\tilde{w}'_z = -\frac{1}{\rho} a'_z + (\mu\tilde{w}'_x)'_x + (\mu\tilde{w}'_y)'_y + (v\tilde{w}'_z)'_z + 2\Omega u \cos \theta, \quad (7)$$

где u – значение поля на предыдущем временном слое, \bar{u} – на текущем временном слое, \tilde{u} – на некоем промежуточном временном слое.

Известно, что эффективным численным методом решения задач гидродинамики является MAC-метод. В работе рассматривается вариант данного метода, известный как метод поправки к давлению. Данный метод представляет собой аддитивную схему расщепления по физическим процессам и гарантирует выполнение баланса массы (уравнение неразрывности), являясь устойчивым. Распишем систему уравнений (5-7) по физическим процессам. Для этого первое слагаемое каждого уравнения преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u} - \tilde{u} + \tilde{u} - u}{\tau} + u\tilde{u}'_x + v\tilde{u}'_y + w\tilde{u}'_z &= -\frac{1}{\rho} a'_x + \\ &+ (\mu\tilde{u}'_x)'_x + (\mu\tilde{u}'_y)'_y + (v\tilde{u}'_z)'_z + 2\Omega(v \sin \theta - w \cos \theta), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\bar{v} - \tilde{v} + \tilde{v} - v}{\tau} + u\tilde{v}'_x + v\tilde{v}'_y + w\tilde{v}'_z = -\frac{1}{\rho} a'_y + (\mu\tilde{v}'_x)'_x + (\mu\tilde{v}'_y)'_y + (v\tilde{v}'_z)'_z - 2\Omega u \sin \theta, \quad (9)$$

$$\frac{\bar{w} - \tilde{w} + \tilde{w} - w}{\tau} + u\tilde{w}'_x + v\tilde{w}'_y + w\tilde{w}'_z = -\frac{1}{\rho} a'_z +$$

$$+(\mu\tilde{w}_x)'_x + (\mu\tilde{w}_y)'_y + (v\tilde{w}_z)'_z + 2\Omega u \cos \theta. \quad (10)$$

Разобьем каждое уравнение системы (8-10) на две части следующим образом:

$$\frac{\tilde{u}-u}{\tau} + u\tilde{u}'_x + v\tilde{u}'_y + w\tilde{u}'_z = (\mu\tilde{u}'_x)'_x + (\mu\tilde{u}'_y)'_y + (v\tilde{u}'_z)'_z + 2\Omega(v\sin\theta - w\cos\theta), \quad (11)$$

$$\frac{\tilde{v}-v}{\tau} + u\tilde{v}'_x + v\tilde{v}'_y + w\tilde{v}'_z = (\mu\tilde{v}'_x)'_x + (\mu\tilde{v}'_y)'_y + (v\tilde{v}'_z)'_z - 2\Omega u \sin \theta, \quad (12)$$

$$\frac{\tilde{w}-w}{\tau} + u\tilde{w}'_x + v\tilde{w}'_y + w\tilde{w}'_z = (\mu\tilde{w}'_x)'_x + (\mu\tilde{w}'_y)'_y + (v\tilde{w}'_z)'_z + 2\Omega u \cos \theta, \quad (13)$$

$$\frac{\bar{u}-\tilde{u}}{\tau} = -\frac{1}{\rho} a'_x, \quad (14)$$

$$\frac{\bar{v}-\tilde{v}}{\tau} = -\frac{1}{\rho} a'_y, \quad (15)$$

$$\frac{\bar{w}-\tilde{w}}{\tau} = -\frac{1}{\rho} a'_z. \quad (16)$$

Продифференцируем уравнения (14-16) по переменным x,y,z соответственно:

$$\frac{\bar{u}'_x - \tilde{u}'_x}{\tau} = -\frac{1}{\rho} a''_{xx}, \quad (17)$$

$$\frac{\bar{v}'_y - \tilde{v}'_y}{\tau} = -\frac{1}{\rho} a''_{yy}, \quad (18)$$

$$\frac{\bar{w}'_z - \tilde{w}'_z}{\tau} = -\frac{1}{\rho} a''_{zz}. \quad (19)$$

сложим уравнения (17-19)

$$\frac{\bar{u}'_x - \tilde{u}'_x}{\tau} + \frac{\bar{v}'_y - \tilde{v}'_y}{\tau} + \frac{\bar{w}'_z - \tilde{w}'_z}{\tau} = -\frac{1}{\rho} a''_{xx} - \frac{1}{\rho} a''_{yy} - \frac{1}{\rho} a''_{zz} \quad (20)$$

подставим (4) в (20), в результате чего получим:

$$a''_{xx} + a''_{yy} + a''_{zz} = \frac{\rho}{\tau} (\tilde{u}'_x + \tilde{v}'_y + \tilde{w}'_z). \quad (21)$$

Уравнения (11-16), (21) и определяют метод поправки к давлению.

