E-mail: antonina_tsure@mail.ru
347928, Россия, г. Таганрог, ГСП 17А, пер. Некрасовский, 44
Тел.: 8 (8634) 37-17-95

Гривцов Владимир Владиславович
E-mail: gvv@tsure.ru

Leonova Antonina Valerievna
Taganrog Institute of Technology - Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”
E-mail: antonina_tsure@mail.ru
44, Nekrasovsky, GSP-17a, Taganrog, 347928, Russia, Ph.: +7 (8634) 37-17-95

Grivcov Vladimir Vladislavovich
E-mail: gvv@tsure.ru

УДК 517.958:550.3 + 27.41.77

А. С. Черепанцев

ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЯ В МОДЕЛИ БЛОКОВ С УПРУГИМИ СВЯЗЯМИ[1]

В работе рассмотрена механическая модель блоковой упругосвязанной среды. Получено достаточное условие сходимости решения системы нелинейных уравнений, определяющих эволюцию модели. Проведена оценка скорости сходимости итерационного процесса.
Модель прерывистого скольжения; самоорганизованное критическое состояние; достаточное условие локальной сходимости.

A. C. Cherepantsev

THE ESTIMATION OF SOLUTION CONVERGENCE SPEED IN BLOCK MODEL WITH ELASTIC INTERACTION

The mechanical model of elastical block media is explored. The sufficient condition of solution convergence of nonline system of equations for model evolution is obtained. The estimation of convergence speed in iteration process is carried out.
Stick-slip model; self-organized criticality; sufficient condition of convergence.

Одна из моделей для описания закономерностей в пространственной, временной и энергетической областях тектонического процесса в дискретной среде– модель прерывистого скольжения [1] системы блоков с упругими связями вызвала огромный интерес, став мощным инструментом в понимании динамики геофизической среды и сейсмичности. Одной из наиболее значимых в семействе моделей на основе модели прерывистого скольжения явилась клеточная двумерная модель

[1] Работа выполнена при поддержке гранта НШ-799.2008.5, гранта РНПВШ 2.1.1./6584

Олами-Федера-Кристиансена (OFC модель)[2], к которой при определенных условиях сводится модель прерывистого скольжения в двумерном случае. Оказалось, что эволюция OFC модели во времени демонстрирует сходимость к устойчивому критическому состоянию, являющимся самоорганизованным, в том смысле, что отсутствует управляющий параметр как, например, температура в фазовых переходах второго рода. В данном состоянии распределения величины сбросов энергии в диссипативной модели носят степенной характер, аналогичный, наблюдаемым распределениям сейсмичности по магнитудам [3].

Активное развитие вычислительных возможностей позволяет моделировать поведение системы взаимодействующих блоков непосредственно на уровне механической модели. Рассмотрим условия реализуемости алгоритма расчета в модели упруго взаимодействующих блоков.

Механическая модель (stick-slip model) [1] изображена на рис. 1. Она представляет собой двумерную квадратную решетку, состоящую из одинаковых блоков. Каждый из блоков связан с соседними четырьмя блоками упругой пружиной.

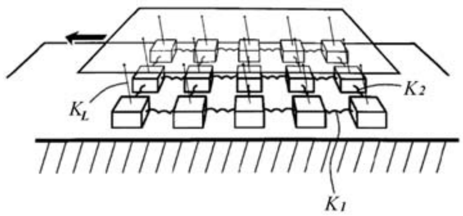

Рис. 1. Плоская механическая модель упруго связанных блоков на основании с трением. Каждый блок упруго связан с движущейся плитой

Блоки расположены на неподвижной платформе и соединены упругой связью с движущейся выше плитой. Сила, действующая на отдельный блок с координатой *(i,j)*, определяется как

$$F_{i,j} = f_{i,j}^{упр} + f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1} .$$

Сила $f_{i,j}^{упр}$ – сила, управляющая движением, образованная упругой связью с верхней плитой, $f_{i\pm1,j\pm1}$ - силы, образованные упругими связями блока *(i,j)* с соседними блоками. В случае отсутствия силы трения между основанием блока и неподвижной платформой движение блоков было бы непрерывно. В случае же наличия трения движение носит скачкообразный характер. Если сила $F_{i,j}$ не превышает силы трения покоя, то блок остается неподвижным. Когда же сила $F_{i,j}$ становится больше силы трения покоя, блок перескакивает в новое положение, такое же, как и суммарная сила $F_{i,j} = 0$.

