УДК 519.63:532.55

А. В. Никитина

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЧИСЛЕННОСТИ РЫБНЫХ ПОПУЛЯЦИЙ В АКВАТОРИИ ТАГАНРОГСКОГО ЗАЛИВА

Предложена математическая модель динамики промысловых рыб в Таганрогском заливе. Для численного решения задачи использована неявная конечноразностная схема второго порядка точности. Устойчивость полученного решения позволила проводить вычислительные эксперименты в широком диапазоне значений управляющих параметров при различных начальных и граничных условиях.

Математическая модель; динамика; промысловые рыбы; Таганрогский залив; алгоритм.

A.V. Nikitina

MODELING DYNAMIC OF FISH POPULATIONS IN TAGANROG BAY BASIN

The mathematical model of food fish dynamic in Taganrog bay is derived. The numerical solution of the model is obtained by using the second order accuracy (in space and time), centered, implicit finite difference scheme. The numerical solution is steady; it allows carrying out experiments with a wide range of initial and boundary conditions and values of managing parameters.

Mathematical model; dynamic; food fish; Taganrog bay; algorithm.

Цель работы заключалась в построении вычислительно – устойчивых алгоритмов реализации моделей динамики численности популяций промысловых рыб, пригодных для реальной области сложной формы - Таганрогского залива.

Одной из важных проблем, связанных с экологией, является прогнозирование запасов промысловых гидробионтов в целях обеспечения оптимального изъятия, сохранения и воспроизводства морских биоресурсов.

Конечная цель математического исследования биогеоценозов заключается в создании количественной теории биологической продуктивности экосистем как основы управления их биологическими ресурсами для получения продуктов, полезных для человека.

Любая природная экосистема уникальна, и недопустимо воздействовать на нее без оценки риска вызвать в ней необратимые изменения.

Биология, в частности ихтиология, ставит перед математикой задачу описания динамики весьма сложных, заведомо нелинейных с изменяющейся структурой систем [1].

При моделировании динамики рыбных популяций в Таганрогском заливе учитывались следующие факторы (рис. 1):

- запас, структура, качество стада, пространственное распределение (численности, веса, плотности);
- гидрометеорологические факторы, корм, хищники, промысел и т.д.;
- воспроизводство, питание, рост, миграции и т.д.

В качестве объектов моделирования выбраны рыбы – тюлька и судак. Такой выбор обусловлен их большим промысловым значением.

Модель строится в предположении, что на численность популяции судака и тюльки влияют сезонные колебания температуры, солености, промысловый вылов, движение водной среды и протекающие в ней диффузионные процессы. В модели также учитывается взаимодействие самих популяций. В связи с тем, что появившиеся на свет мальки судака сначала питаются зоопланктоном, но уже через несколько недель начинают хищничать, поедая еще меньшее по размерам потомство других рыб, в модели не учитывается выедание судаком фито- и зоопланктона. Значения солености, температуры, вылова, поле скоростей водного потока являются входными данными.

Естественную смертность тюльки и судака будем считать несущественной. Молодь тюльки погибает при съедании ее судаком. При отсутствии питания родившиеся особи судака и тюльки обречены на смерть.

Поля течений оказывают влияние, прежде всего на рыбные популяции, обитающие стайкой (в нашей модели на популяцию тюльки), способствуя их смещению и перемешиванию в водной среде.

Промысловый вылов имеет огромное влияние на динамику численности популяции судака и тюльки в Таганрогском заливе. Слишком большое и нерациональное изъятие может привести к сильному изменению численности популяций и поставить под угрозу воспроизводство и сохранение данных видов. Например, если будет интенсивно вылавливаться судак, его численность будет уменьшаться, а концентрация тюльки будет увеличиваться, так как тюлька служит кормовой базой судака. В свою очередь, увеличение численности тюльки может привести к уменьшению концентрации других видов рыб, ее пищевых конкурентов. Если же будет идти интенсивный вылов тюльки, то концентрация ее будет уменьшаться, следовательно, численность популяции судака будет падать, так как он будет ограничен в еде [2].