Для построения решения разностной схемы будем использовать равномерную сетку:

$$w_h = \{x_i = ih_x, y_j = jh_y, z_k = kh_z; i = \overline{1..N_x}, j = \overline{1..N_y}, k = \overline{1..N_z}; N_x h_x = l_x, N_y h_y = l_y, N_z h_z = l_z\}.$$

В системе уравнений (11-16), (21) вместо частных производных будем использовать их конечноразностные аналоги, полученные при помощи интерполяционного метода.

Первая задача представлена уравнением диффузии – конвекции, на основе которого вычисляется поле скорости на промежуточном временном шаге

$$\frac{\tilde{u} - u}{\tau} + u\tilde{u}_x + v\tilde{u}_y + w\tilde{u}_z = (\mu\tilde{u}_{\bar{x}})_x + (\mu\tilde{u}_{\bar{y}})_y + (v\tilde{u}_{\bar{z}})_z + 2\Omega(v \sin \theta - w \cos \theta), \quad (22)$$

$$\frac{\tilde{v} - v}{\tau} + u\tilde{v}_x + v\tilde{v}_y + w\tilde{v}_z = (\mu\tilde{v}_{\bar{x}})_x + (\mu\tilde{v}_{\bar{y}})_y + (v\tilde{v}_{\bar{z}})_z - 2\Omega u \sin \theta, \quad (23)$$

$$\frac{\tilde{w} - w}{\tau} + u\tilde{w}_x + v\tilde{w}_y + w\tilde{w}_z = (\mu\tilde{w}_{\bar{x}})_x + (\mu\tilde{w}_{\bar{y}})_y + (v\tilde{w}_{\bar{z}})_z + 2\Omega u \cos \theta. \quad (24)$$

Наиболее трудоемкой задачей является расчет давления, представленный уравнением Пуассона

$$a_{\bar{x}\bar{x}} + a_{\bar{y}\bar{y}} + a_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{\rho}{\tau} \left((\tilde{u})_x^0 + (\tilde{v})_y^0 + (\tilde{w})_z^0 \right). \quad (25)$$

По явной схеме в третьей задаче определяется поле скоростей на следующем шаге по времени

$$\frac{\bar{u} - \tilde{u}}{\tau} = -\frac{1}{\rho} a_x, \quad (26)$$

$$\frac{\bar{v} - \tilde{v}}{\tau} = -\frac{1}{\rho} a_y, \quad (27)$$

$$\frac{\bar{w} - \tilde{w}}{\tau} = -\frac{1}{\rho} a_z. \quad (28)$$

Таким образом, осуществляется переход на следующий временной слой. Условием окончания перехода между временными слоями является – установление значений поля скорости. Уравнения (22–25) решаются попеременно – треугольным методом скорейшего спуска [3]. При построении дискретной модели (22–28) использовались неявные разностные схемы. Главное достоинство данных схем – большой запас устойчивости. Данную дискретную модель удобно также использовать для расчета стационарных течений.

Второй подход основан на непрерывном уравнении Больцмана – интегродифференциальном уравнении, которое описывает эволюцию одночастичной функции распределения $f(\mathbf{x}, \xi, t)$ в пространстве импульса:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \mathbf{a} \cdot \nabla_{\xi} f = Q(f, f). \quad (29)$$

Интеграл столкновения

$$Q(f, f) = \int d^3 \xi_1 \int d\Omega \sigma(\Omega) |\xi - \xi_1| |f(\xi') f(\xi_1') - f(\xi) f(\xi_1)|, \quad (30)$$

где $\sigma(\Omega)$ – поперечное сечение столкновения двух частиц, которое преобразовывает скорости из $\{\xi, \xi_1\}$ (до столкновения) в $\{\xi', \xi_1'\}$ (после столкновения). Положение в физическом пространстве обозначено \mathbf{x} и скорость в пространстве импульса (или скорость) обозначена ξ . $f(\mathbf{x}, \xi, t) d^3 x d^3 \xi$ представляет вероятность

нахождения частицы в объеме d^3x вокруг \mathbf{x} и со скоростью между ξ и $\xi + d\xi$, \mathbf{a} – сила на единицу массы, действующая на частицу.