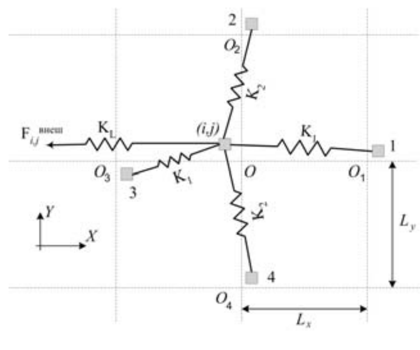

Рис.2. Схема взаимного расположения блоков в (i , j) узле решетки. L_x L_y , *– расстояние между узлами решетки модели,* K_1, K_2 *– коэффициенты упругости горизонтальных и вертикальных пружин соответственно,* K_L *– коэффициенты упругости пружины связи с внешней движущейся плитой*

Рассмотрим отдельный блок (рис.2), находящийся в прямоугольной решетке блоков, который упруго связан с четырьмя соседними блоками. В качестве положений равновесия блоков будем считать узлы сетки, расстояние между которыми определяется нулевыми длинами пружин l_1, l_2 по осям X, Y соответственно. Для того чтобы компенсировать действие внешней силы, пусть узлы сетки двигаются с постоянной скоростью, равной скорости растягивания внешней пружины с коэффициентом упругости K_L. Пусть *(i,j)* блок теряет равновесие. Рассмотрим решение задачи определения нового положения равновесия блока (*(i,j)*) и сходимость приближенного решения к точному.

Новое положение равновесия (x,y) блока (i, j) относительно узловой точки O определяется равенством нулю проекций суммарной силы $\boldsymbol{F}$. Таким образом, получается система двух уравнений, учитывающая проекции упругих сил связи с соседними блоками и внешнюю силу:

$$\begin{aligned} F_{i,j}^{x} &= F_{i,j}^{внеш} + f_1^x + f_2^x + f_3^x + f_4^x = 0, \\ F_{i,j}^{y} &= f_1^y + f_2^y + f_3^y + f_4^y = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

С учетом выражений для каждой компоненты силы искомая система уравнений (1) относительно (x,y) выглядит как:

$$\begin{aligned} &-K_L \cdot x + K_1\left(x_{i+1,j} + x_{i-1,j} - 2x\right) + K_2\left(x_{i,j+1} + x_{i,j-1} - 2x\right) - \\ &-K_1 \cdot l_1\left(\frac{x_{i+1,j} - x + l_1}{\sqrt{\left(x_{i+1.j} - x + l_1\right)^2 + \left(y_{i+1,j} - y\right)^2}} + \frac{x_{i-1,j} - x - l_1}{\sqrt{\left(x_{i-1.j} - x - l_1\right)^2 + \left(y_{i-1,j} - y\right)^2}}\right) - \\ &-K_2 \cdot l_2\left(\frac{x_{i,j+1} - x_1}{\sqrt{\left(x_{i,j+1} - y + l_2\right)^2 + \left(x_{i,j+1} - x\right)^2}} + \frac{x_{i,j-1} - x}{\sqrt{\left(y_{i,j-1} - y + l_2\right)^2 + \left(x_{i,j-1} - x\right)^2}}\right) = 0 \cdot \\ &K_1\left(y_{i+1,j} + y_{i-1,j} - 2y\right) + K_2\left(y_{i,j+1} + y_{i,j-1} - 2y\right) - \\ &-K_1 \cdot l_2\left(\frac{y_{i+1,j} - y}{\sqrt{\left(x_{i+1.j} - x + l_1\right)^2 + \left(y_{i+1,j} - y\right)^2}} + \frac{y_{i-1,j} - y}{\sqrt{\left(x_{i-1.j} - x - l_1\right)^2 + \left(y_{i-1,j} - y\right)^2}}\right) - \\ &-K_2 \cdot l_2\left(\frac{y_{i,j+1} - y + l_2}{\sqrt{\left(y_{i,j+1} - y + l_2\right)^2 + \left(x_{i,j+1} - x\right)^2}} + \frac{y_{i,j-1} - y - l_2}{\sqrt{\left(y_{i,j-1} - y - l_2\right)^2 + \left(x_{i,j-1} - x\right)^2}}\right) = 0 \cdot \end{aligned} \tag{2}$$