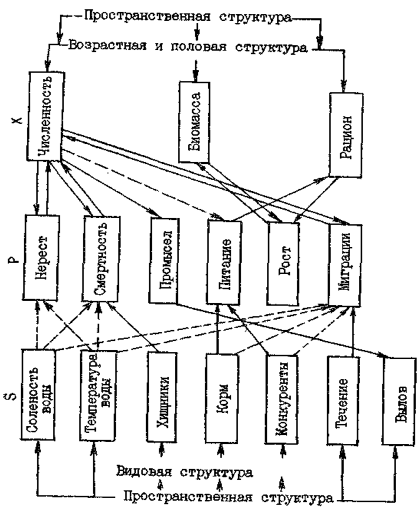

Рис.1. Общая схема математической модели рыбной популяции: X – переменные состояния; S – внешние факторы; P – операторы жизненного цикла

Рассмотрим систему уравнений, описывающую процесс динамики численности популяций промысловых рыб в некоторой трехмерной области G, представляющей собой замкнутый бассейн, ограниченный невозмущенной поверхностью водоема Σ_0, дном $\Sigma_H = \Sigma_H(x,y)$ и цилиндрической боковой поверхностью σ для временного интервала $0 < t \le T$:

$$\frac{\partial X}{\partial t} + div(\bar{u} \cdot X) = \mu_X \Delta X + \frac{\partial}{\partial z}\left(\upsilon_X \frac{\partial X}{\partial z}\right) + (\alpha_X - k_X Z)X - \varepsilon_X X, \tag{1}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + div(\bar{u} \cdot Z) = \mu_Z \Delta Z + \frac{\partial}{\partial z}\left(\upsilon_Z \frac{\partial Z}{\partial z}\right) + (\alpha_Z X - k_Z T)Z - \varepsilon_Z Z, \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + div(\bar{u} \cdot T) = \mu_T \Delta T + \frac{\partial}{\partial z}\left(\upsilon_T \frac{\partial T}{\partial z}\right) + (\alpha_T Z - k_T S)T - \delta_T T, \tag{3}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \mu_S \Delta S + \frac{\partial}{\partial z}\left(\upsilon_S \frac{\partial S}{\partial z}\right) + \alpha_S TS - \delta_S S. \tag{4}$$

В системе (1) – (4) приняты обозначения:

X, Z, T, S – концентрации фитопланктона, зоопланктона, тюльки и судака соответственно; $\bar{u} = (u, v, w)$ – поле скоростей водного потока; μ_X, μ_Z, μ_T, μ_S, υ_X, υ_Z, υ_T, υ_S – коэффициенты диффузии X, Z, T, S в горизонтальном и вертикальном направлениях; $\alpha_{X,Z,T,S}$ – скорости роста X, Z, T, S соответственно; $\varepsilon_X, \varepsilon_Z$ – коэффициенты элиминации X, Z соответственно; $k_{X,Z,T}$ – коэффициенты убыли X, Z, T за счет выедания; δ_T, δ_S – коэффициенты вылова тюльки и судака соответственно.

$$\alpha_S = f\left(\tilde{T}, C\right) = \tilde{\Psi}\left(\tilde{T}\right) \cdot Y(C), \qquad Y(C) = e^{-\left[\frac{(C - C_{opt})}{\sigma_C}\right]^2},$$

где σ_c – стандартное отклонение, характеризующее ширину интервала толерантности; C и $\tilde{T}$ – соленость и температура воды соответственно.

$$\alpha_T = g\left(\tilde{T}\right) \cdot \tilde{\psi}\left(\tilde{T}\right),\ g\left(\tilde{T}\right) = e^{-\left[\frac{\tilde{T} - \tilde{T}_{opt1}}{\sigma\tilde{T}}\right]^2},\ \psi\left(\tilde{T}\right) = e^{-\left[\frac{\tilde{T} - \tilde{T}_{opt2}}{\sigma\tilde{T}}\right]^2},$$

где $\tilde{T}_{opt1}$ и $\tilde{T}_{opt2}$ – оптимальные значения температуры для роста численности популяций тюльки и судака, соответственно, $\sigma\tilde{T}$ – стандартное отклонение температуры, характеризующее величину интервала толерантности.

К системе (1) – (4) необходимо добавить начальные условия:

$$X(x,y,z,0) = X_0(x,y,z),\ Z(x,y,z,0) = Z_0(x,y,z), \tag{5}$$

$$T(x,y,z,0) = T_0(x,y,z),\ S(x,y,z,0) = S_0(x,y,z),\ x, y, z \in \overline{G},\ t = 0.$$

Пусть n – вектор внешней нормали к поверхности $\sum = \sum_0 \cup \sum_H \cup \sigma$, u_n – нормальная по отношению к $\sum$ составляющая вектора скорости водного потока.

Зададим граничные условия:

$$X = Z = S = T = 0,\ на\ \sigma,\ если\ u_n < 0;$$

$$\frac{\partial X}{\partial n} = 0,\ \frac{\partial Z}{\partial n} = 0,\ \frac{\partial S}{\partial n} = 0,\ \frac{\partial T}{\partial n} = 0,\ на\ \sigma,\ если\ u_n \ge 0;$$

$$\frac{\partial X}{\partial z}=0,\ \frac{\partial Z}{\partial z}=0,\frac{\partial T}{\partial z}=0,\ \frac{\partial S}{\partial z}=0,\ на\ \Sigma_0\ ;$$

$$\frac{\partial X}{\partial z}=-\gamma X,\ \frac{\partial Z}{\partial z}=0,\frac{\partial T}{\partial z}=0,\ \frac{\partial S}{\partial z}=0\ на\ \Sigma_H\ , \qquad (6)$$

где γ – неотрицательное постоянное, учитывающее опускание водорослей на дно и их затопление.