При численном решении уравнения Больцмана используют Lattice Boltzmann метод (ЛВМ), использующий минимальные дискретные кинетические модели для решения задач в механике жидкости и других областях физики [5-8]. Вместо прямого решения уравнений Навье – Стокса, ЛВМ включает в себя решение решеточного уравнения Больцмана (LBE), которое описывает развитие распределения ансамбля частиц на решетке, коллективное поведение которых асимптотически представляет собой динамику течения жидкости. Как показано при решении LBE в пределе получаются течения жидкости, представляемые слабо сжимаемыми уравнениями Навье – Стокса.

Эффекты столкновения частиц при решении LBE вообще представляют собой релаксационные модели. Одна из наиболее общих – это одновременная релаксационная модель (SRT), также называемая БГК (Бхатнагар, Гросс и Крук) модель [12].

Более общая форма уравнения LB, иногда называемая методом моментов или обобщенный метод LB уравнения (GLBE), основанным на использовании множества времен релаксации (MRT) для представления оператора столкновений. Это актуально улучшенная форма квазилинейной релаксационной версии уравнения LB с матрицей столкновений [10,11,14], применяется в данной работе к водоему «Etang de Berre». Общий вид MRT моделей в двумерном и трехмерном пространствах можно найти в работах Лэлманда и Луо [13] и д'Юмиерса и др. [16].

Обобщенное Lattice Boltzmann уравнение (GLBE) с внешними силами состоит из эволюционного уравнения для функции распределения ансамбля частиц. То, как они двигаются и сталкиваются на решетке, смотрите [16, 17]:

$$f_{\alpha}(\vec{x} + \vec{e}_{\alpha}\delta_t, t + \delta_t) - f_{\alpha}(\vec{x}, t) = -\sum_{\beta} \Lambda_{\alpha\beta} (f_{\beta} - f_{\beta}^{eq}) + \sum_{\beta} \left(I_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \Lambda_{\alpha\beta} \right) S_{\beta} \delta_t. \quad (31)$$

Здесь левая часть уравнения (31) соответствует изменению функции распределения за интервал δ_t , так ансамбль частиц перемещается из положения \vec{x} в его соседнее положение $\vec{x} + \vec{e}_{\alpha}\delta_t$ со скоростью \vec{e}_{α} вдоль характерного направления α . Мы рассматриваем трехмерное 19-скоростное множество скоростей частиц (D3Q19), показанное на рис. 1, имеющее следующий вид

$$\vec{e}_{\alpha} = \begin{cases} (0,0,0) & \alpha = 0 \\ (\pm c_x, 0, 0), (0, \pm c_y, 0), (0, 0, \pm c_z) & \alpha = 1, \dots, 6 \\ (\pm c_x, \pm c_y, 0), (\pm c_x, 0, \pm c_z), (0, \pm c_y, \pm c_z) & \alpha = 7, \dots, 18 \end{cases} \quad (32)$$

Величины скоростей c_x, c_y, c_z компонент скорости частицы \vec{e}_{α} определяются так $c_x = \delta_x / \delta_t, c_y = \delta_y / \delta_t$ и $c_z = \delta_z / \delta_t$, где $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ – сеточные шаги по пространству, а δ_t – шаг по времени.

Первое слагаемое в правой части уравнения (31) представляет собой суммарный эффект столкновения частиц в эволюции функции распределения f_{α} . GLBE имеет общий вид матрицы столкновений с множеством времен релаксации, которые соответствуют основным физическим параметрам, таким как плотность, им-

пульс и тензор напряжений. Они в свою очередь представляют собой различные кинетические моменты функции распределения.

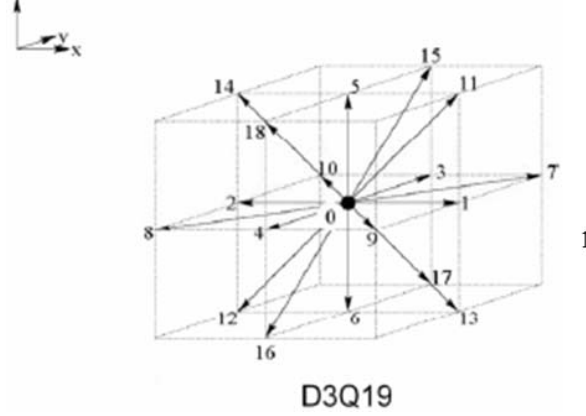


Рис. 1. Набор скоростей для обычно используемой трехмерной модели D3Q19

Второй член в правой части уравнения (31) вносит изменения в развитие функции распределения обусловленное полями внешних сил \vec{F} , через источник $S_\alpha \cdot I_{\alpha\beta}$ – элементы единичной матрицы. Источник может быть записан следующим образом [13,11]:

$$S_\alpha = \frac{(e_{\alpha j} - u_j) F_j}{\rho c_s^2} f_\alpha^{eq,M}(\rho, \vec{u}), \quad (33)$$