При решении представленной нелинейной системы с помощью итерационного метода Ньютона актуальным является определение условий сходимости итерационного процесса и погрешности решения на каждом шаге итерации. Выполнение первого требования необходимо при задании параметров вычислительной модели, второе условие должно учитываться непосредственно при проведении вычислений. Физической предпосылкой второго условия и остановки вычисления новых значений положения равновесия с конечной точностью является то, что при движении блока с трением он останавливается в точке, где упругая сила уменьшается до величины силы трения скольжения, не достигая точного положения равновесия (без учета трения скольжения).

Воспользуемся одним из достаточных условий локальной сходимости [4] итерационного процесса $\mathbf{z}^{(k+1)} = \mathbf{z}^{(k)} - \left[G'\left(\mathbf{z}^{(k)}\right)\right]^{-1} G\left(\mathbf{z}^{(k)}\right)$, в соответствии с которым если функция $G(\mathbf{z})$ определена и дифференцируема по Фреше в некоторой открытой области $M \subseteq \mathbf{R}^n$, причем:

1). $\exists\ \eta > 0: \left\| G'(\mathbf{z}) - G'(\tilde{\mathbf{z}}) \right\| \le \eta \left\| \mathbf{z} - \tilde{\mathbf{z}} \right\|, \quad \forall\ \mathbf{z}, \tilde{\mathbf{z}} \in M$;

2). $\exists \left[G'(\mathbf{z})\right]^{-1}$ и $\exists\, \mathrm{C} > 0: \left\| G'(\mathbf{z})^{-1} \right\| \le \mathrm{C}, \quad \forall\ \mathbf{z} \in M$.

Тогда, если $\nu = \frac{1}{2}\eta C^2 p_0 < 1$, где $p_0 \ge \left\| G\left(\mathbf{z}^{(0)}\right) \right\|$ и замкнутый шар $S\left(\mathbf{z}^{(0)}, r = Cp_0 \sum_{i=0}^{\infty} \nu^{2^i - 1}\right)$ целиком содержится в M, то все члены последовательности $\left(\mathbf{z}^{(k)}\right)$ лежат в $S \subseteq M$; последовательность $\left(\mathbf{z}^{(k)}\right)$ имеет предел $\mathbf{z}^* \in S$, являющийся решением уравнения $G(\mathbf{z}) = 0$ и справедлива оценка:

$$\left\| \mathbf{z}^* - \mathbf{z}^{(k)} \right\| \le \frac{Cp_0}{1 - \nu^{2^k}} \cdot \nu^{2^k - 1}.$$

В нашем случае системы двух уравнений производная вектор-функции $G(\mathbf{z})$, где $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, определяется частными производными:

$$\frac{\partial F_{ij}^x}{\partial x} = -K_L - 2K_1 - 2K_2 + K_1 l_2 \cdot \left(\frac{(y_{i+1,j} - y)^2}{\left((x_{i+1,j} - x + l_1)^2 + (y_{i+1,j} - y)^2\right)^{3/2}} + \frac{(y_{i-1,j} - y)^2}{\left((x_{i-1,j} - x + l_1)^2 + (y_{i-1,j} - y)^2\right)^{3/2}} \right) +$$

$$+ K_2 l_2 \left(\frac{(y_{i,j+1} - y + l_2)^2}{\left((x_{i,j+1} - x)^2 + (y_{i,j+1} - y + l_2)^2\right)^{3/2}} + \frac{(y_{i,j-1} - y - l_2)^2}{\left((x_{i,j-1} - x)^2 + (y_{i,j-1} - y - l_2)^2\right)^{3/2}} \right),$$

$$\frac{\partial F_{ij}^y}{\partial y} = -2K_1 - 2K_2 + K_1 l_2 \cdot \left(\frac{(x_{i+1,j} - x + l_1)^2}{\left((x_{i+1,j} - x + l_1)^2 + (y_{i+1,j} - y)^2\right)^{3/2}} + \frac{(x_{i-1,j} - x - l_1)^2}{\left((x_{i-1,j} - x - l_1)^2 + (y_{i-1,j} - y)^2\right)^{3/2}} \right) +$$

