БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Долгов А.Н., Ходотов А.В.* Принципы и концепция построения тренажера гидролокатора бокового обзора // Известия ТРТУ. Тематический выпуск. «Экология 2006 – море и человек». –Таганрог, 2006. № 12(67). – С. 59 – 64.

Долгов Александр Николаевич

Общество с ограниченной ответственностью «Конструкторское бюро морской электроники “Вектор”», г. Таганрог

E-mail: Dolgov@vector.ttn.ru

347913, Россия, г. Таганрог, ул. Менделеева, 6, тел.: 8(8634)-333900

Dolgov Alexander Nikolaevich

Vector Marine Electronics, Taganrog, Russia

E-mail: Dolgov@vector.ttn.ru

6, Mendeleeva St., Russia, Taganrog, 347913, Ph.: +7(8634)-333900

УДК 534.29:551.594.25

А. А. Афонин

ЛИНЕЙНЫЕ ДВУМЕРНЫЕ МОДЕЛИ ГЕОФИЛЬТРАЦИИ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ С ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ

В данной статье представлены двумерные линейные модели, вытекающие из обобщенного уравнения Буссинеска, описывающего геофильтрацию в почвах с фрактальной структурой.

Геофильтрация; уравнение Буссинеска; фрактальные структуры.

A.A. Afonin

LINEAR TWO – DIMENSIONAL MODELS OF GEOFILTRATION IN POROUS MEDIA WITH FRACTAL STRUCTURE

In this study 2-D linear models are coming from generalised, Boussinesq eqution describing geofiltration in soils with fractal structures are presented.

Geofltration; Boussinesq equation; fractal structures.

Уравнение Буссинеска было выведено при условиях, соответствующих гидравлической постановке задачи, а именно, при условиях осреднения фильтрационного потока по высоте.

Рассмотрим неустановившееся движение грунтовых вод в безнапорном пласте с слабопроницаемым водоупором

$$z = h_0(x, y), \qquad (x, y) \in D$$

и слабоизменяющейся свободной поверхностью

$$z = h(x, y, t), \quad (x, y) \in D, \ 0 \le t \le T \cdot$$

Занятая грунтовой водой пористая неоднородная среда D в любой момент времени t от начального $t = 0$ до расчетного $t = T$ в каждом вертикальном сечении определяется функцией

$$H(x, y, t) = h(x, y, t) - h_0(x, y) \cdot$$

Тогда, используя уравнение баланса для столба жидкости высотой $H(x,y,t)$ с площадью $\Delta x \cdot \Delta y$, можно получить [1] *уравнение Буссинеска*:

$$\frac{\partial (mh)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(H \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(H \frac{\partial h}{\partial y} \right) + w, \tag{1}$$

где $h = \frac{p}{\rho g} + z$ – функция напора, m – пористость среды, w – разность между инфильтрацией и испарением, рассчитанная на единицу площади горизонтальной проекции поверхности грунтовых вод.

Если ввести обозначение $kH = K$, называемое как и в случае напорного пласта, *проводимостью* пласта, из (1) получим *классическое уравнение Буссинеска* для безнапорного установившегося движения жидкости в пористой среде:

$$\frac{\partial (mh)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K \frac{\partial h}{\partial y} \right) + w, \tag{2}$$

если w_0 – скорость фильтрации слабопроницаемого водоупора с коэффициентом фильтрации $k_0 (k_0 << k)$, мощностью (толщиной) d_0 и напором H_0, то

$$w_0 = -\frac{k_0}{d_0}(h - H_0),$$

и уравнение Буссинеска представляется в виде

$$\frac{\partial (mh)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \frac{k_0}{d_0}(h - H_0), \tag{3}$$

которое может быть представлено в более удобной форме

$$\frac{\partial (mh)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \frac{k_0}{kd_0} K + f_0, \tag{4}$$

где $f_0 = -\frac{k_0}{d_0}\left(h_0 - H_0\right) + w.$

В случае горизонтального водоупора $\left(h_0(x,y) \equiv 0\right)$ последнее уравнение может быть представлено в виде

$$\frac{\partial (mh)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(kh \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(kh \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \frac{k_0}{d_0} h + f_0, \tag{5}$$

где $f_0 = \frac{k_0 H_0}{d_0} + w.$

Если m и k – постоянные величины, уравнение Буссинеска может быть представлено следующим образом:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right) - \beta h + \gamma f_0 = 0, \tag{6}$$

где $\alpha = \frac{k}{m}, \quad \beta = \frac{k_0}{m}, \quad \gamma = \frac{1}{m}$.