где $f_\alpha^{eq,M}(\rho, \vec{u})$ – локальное Максвелловское распределение

$$f_\alpha^{eq,M}(\rho, \vec{u}) = \omega_\alpha \rho \left\{ 1 + \frac{\vec{e}_\alpha \cdot \vec{u}}{c_s^2} + \frac{(\vec{e}_\alpha \cdot \vec{u})^2}{2c_s^4} - \frac{(\vec{u} \cdot \vec{u})}{2c_s^2} \right\}, \omega_\alpha = \begin{cases} 1/3 & \alpha = 0 \\ 1/18 & \alpha = 1, \dots, 6 \\ 1/36 & \alpha = 7, \dots, 18 \end{cases} \quad (34)$$

и $c_s = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} / 3$ – скорость звука модели, $F_j = \{F_x, F_y, F_z\}$ – декартовы компоненты внешней силы.

Локальная макроскопическая плотность и скорость вычисляются следующим образом:

$$\rho = \sum_\alpha f_\alpha, \quad (35)$$

$$\vec{j} \equiv \rho \vec{u} = \sum_\alpha f_\alpha \vec{e}_\alpha + \frac{1}{2} \vec{F} \delta_t, \quad (36)$$

а давление p может быть найдено

$$p = \rho c_s^2. \quad (37)$$

Природа кинетического уравнения (31), и в особенности матрицы столкновения $\Lambda_{\alpha\beta}$, станет более наглядна, когда ее определим в терминах множества линейно независимых моментов $\hat{\mathbf{f}}$, вместо функции распределения $\mathbf{f} = [f_0, f_1, \dots, f_{18}]^T$,

т.е. через $\hat{\mathbf{f}} = [\hat{f}_0, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_{18}]^T$, которое получается через матрицу преобразования $T: \hat{\mathbf{f}} = T\mathbf{f}$. Элементы матрицы T даются в работе [16]. Каждый ряд матрицы ортогонален любому другому ряду. Эта матрица такова, что матрица столкновений Λ становится диагональной матрицей $\hat{\Lambda}$, после преобразования $\hat{\Lambda} = T\Lambda T^{-1}$.

Матрица столкновений в пространстве моментов может быть записана в следующем виде:

$$\hat{\Lambda} = \text{diag}(s_0, s_1, s_2, \dots, s_{18}), \quad (38)$$

где $s_0, s_1, s_2, \dots, s_{18}$ релаксационные временные коэффициенты соответствующих моментов.

Когда есть поле внешних сил $\mathbf{S} = [S_0, S_1, S_2, \dots, S_{18}]^T$, необходимо внести соответствующий член в пространство моментов $\hat{\mathbf{S}}$, то есть $\hat{\mathbf{S}} = T\mathbf{S}$, где $\hat{\mathbf{S}} = [\hat{S}_0, \hat{S}_1, \hat{S}_2, \dots, \hat{S}_{18}]^T$.

Свойства переноса текущей жидкости, такие как объемная вязкость и кинематическая вязкость могут быть отнесены к соответствующим временам релаксации посредством анализа Чепмена-Энскога GLBE или анализа устойчивости по Нейману линейризованной его версии [13] следующим образом:

$$\zeta = \frac{2}{9} \left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{2} \right) \delta_t, \quad (39)$$

$$\nu = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{s_\beta} - \frac{1}{2} \right) \delta_t, \beta = 9, 11, 13, 14, 15. \quad (40)$$

Из уравнения (39) $s_9 = s_{11} = s_{13} = s_{14} = s_{15}$ сохраняет изотропность тензора напряжений, а s_1 определяет величину объемной вязкости. Свобода выбора релаксационных параметров не имеет гидродинамического значения, но может повысить вычислительную устойчивость при моделировании задач с большими числами Рейнольдса. Основываясь на линейном анализе устойчивости [13], берем следующие значения для других релаксационных параметров [16]: $s_1 = 1.19, s_2 = s_{10} = s_{12} = 1.4, s_4 = s_6 = s_8 = 1.2$ и $s_{16} = s_{17} = s_{18} = 1.98$. Можно отметить, что все релаксационные параметры имеют следующие границы $0 < s_\alpha < 2$.