$$+ K_2 l_2 \left(\frac{(x_{i,j+1} - x)^2}{\left((x_{i,j+1} - x)^2 + (y_{i,j+1} - y + l_2)^2\right)^{3/2}} + \frac{(x_{i,j-1} - x)^2}{\left((x_{i,j-1} - x)^2 + (y_{i,j-1} - y - l_2)^2\right)^{3/2}} \right),$$

$$\frac{\partial F_{ij}^x}{\partial y} = \frac{\partial F_{ij}^y}{\partial x} = -K_1 l_2 \cdot \left(\frac{(x_{i+1,j} - x + l_1)(y_{i+1,j} - y)}{\left((x_{i+1,j} - x + l_1)^2 + (y_{i+1,j} - y)^2\right)^{3/2}} + \frac{(x_{i-1,j} - x - l_1)(y_{i-1,j} - y)}{\left((x_{i-1,j} - x - l_1)^2 + (y_{i-1,j} - y)^2\right)^{3/2}} \right) -$$

$$- K_2 l_2 \cdot \left(\frac{(x_{i,j+1} - x)(y_{i,j+1} - y + l_2)}{\left((x_{i,j+1} - y + l_2)^2 + (x_{i,j+1} - x)^2\right)^{3/2}} + \frac{(x_{i,j-1} - x)(y_{i,j-1} - y - l_2)}{\left((x_{i,j-1} - x)^2 + (y_{i,j-1} - y - l_2)^2\right)^{3/2}} \right).$$

При этом симметричный вид полученной матрицы определяет существование только действительных ее собственных значений.

Использование предлагаемого метода при расчете больших решеток блоков сталкивается с трудностью, связанной с большой длительностью счета для достижения заданной точности решения для каждого блока. К тому же такой расчет полной системы блоков необходимо делать на каждом шаге итерации. Для задач использования данной модели число итераций может достигать величины $N \sim 10^7$-10^8.

С целью уменьшения времени счета рассмотрим ограничения на модель, позволяющие получать приемлемую точность нахождения решения нелинейной системы уже после нескольких итерации.

Исходя из модельных задач будем рассматривать лишь малые сдвиги блоков: $\Delta x << l_1$, $\Delta y << l_2$. При этом полученные ниже условия сходимости и определяют величины таких малых сдвигов.

Оценим сходимость одного шага итераций для рассматриваемой системы уравнений. Рассмотрим оценки констант η, C в сферической норме $\| \ \|_2$. Характеристическое уравнение для нахождения максимального модуля собственного значения $\max\limits_{k=1,2}|\lambda_k|$ представляет собой квадратное уравнение:

$$\lambda^2-\left(\frac{\partial F_{ij}^x}{\partial x}-\frac{\partial F_{ij}^x}{\partial \widetilde{x}}+\frac{\partial F_{ij}^x}{\partial y}-\frac{\partial F_{ij}^x}{\partial \widetilde{y}}\right)\lambda+\left(\frac{\partial F_{ij}^x}{\partial x}-\frac{\partial F_{ij}^x}{\partial \widetilde{x}}\right)\left(\frac{\partial F_{ij}^x}{\partial y}-\frac{\partial F_{ij}^x}{\partial \widetilde{y}}\right)-\left(\frac{\partial F_{ij}^x}{\partial y}-\frac{\partial F_{ij}^x}{\partial \widetilde{y}}\right)^2=0\cdot$$