При моделировании динамики промысловых рыб в Таганрогском заливе начальные условия задавались следующим образом (рис. 2):

$X(x,y,0) = X_0(x,y)$, $Z(x,y,0) = Z_0(x,y)$, $T(x,y,0) = T_0(x,y)$, $S(x,y,0) = S_0(x,y)$, (7)

где $(x,y)\in \bar{\sigma}$, $X_0(x,y)$, $Z_0(x,y)$, $T_0(x,y)$ и $S_0(x,y)$ – известные функции.

При задании граничных условий (8) учитывался водообмен Таганрогского залива с Азовским морем: $X\Big|_{\sigma_1} = 0$, $Z\Big|_{\sigma_1} = 0$, $T\Big|_{\sigma_1} = 0$, $S\Big|_{\sigma_1} = 0$ – концентрация X, Z, T, S на берегу; $T\big|_{\sigma_2}=\varphi(x,y)$, $S\big|_{\sigma_2}=\psi(x,y)$ – концентрации T, S в месте соединения Таганрогского залива с Азовским морем, где $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ – известные функции.

Рис.2. Схема Таганрогского залива

Пространственно-неоднородная, нелинейная модель динамики численности популяций судака и тюльки (1) – (8) была численно реализована. Проведено исследование дискретной модели динамики промысловых рыб в Таганрогском заливе. Определены необходимые и достаточные условия устойчивости схемы, реализующей построенную модель.

Подобраны оптимальные значения параметров, входящих в модель. Исследовано влияние солености и температуры на концентрацию судака и тюльки. Для популяции судака оптимальной является температура $\tilde{T}_0=20^0C$, для популяции тюльки – $\tilde{T}_1=17^0C$. Установлено, что для популяции судака лучшим значением солености является $C_0 = 2^0/_{00}$.

Численные эксперименты показали, что зависимость популяции от внешних факторов характеризуется оптимальным значением и пределами толерантности. Существование и успешная жизнедеятельность популяции тюльки и судака возможны внутри интервала толерантности; причем по мере удаления от оптимума растет «подавляющее» влияние рассматриваемого фактора.

Данная модель может использоваться рыбными хозяйствами и научно-исследовательскими институтами в целях прогнозирования запасов, оптимального изъятия, сохранения и воспроизводства рыбных популяций. А также с помощью построенной модели можно провести оценку, анализ и прогнозирование экологического состояния водоема – Таганрогского залива.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Латун В.С.* Устойчивость системы фитопланктон-зоопланктон-рыба // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа. – Севастополь, 2004. – Вып. 10. – С.211-218.
2. *Tyutyunov Yu., Titova L., Arditi R.* Predator interference emerging from trophotaxis // Ecological Complexity, 2008, 5: 48-58.

Никитина Алла Валерьевна
Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге
E-mail: nikitina.vm@gmail.com
347928, Россия, Таганрог, ГСП 17А, пер. Некрасовский, 44
Тел.: 8(8634) 37-16-06

Nikitina Alla Valerievna
Taganrog Institute of Technology - Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”
E-mail: nikitina.vm@gmail.com
44, Nekrasovsky, Taganrog, Russia, 347928, Ph.: +7(8634)37-16-06

УДК 519.63:532.55

А. В. Никитина

МОДЕЛИ ТАКСИСА, СТАБИЛИЗИРУЮЩИЕ ЭКОЛОГИЧЕСКУЮ СИСТЕМУ ТАГАНРОГСКОГО ЗАЛИВА

Предложена математическая модель, учитывающая таксис фитопланктона. Для численного решения задачи использована неявная конечноразностная схема второго порядка точности. Устойчивость полученного решения позволила проводить вычислительные эксперименты в широком диапазоне значений управляющих параметров при различных начальных и граничных условиях. Результаты показали, что таксис фитопланктона влияет на функционирование системы в экологических условиях Таганрогского залива.

Математическая модель; таксис; динамика; Таганрогский залив; алгоритм.

A. V. Nikitina

TAXIS MODELS STABILASING ECOLOGICAL SISTEM OF TAGANROG BAY

The mathematical model included the phytoplankton taxis is derived. The numerical solution of the model is obtained by using the second order accuracy (in space and time), centered, implicit finite difference scheme. The numerical solution is steady; it allows carrying out experiments with a wide range of initial and boundary conditions