Вычислительный эксперимент для лагуны «Etang de Berge»

В данной работе рассматривается решение гидродинамической задачи, а именно расчет параметров течения водной среды в определенные моменты времени в лагуне «Etang de Berge» с заданными внешними силами, начальными и граничными условиями. Таким образом, в трехмерной области определения задачи $G = \{(x, y, z) : H(x, y) \leq z \leq 0\}$ – мелководном водоеме «Etang de Berge» (рис. 2.3), требуется найти компоненты скорости течения $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t)$, $v = v(x, y, z, t)$, $w = w(x, y, z, t)$, давление водной среды $P = P(x, y, z, t)$, где

$H(x, y)$ известная функция рельефа дна. Внешними силами в данной модели являются: сила ветра, сила трения о дно и сила Кориолиса, вычисляемые по формулам (42), (46) и (49).



Рис. 2. Снимок «Etang de Berre»



Рис. 3. Область решения задачи с г.у

В начальный момент времени внутри области G жидкость покоится $V = 0$, что соответствует для функции распределения $f_\alpha = \omega_\alpha \rho$. Изменение уровня свободной поверхности в модели не учитывается, считается, что она всегда горизонтальна.

Граничные условия на свободной поверхности определяем таким образом:

$$w = 0, \nu \frac{\partial u}{\partial z} = F_{sx}(x, y, t), \nu \frac{\partial v}{\partial z} = F_{sy}(x, y, t), \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (41)$$

где F_{sx}, F_{sy} – компоненты силы трения ветра о морскую поверхность

$$\mathbf{F}_s = F_{sx} \mathbf{i} + F_{sy} \mathbf{j} = \theta \rho_a |\mathbf{w}| \mathbf{w}, \quad (42)$$

где $\theta = 8.8 \cdot 10^{-3}$ – коэффициент трения о морскую поверхность, $\rho_a = 1,25 \text{ (кг / м}^3\text{)}$ – плотность атмосферы, w – скорость ветра (закон Ван-Дорна). Этим условиям для скорости (41) соответствует граничное условие для функции распределения частиц:

$$f_\alpha(x, y, 0, t) = f_\alpha(x, y, -\delta_z, t) + \delta_z \omega_\alpha \rho \frac{(\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{F}_s)}{\nu c_s^2}. \quad (43)$$

На дне при $z = H(x, y)$ и на твердых частях границы для скорости применяются условия прилипания $u = v = w = 0$ и для давление условие $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$, которым соответствуют граничные условия отскока (Bounce-Back BC) для функции распределения:

$$f_{\bar{\alpha}} = f_\alpha. \quad (44)$$

Также для дна могут использоваться такие условия:

$$v \frac{\partial u}{\partial z} = -F_{bx}(x, y, t), v \frac{\partial v}{\partial z} = -F_{by}(x, y, t), v \frac{\partial w}{\partial z} = -F_{bz}(x, y, t), \quad (45)$$

где F_{bx}, F_{by}, F_{bz} – компоненты силы трения воды о поверхность дна

$$\mathbf{F}_b = F_{bx} \mathbf{i} + F_{by} \mathbf{j} + F_{bz} \mathbf{k} = \theta_1 \rho_0 |\mathbf{w}| \mathbf{w}, \quad (46)$$

где $\theta_1 = 1.3 \cdot 10^{-6}$ – коэффициент трения о дно, ρ_0 – плотность воды, w – скорость течения. Соответствующее граничное условие для функции распределения частиц:

$$f_\alpha(x, y, H(x, y), t) = f_\alpha(x, y, H(x, y) + \delta_z, t) + \delta_z \omega_\alpha \rho \frac{(\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{F}_b)}{v c_s^2}. \quad (47)$$

На жидких частях границ и в источниках (в устьях рек) $\vec{u} = \vec{u}_{const}$ задаются известные потоки жидкости. Для данного типа граничных условий для компонент скорости на границе, часто используют ВВ ВС [8,9] для частичной функции распределения f_α , которые на входе имеют вид (рис. 4)

$$f_{\bar{\alpha}} = f_\alpha + 2\omega_\alpha \rho \frac{(\mathbf{e}_{\bar{\alpha}} \cdot \mathbf{u})}{c_s^2}, \quad (48)$$

где \mathbf{e}_α и $\mathbf{e}_{\bar{\alpha}}$ обозначают направления друг напротив друга: $\mathbf{e}_\alpha = -\mathbf{e}_{\bar{\alpha}}$.