Оценим коэффициенты в уравнении, выразив производные через углы отклонения от положения равновесия $\varphi_{i,j}$ и расстояния между блоками $\rho_{i,j}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{ij}^x}{\partial x}-\frac{\partial F_{ij}^x}{\partial \widetilde{x}}+\frac{\partial F_{ij}^x}{\partial y}-\frac{\partial F_{ij}^x}{\partial \widetilde{y}}&=K_1l_1\left[\frac{\sin^2\varphi_{i+1,j}}{\rho_{i+1,j}}+\frac{\sin^2\varphi_{i-1,j}}{\rho_{i-1,j}}-\frac{\sin^2\widetilde{\varphi}_{i+1,j}}{\widetilde{\rho}_{i+1,j}}-\frac{\sin^2\widetilde{\varphi}_{i-1,j}}{\widetilde{\rho}_{i-1,j}}\right]+\\
&+K_2l_2\left[\frac{\cos^2\varphi_{i,j+1}}{\rho_{i,j+1}}+\frac{\cos^2\varphi_{i,j-1}}{\rho_{i,j-1}}-\frac{\cos^2\widetilde{\varphi}_{i,j+1}}{\widetilde{\rho}_{i,j+1}}-\frac{\cos^2\widetilde{\varphi}_{i,j-1}}{\widetilde{\rho}_{i,j-1}}\right]+\\
&+K_1l_1\left[\frac{\cos^2\varphi_{i+1,j}}{\rho_{i+1,j}}+\frac{\cos^2\varphi_{i-1,j}}{\rho_{i-1,j}}-\frac{\cos^2\widetilde{\varphi}_{i+1,j}}{\widetilde{\rho}_{i+1,j}}-\frac{\cos^2\widetilde{\varphi}_{i-1,j}}{\widetilde{\rho}_{i-1,j}}\right]+ \qquad (3)\\
&+K_2l_2\left[\frac{\sin^2\varphi_{i,j+1}}{\rho_{i,j+1}}+\frac{\sin^2\varphi_{i,j-1}}{\rho_{i,j-1}}-\frac{\sin^2\widetilde{\varphi}_{i,j+1}}{\widetilde{\rho}_{i,j+1}}-\frac{\sin^2\widetilde{\varphi}_{i,j-1}}{\widetilde{\rho}_{i,j-1}}\right]=
\end{aligned}$$

$$+K_1l_1\left[\frac{1}{\rho_{i+1,j}}+\frac{1}{\rho_{i-1,j}}-\frac{1}{\widetilde{\rho}_{i+1,j}}-\frac{1}{\widetilde{\rho}_{i-1,j}}\right]+K_2l_2\left[\frac{1}{\rho_{i,j+1}}+\frac{1}{\rho_{i,j-1}}-\frac{1}{\widetilde{\rho}_{i,j+1}}-\frac{1}{\widetilde{\rho}_{i,j-1}}\right]\le 2\|\mathbf{z}-\widetilde{\mathbf{z}}\|\left(\frac{K_1}{l_1}+\frac{K_2}{l_2}\right).$$

Обозначим разность производных в точках $\mathbf{z},\widetilde{\mathbf{z}}$ через $\Delta\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}_i}$, для дискриминанта квадратного уравнения справедливо представление в виде:

$$\begin{aligned}
D^2&=\left(\Delta\frac{\partial F_{ij}^x}{\partial x}+\Delta\frac{\partial F_{ij}^y}{\partial y}\right)^2-4\cdot\Delta\frac{\partial F_{ij}^x}{\partial x}\cdot\Delta\frac{\partial F_{ij}^y}{\partial y}+4\left(\Delta\frac{\partial F_{ij}^x}{\partial y}\right)^2=\left(\Delta\frac{\partial F_{ij}^x}{\partial x}-\Delta\frac{\partial F_{ij}^y}{\partial y}\right)^2+44\left(\Delta\frac{\partial F_{ij}^x}{\partial y}\right)^2=\\
&=\left[-K_1l_1\left(\frac{\cos2\varphi_{i+1,j}}{\rho_{i+1,j}}-\frac{\cos2\widetilde{\varphi}_{i+1,j}}{\widetilde{\rho}_{i+1,j}}+\frac{\cos2\varphi_{i-1,j}}{\rho_{i-1,j}}-\frac{\cos2\widetilde{\varphi}_{i-1,j}}{\widetilde{\rho}_{i-1,j}}\right)+\right.\\
&\left.+K_2l_2\left(\frac{\cos2\varphi_{i,j+1}}{\rho_{i,j+1}}-\frac{\cos2\widetilde{\varphi}_{i,j+1}}{\widetilde{\rho}_{i,j+1}}+\frac{\cos2\varphi_{i,j-1}}{\rho_{i,j-1}}-\frac{\cos2\widetilde{\varphi}_{i,j-1}}{\widetilde{\rho}_{i,j-1}}\right)\right]^2+
\end{aligned}$$