Изменение уровня грунтовых вод в классической теории фильтрации определяется величиной $h_t = \frac{\partial h}{\partial t}$. Это допущение находит экспериментальное подтверждение в несильно пористых средах. Реальные пористые среды, в особенности реальные почвы, хорошо интерпретируются как среды с фрактальными структурами [2,3]. Примем гипотезу:

$$h_t = \kappa \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{\partial h(x,y,\tau)}{\partial \tau} d\tau, \tag{7}$$

где κ и α – безразмерные величины, характеризующие фрактальную природу процесса движения грунтовых вод в сильно пористых средах, $\kappa > 0, \quad 0 < \alpha < 1$.

Введем оператор дробного, в смысле Римана-Лиувилля, интегродифференцирования порядка |α| с началом в начальный момент времени $t = 0$ и с концом в текущий момент времени $t > 0$, который действует на функцию $\varphi(t) \in L[0,T]$ по формуле [4]:

$$D_{0t}^{\alpha}\varphi = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(-\alpha)} \displaystyle\int_0^t \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1}}, & \alpha > 0, \\ \varphi(t), & \alpha = 0, \\ \dfrac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial t^{[\alpha]+1}} D_{0t}^{\alpha-[\alpha]-1}\varphi, & \alpha > 0. \end{cases} \tag{8}$$

Тогда гипотезу (7) можно записать в виде

$$h_t = \kappa\Gamma(1-\alpha) D_{0t}^{\alpha-1} \frac{\partial h(x,y,\tau)}{\partial \tau}, \tag{9}$$

где $D_{0t}^{\alpha-1}$ – оператор дробного дифференцирования порядка $\alpha - 1$ с началом в начальный момент времени $t = 0$.

Введем в рассмотрение оператор дробного дифференцирования M.Caputo [4] порядка α:

$$\partial_{0t}^{\alpha} h(x,y,t) = D_{0t}^{\alpha-1} \frac{\partial h(x,y,t)}{\partial \tau}. \tag{10}$$

Сравнивая (9) и (10), имеем

$$h_t = k\Gamma(1-\alpha)\partial_{0t}^{\alpha} h(x,y,t). \tag{11}$$

Учитывая (4) и (10), получим

$$\kappa\Gamma(1-\alpha)\partial_{0t}^{\alpha}(mh(x,y,t)) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{K}\frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{K}\frac{\partial h}{\partial y}\right) - \frac{k_0}{kd_0}\mathrm{K} + f_0. \tag{12}$$

Уравнение (12) называется *обобщенным уравнением Буссинеска с дробной производной по времени.*

Легко убедиться, что

$$\lim_{\alpha \to 1} \partial_{0t}^{\alpha} h(x,y,t) = \frac{\partial h(x,y,t)}{\partial t}.$$

Поэтому уравнение (12) совпадает с классическим уравнением Буссинеска только в предельном случае, когда

$$\kappa = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \text{ и } \alpha \to 1.$$

Линеаризируя уравнение Буссинеска, можно получить линейные двумерные модели фильтрации грунтовых вод, в том числе и в пористых средах с фрактальной структурой. Если в уравнении Буссинеска в форме (6) заменить множитель h в круглых скобках и свободном члене некоторым постоянным значением $h_{\text{ср}}$ получим уравнение

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right) + f(x,y,t), \quad (13)$$

где

$$a = \frac{kh_{cp}}{m}, \quad f = \frac{f_0}{m} - \frac{k_0 h_{cp}}{md_0}.$$

Уравнение (13) описывает плановую задачу о течении в верхней полуплоскости плоскости 0xy. Пусть ось 0x представляет собой вертикальный берег доходящего до горизонтального водоупора канала. В начальный момент времени имеется постоянная глубина грунтовых вод H_0 и уровень воды в канале внезапно изменяется так, чтобы в одной части его при $x < 0$ устанавливается глубина воды H_1, а в другой, при $x > 0$ – глубина H_2, которые затем поддерживаются постоянными. Требуется найти уравнение свободной поверхности грунтовых вод $z = h(x,y,t)$ в полуплоскости $y > 0$, то есть по одну сторону канала при начальном и граничном условиях соответственно:

$$h(x,y,0) = \varphi(x,y), \; h(x,0,t) = F(x,t). \quad (14)$$

Кроме того, уравнение (13) описывает образование и растекание бугров грунтовых вод, которые возникают при поливах или при выпадении осадков, которые в дальнейшем медленно рассасываются, создавая местное повышение уровня грунтовых вод. В уравнении (13) по-прежнему $\alpha = \frac{kh_{cp}}{m}$, а свободный член f учитывает влияние инфильтрации и испарения, а также слабопроводящего водоупора на процесс растекания бугра грунтовых вод. Различные случаи начальных условий и вида $f(x,y,t)$, а также решения задачи о растекании бугров грунтовых вод при различных условиях в квадратурах представлены в работе [5].

Линеаризация уравнения Буссинеска (6) может быть осуществлена, если положить $h^2 = u$; в этом случает мы также приходим к уравнению (13), но относительно функции $u(x,y,t)$. В некоторых случаях более близкие к точному решению (6) Буссинеска могут быть получены при первом способе линеаризации, в других случая – при втором.

В случае фрактальной организации грунта, с учетом обобщенного уравнения Буссинеска, уравнение (13) может быть трансформировано к следующему виду:

$$\partial_{0t}^{\alpha} h(x,y,t) = a\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right) + f(x,y,t), \quad (15)$$

где ∂_{0t}^{α} – оператор дробного (в смысле M.Caputo) дифференцирования по t порядка $\alpha \in [0,1]$ с началом в начальный момент времени $t = 0$:

$$\partial_{0t}^{\alpha} h(x,y,t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \frac{\partial h(x,y,\tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (16)$$

Для широкого класса реальных задач фильтрации грунтовых вод для грунтов, которые могут быть интерпретированы как фрактальные, уравнение (15) с начальными и граничными условиями могут представлять линейные двумерные модели, выведенные из обобщенного уравнения Буссинеска.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977.
2. *Нахушев А.М.* Элементы дробного исчисления и их применение.– Нальчик: Изд-во КБНУ РАН, 2000.

3. *Нахушев А.М., Нахушева В.А., Сербина Л.И.* О некоторых прикладных аспектах дробного исчисления. Тезисы докладов Международной конференции «Воздействие интенсивных потоков на вещество». Терскол, 1999.
4. *Caputo M.* Elasticita e Dissipazione.– Zanichelli, Bologna, 1969.
5. *Полубаринова-Кочина П.Я., Пряжинская В.Г., Эмих В.Н.* Математические методы в вопросах орошения.– М.:Наука, 1969.

Афонин Анатолий Андреевич

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге

E-mail: nikitina.vm@gmail.com

347928, Россия, Таганрог, ГСП 17А, пер. Некрасовский, 44

Тел.: 8(8634) 37-16-06

Afonin Anatoliy Andreevich

Taganrog Institute of Technology - Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”

E-mail: nikitina.vm@gmail.com

44, Nekrasovsky, GSP 17A, Taganrog, 347928, Russia, Ph.: +7(8634) 37-16-06

УДК 534.29:551.594.25

А. А. Афонин

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ГЕОМИГРАЦИИ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ, ОБЛАДАЮЩИХ ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ

В данной статье представлены математические модели геомиграции загрязнений в грунтовых водах в классической постановке, а также в почвах, обладающих фрактальной структурой.

Геомиграция; смесь; грунтовые воды; фрактальные структуры.

A. A. Afonin

MATHEMATICAL MODELS OF GEOMIGRATION IN POROUS MEDIA WITH FRACTAL STRUCTURE

In this study are presented mathematical models geomigration of contaminations with groundwater in classical way and in soils with fractal structures.

Geomigration; mixture; groundwater; fractal structures.

При мелиорации земель, проектировании и строительстве гидротехнических сооружений, в вопросах охраны окружающей среды, вопросах защиты территорий от подтопления, в вопросах строительства и эксплуатации водозаборных скважин важное значение играют геофильтрация и геомиграция водорастворимых веществ, в частности солей, в почве и грунтах.

При исследовании подземных вод важным является такой расчет работы водозаборных скважин, при котором они не загрязнялись бы промышленными стоками, сбрасываемыми в грунт или подземные хранилища в районе водозабора. При работе водозаборных скважин в районе морских побережий, засоленных озер