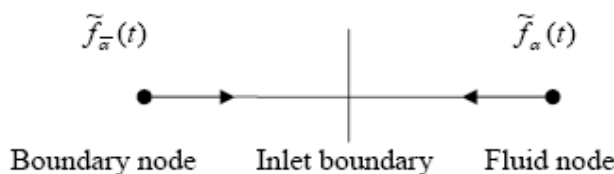


Рис. 4. Расположение границы на входе

На рис. 3. обозначены окрестности характерных граничных условий:

1-2) $\vec{u}_n = \vec{u}(t)$, ($|\vec{u}_n| \approx 1 \text{ m/s}$) – в общем случае функция от времени (направление скорости может еще зависит от того прилив или отлив в данный период времени для 1;

3-4) $\vec{u}_n = \vec{u}_0$, устья рек l'Arc и la Touloubre, где задаются известные потоки жидкости;

5-8) $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = 0$, где \mathbf{n} – нормаль к боковой стенке «Etang de Berge».

На движущуюся морскую среду все время действует сила Кориолиса, вычисляемая следующим образом:

$$\vec{F}_{cor} = 2\rho [\vec{\Omega} \times \vec{u}], \quad (49)$$

где $\vec{\Omega}$ – вектор угловой скорости вращения земли.

Численные результаты моделирования с помощью Lattice Boltzmann метода представлены на рис. 5, для следующего набора параметров: $Ma = 0,002$, $Re = 10$, западный ветер (5 м/с). Аналогичные результаты для данного водоема при таком же ветре, рассчитанные методом поправки к давлению, проиллюстрированы на рис. 5.

Для сравнения программой Mars 3D [18] получены результаты, одна из реализаций которых изображена на рис. 5. Для северо-западного ветра (около 5 м/с) с учетом эффекта приливов-отливов в канале Caronte при прочих равных граничных условиях, изображенных на рис. 3.