$$+\left[-K_1 l_1\left(\frac{\sin 2\varphi_{i+1,j}}{\rho_{i+1,j}}-\frac{\sin 2\tilde{\varphi}_{i+1,j}}{\tilde{\rho}_{i+1,j}}+\frac{\sin 2\varphi_{i-1,j}}{\rho_{i-1,j}}-\frac{\sin 2\tilde{\varphi}_{i-1,j}}{\tilde{\rho}_{i-1,j}}\right)+\right.$$

$$\left.+K_2 l_2\left(\frac{\sin 2\varphi_{i,j+1}}{\rho_{i,j+1}}-\frac{\sin 2\tilde{\varphi}_{i,j+1}}{\tilde{\rho}_{i,j+1}}+\frac{\sin 2\varphi_{i,j-1}}{\rho_{i,j-1}}-\frac{\sin 2\tilde{\varphi}_{i,j-1}}{\tilde{\rho}_{i,j-1}}\right)\right]^2.$$

С учетом малости смещений $\rho_{i+1,j}\approx\rho_{i-1,j}\approx\tilde{\rho}_{i+1,j}\approx\tilde{\rho}_{i-1,j}\approx l_1$, $\rho_{i,j+1}\approx\rho_{i,j-1}\approx\tilde{\rho}_{i,j+1}\approx\tilde{\rho}_{i,j-1}\approx l_2$ и справедлива оценка:

$$D^2<4\left[-\frac{K_1}{l_1}\left(x_{i+1,j}-\tilde{x}_{i+1,j}+x_{i-1,j}-\tilde{x}_{i-1,j}\right)+\frac{K_2}{l_2}\left(x_{i,j+1}-\tilde{x}_{i,j+1}+x_{i,j-1}-\tilde{x}_{i,j-1}\right)\right]$$

$$+4\left[-\frac{K_1}{l_1}\left(y_{i+1,j}-\tilde{y}_{i+1,j}+y_{i-1,j}-\tilde{y}_{i-1,j}\right)+\frac{K_2}{l_2}\left(y_{i,j+1}-\tilde{y}_{i,j+1}+y_{i,j-1}-\tilde{y}i,\right.\right. \qquad (4)$$

$$<32\|z-\tilde{z}\|^2\cdot\left(\frac{K_1}{l_1}+\frac{K_2}{l_2}\right)^2.$$

Из (3),(4) для нормы $\|G'(\mathbf{z})-G'(\tilde{\mathbf{z}})\|$ справедлива оценка:

$\|G'(\mathbf{z})-G'(\tilde{\mathbf{z}})\|<\left(1+2\sqrt{2}\right)\left(\frac{K_1}{l_1}+\frac{K_2}{l_2}\right)\|\mathbf{z}-\tilde{\mathbf{z}}\|$ с параметром $\eta=\left(1+2\sqrt{2}\right)\left(\frac{K_1}{l_1}+\frac{K_2}{l_2}\right)$.

Для оценки C рассмотрим собственные значения обратной матрицы Якоби:

$$\left\|G'(\mathbf{z})^{-1}\right\|=\frac{1}{\left|\det G'(\mathbf{z})\right|}\left\|\begin{matrix}\frac{\partial F_{ij}^y}{\partial y} & -\frac{\partial F_{ij}^x}{\partial y}\\ -\frac{\partial F_{ij}^x}{\partial y} & \frac{\partial F_{ij}^x}{\partial x}\end{matrix}\right\|. \qquad (5)$$

С учетом:

$$\frac{\partial F_{ij}^x}{\partial x}+\frac{\partial F_{ij}^y}{\partial y}=-K_L-4K_1-4K_2+K_1 l_1\left(\frac{1}{\rho_{i+1,j}}+\frac{1}{\rho_{i-1,j}}\right)+K_2 l_2\left(\frac{1}{\rho_{i,j+1}}+\frac{1}{\rho_{i,j-1}}\right),$$

$$\frac{\partial F_{ij}^x}{\partial x}-\frac{\partial F_{ij}^y}{\partial y}=-K_L-K_1 l_1\left(\frac{\cos 2\varphi_{i+1,j}}{\rho_{i+1,j}}+\frac{\cos 2\varphi_{i-1,j}}{\rho_{i-1,j}}\right)+K_2 l_2\left(\frac{\cos 2\varphi_{i,j+1}}{\rho_{i,j+1}}+\frac{\cos 2\varphi_{i,j-1}}{\rho_{i,j-1}}\right)$$