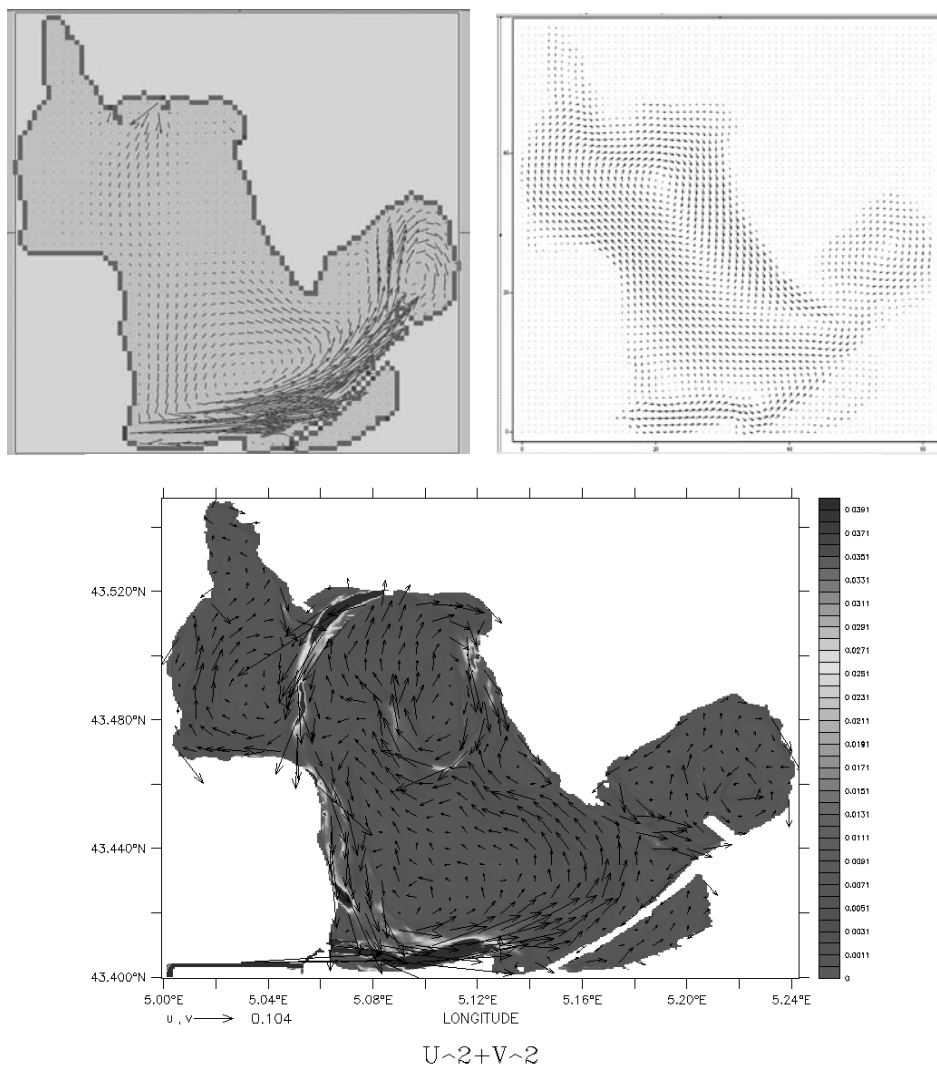


Рис. 5. Баротропные течения
(Mars 3D внизу, LBM слева, метод поправки к давлению справа)

Параметризация коэффициента турбулентного обмена в мелководных водоемах играет важную роль в гидродинамике жидкости, и главная сложность состоит в определении подхода, дающего лучшее соответствие между результатами численного моделирования и экспериментальных измерений.

Для параметризации коэффициента вертикального турбулентного обмена была выбрана прямая численная модель Белоцерковского [4]. Она показала себя с наилучшей стороны в вычислениях гидродинамики в мелких водоемах.

$$K = (c\Delta z)^2 \left[\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Ниже на рис. 6 показаны распределения коэффициента вертикального турбулентного обмена неоднородного по глубине, в численном моделировании, в сравнении с данными экспедиционных исследований в лагуне Etang de Berre (Франция).

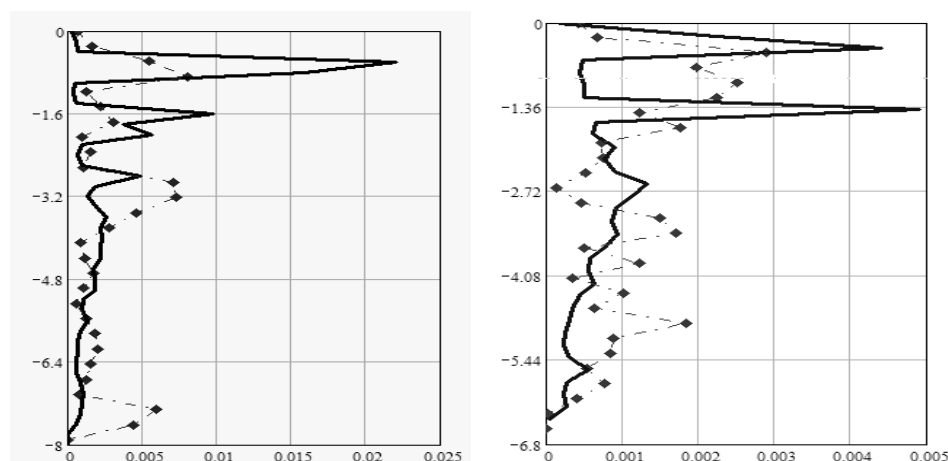


Рис. 6. Коэффициент вертикального турбулентного обмена на различных уровнях глубины (m^2/s), полученные численно (подход Белоцерковского – непрерывная линия) в сравнении с данными представленных исследований (пунктирная линия)

Анализ полученных результатов показывает, что метод, предложенный Белоцерковским, дает результаты, согласующиеся с физическими картинками для мелких водоемов.

В заключение можно отметить, что каждый из рассмотренных подходов в вычислительной гидродинамике может быть использован в расчетах полей течений в водоемах. В зависимости от того, какого качества и как быстро нам нужно получить картину (или узнать характер) течения в заданной области, используется тот или иной метод. Как показала практика, для быстрой оценки поведения водной среды лучше использовать Lattice Boltzmann метод, так как он использует явные разностные схемы и обладает меньшими вычислительными затратами. Однако более точным является классический метод поправки к давлению. Совместное использование этих двух отличных по постановке, методов может служить хорошей проверкой на правильность полученных с их помощью результатов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Марчук Г.И., Саркисян А.С. Математическое моделирование циркуляции океана. – М.: Наука, 1988. – 304 с.
2. Роуч П. Вычислительная гидродинамика: Пер с англ. – М.: Мир, 1980. – 616 с.
3. Коновалов А.Н. Теория попеременно треугольного метода. Сибирский математический журнал, 2002. 43:3. – 552-572 с.
4. Белоцерковский А.Н., Опарин А.М., Четкин В.М. Турбулентность. Новые подходы. – М.: Наука, 2002.
5. S. Chen and G. Doolen, Ann. Rev. Fluid Mech. 8, 2527 (1998).
6. S. Succi. *The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond* (Clarendon Press, Oxford, 2001).

7. S. Succi, I. Karlin, and H. Chen, *Rev. Mod. Phys.* 74, 1203 (2002).
8. D. Yu, R. Mei, L.-S. Luo, and W. Shyy, *Prog. Aero. Sci.* 39, 329 (2003).
9. G. McNamara and G. Zanetti, *Phys. Rev. Lett.* 61, 2332 (1988).
10. F. Higuera and J. Jimenez, *Europhys. Lett.* 9, 663 (1989).
11. F. Higuera, S. Succi, and R. Benzi, *Europhys. Lett.* 9, 345 (1989).
12. P. Bhatnagar, E. Gross, and M. Krook, *Phys. Rev.* 94, 511 (1954).
13. P. Lallemand and L.-S. Luo, *Phys. Rev. E* 61, 6546 (2000).
14. R. Benzi, S. Succi, and M. Vergassola, *Phys. Rept.* 222, 145 (1992).
15. P. Resibois and M. D. Leener, *Classical Kinetic Theory of Fluids* (John Wiley and Sons, New York, 1977).
16. D. d'Humieres, I. Ginzburg, M. Krafczyk, P. Lallemand, and L.-S. Luo, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* 360, 437 (2002).
17. K.N. Premnath and J. Abraham, *J. Comput. Phys.* 224, 539 (2007).
18. User manual Mars 3D v.7.34, IFREMER, 2007.

Алексеевко Елена Викторовна

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: lena.alekseenko@gmail.com.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 8(8634)371-606.

Кафедра высшей математики; аспирантка.

Alekseenko Elena Viktorovna

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: lena.alekseenko@gmail.com.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: 8(8634)371-606.

The Department of Higher Mathematics; post-graduate student.

Сидоренко Борис Владимирович

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: sidorenkov@mail.ru.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 8(8634)371-606.

Кафедра высшей математики; аспирант и ассистент.

Sidorenko Boris Vladimirovich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: sidorenkov@mail.ru.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: 8(8634)371-606.

The Department of Higher Mathematics; post-graduate student and assistant.

Колгунова Олеся Владимировна

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: lena.alekseenko@gmail.com.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 8(8634)371-606.

Кафедра высшей математики; аспирантка.

Kolgunova Olesya Vladimirovna

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: lena.alekseenko@gmail.com.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: 8(8634)371-606.

The Department of Higher Mathematics; post-graduate student.

Чистяков Александр Евгеньевич

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: cheese_05@mail.ru.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 8(8634)371-606.

Кафедра высшей математики; аспирант и ассистент.

Chistyakov Alexander Evgenievich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: cheese_05@mail.ru.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: 8(8634)371-606.

The Department of Higher Mathematics; post-graduate student and assistant.

УДК 519.8:532

Б.В. Сидоренко

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИКИ МЕЛКОВОДНЫХ ВОДОЕМОВ
НА ОСНОВЕ SRT LATTICE BOLTZMANN МЕТОДА**

В данной работе рассматриваются SRT Lattice Boltzmann модели в вычислительной гидродинамике. С их помощью проводятся численные эксперименты для реальных водоемов. При численном моделировании была задействована D3Q19 модель, которая была модифицирована для некубических сеток, при наличии преобладания шага по одному пространственному направлению. SRT-модели показали свою экономичность вычислений, легкость в использовании при численных расчетах.

Решеточное уравнение Больцмана; решеточный метод Больцмана; одиночная релаксационная модель; многовременная релаксационная модель; граничные условия отскока.

B.V. Sidorenko

**MODELING OF FLUID DYNAMICS FOR SHALLOW WATER BASINS BASED
ON SRT LATTICE BOLTZMANN METHOD**

In the work SRT Lattice Boltzmann model in CFD are considered. With their help numerical experiments for real basins are made. At numerical modeling used D3Q19 model which has been modified for not cubic grids, that is with prevalence of one of step in space. SRT models have shown high speed of calculations and simplicity of using in numerical computations.

LBE; LBM; LB-BGK; Lattice Boltzmann; MRT; Bounce Back BC.

В настоящее время все больше внимания в вычислительной гидродинамике привлекают методы, основанные на Lattice Boltzmann(LB) уравнении, которые были