,

$$2\frac{\partial F_{ij}^x}{\partial y}=K_1 l_1\left(\frac{\sin 2\varphi_{i+1,j}}{\rho_{i+1,j}}+\frac{\sin 2\varphi_{i-1,j}}{\rho_{i-1,j}}\right)+K_2 l_2\left(\frac{\sin 2\varphi_{i,j+1}}{\rho_{i,j+1}}+\frac{\sin 2\varphi_{i,j-1}}{\rho_{i,j-1}}\right),$$

и оценок

$$\left|\det G'(\mathbf{z})\right|=\frac{\partial F_{ij}^x}{\partial x}\frac{\partial F_{ij}^y}{\partial y}-\left(\frac{\partial F_{ij}^x}{\partial y}\right)^2\approx 2K_2\left(K_L+2K_1\right)\cdot$$

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial F_{ij}^{y}}{\partial y} & -\dfrac{\partial F_{ij}^{x}}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial F_{ij}^{x}}{\partial y} & \dfrac{\partial F_{ij}^{x}}{\partial x} \end{matrix} \right\| \le K_L + 2K_1 + 2K_2 + \left| K_L + 2\sqrt{2} \cdot K_1 - 2K_2 \right|$$

оценка нормы (5): $\left\| G'(\mathbf{z})^{-1} \right\| < C$, где $C = \dfrac{1}{2K_2} + \dfrac{1}{K_L + 2K_1} + \dfrac{\left| K_L + 2\sqrt{2} \cdot K_1 - 2K_2 \right|}{2K_2 (K_L + 2K_1)}$.

Исходя из рассматриваемой модели, максимальное значение силы, действующей на блок, определяется силой трения покоя $F_{mp}^{\max}$, т.е. $p_0 = F_{mp}^{\max}$. Тогда условие сходимости итераций у решения будет определяться условием:

$$\nu = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2} \right) \left(\frac{K_1}{l_1} + \frac{K_2}{l_2} \right) \left[\frac{1}{2K_2} + \frac{1}{K_L + 2K_1} + \frac{\left| K_L + 2\sqrt{2} \cdot K_1 - 2K_2 \right|}{2K_2 (K_L + 2K_1)} \right]^2 F_{mp}^{\max} < 1 . \quad (6)$$

При этом оценка погрешности приближенного решения за один шаг итераций $\mathbf{z}^{(1)}$:

$$\left\| \mathbf{z}^* - \mathbf{z}^{(1)} \right\| \le \frac{C \cdot F_{mp}^{\max}}{1 - \nu^2} \cdot \nu . \quad (7)$$

Полученное соотношение (6) определяет условие, гарантирующее сходимость итерационного процесса к точному решению. Скорость такой сходимости определяется (7) и может служить оценкой необходимого количества итераций расчета для достижения задаваемой программно точности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Burridge R., Knopoff L.*, Model and Theoretical Seismicity, Bull. Seism Soc. Am. 57, 341-371, 1967
2. *Olami Z., Feder H.J.S., Christensen K.*, Self-organized criticality in a continuous, nonconservative cellular automaton modeling earthquakes, Phys.Rev. Lett. 68, 1244-1247. 1992.
3. *Gutenberg B., Richter C.F.*, Seismicity of the Earth and associated phenomena. Princeton: Univ. press, 1949; 2nd ed. 1954. 310 p.
4. *Ортега Д., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М.: Мир, 1975.

Черепанцев Александр Сергеевич

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге

E-mail: s6319a@mail.ru

347928, Россия, Таганрог, ГСП 17А, пер. Некрасовский, 44

Тел.: 8(8634) 37-16-06

Cherepantsev Alexandr Sergeevich

Taganrog Institute of Technology - Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”

E-mail: s6319a@mail.ru

44, Nekrasovsky, Taganrog, 347928, Russia, Ph.: +7(8634)37-17-95