Fedoseev Sergey Vladimirovich
E-mail: fedserg@rambler.ru
147, Shevchenko street, Shakhty, 346500. Tel. 88636 22-31-30

Alikov Alan Uirevich
State educational institution of the higher vocational training «North Caucasian Institute of Mining and Metallurgy (State Technological University)».
E-mail: alan_alikov@rambler.ru
44, street of the Cosmonaut of Nikolaev, Vladikavkaz, Republic of North Ossetia-Alania, 346500. Tel. 8(8672)40-72-03

УДК 681.3.06:681.323(519.6)

Я.Е. РОММ, Г.А. ДЖАНУНЦ

СХЕМА РАЗНОСТНОГО РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТЬЮ НА ОСНОВЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ПОЛИНОМА НЬЮТОНА

Изложена компьютерная схема разностного решения задачи математика Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений на основе кусочно-полиномиальной аппроксимации функций с помощью интерполяционного полинома Ньютона. Схема обладает свойствами аналитического и разностного приближения, позволяя вычислять решение в узловых точках с разностным шагом и в промежутках между ними вследствие интерполяции. Показано, что схема повышает точность метода Рунге - Кутта в среднем на три десятичных порядка.

Компьютерная; схема; порядок.

Ya.E. Romm, G.A. Dzhanunts

THE SCHEME OF A DIFFERENCE SOLUTION OF THE ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH THE RAISED ACCURACY ON THE BASIS OF NEWTON'S INTERPOLATIONAL POLYNOMIAL

The computer scheme of a difference solution of a Cauchy problem for the ordinary differential equations on a basis of a piecewise-polynomial approximation of functions by means of Newton's interpolational polynomial is stated. The scheme possesses properties of analytical and difference approach, allowing to calculate a solution in central points with a difference pitch and in gaps between them owing to interpolation. It is shown, that the scheme raises accuracy of a Runge-Kutt method on three decimal order on average.

Computer; scheme; average.

Для разностных решений обыкновенных дифференциальных уравнений существуют границы повышения точности вычислений при уменьшении шага интегрирования. Эти ограничения предполагается преодолеть на основе применения кусочно-полиномиальной аппроксимации функций [1]. Кратко данная схема аппроксимации выглядит следующим образом. Пусть требуется приблизить функцию одной переменной $y = f(x)$ на произвольно фиксированном отрезке $[\alpha, \beta]$. Выбирается система подынтервалов равной длины, объединение которых совпадает с $[\alpha, \beta]$:

$$[\alpha, \beta] = \bigcup_{i=0}^{P-1} [x_i, x_{i+1}], \qquad P = 2^k, \, k \in \{0,1,...\}. \tag{1}$$

При априори заданной границе абсолютной погрешности ε на каждом подынтервале строится интерполяционный полином Ньютона, степень которого выбирается минимальной для достижения заданной точности приближения на всех подынтервалах. При этом полином Ньютона преобразуется в общем случае к виду полинома с числовыми коэффициентами. Таким образом, для i-го подынтервала аппроксимирующий полином с шагом интерполяции

$$h_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{n} \tag{2}$$

между равноотстоящими узлами

$$x_{ij} = x_i + j\,h_i, \; j = 0,1,...,n \tag{3}$$

примет вид

$$\Psi_{ni}(t) = a_{0if} + \sum_{l=1}^{n} a_{lif}\, t^l, \qquad t = \frac{x - x_{i0}}{h_i}, \tag{4}$$

где

$$a_{0if} = f(x_{i0}), \qquad a_{lif} = \sum_{j=l}^{n} b_{ij} d_{lj}. \tag{5}$$

Табличную производную полинома (4) можно использовать для аппроксимации производной от функции

$$f'(x) \approx \sum_{l=1}^{n} \frac{l\, a_{lif}}{h_i} t^{l-1}. \tag{6}$$

Высокая точность такой аппроксимации экспериментально показана в [1]: метод позволяет вычислять значения функций и производных с порядком точности 10^{-19}.

Идея адаптации метода (4), (6) к разностным методам решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений заключается в следующем.

Пусть рассматривается дифференциальное уравнение первого порядка

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{7}$$

которое требуется решить на произвольно фиксированном отрезке $[a,b]$.

Предполагается, что на $[a,b]$ выполнены все условия существования и единственности решения задачи Коши.

С целью избежать несущественных оговорок предполагается, что длина промежутка $[a,b]$ кратна описываемой далее величине hn.

Для интерполяции решения задачи Коши на всем промежутке строится система подынтервалов равной длины, объединение которых совпадает с $[a,b]$:

$$\bigcup_{i=0}^{P-1}[x_i,\, x_{i+1}] = [a,b]\,, \qquad (8)$$

где

$$x_{i+1} = x_i + h\,n, \quad x_0 = a, \quad x_p = b\,. \qquad (9)$$

Длина каждого подынтервала $x_{i+1} - x_i = hn$, где h – шаг интегрирования по методу Рунге-Кутта, n – фиксированное число, равное степени используемого далее полинома. Из численного эксперимента оптимальное значение $n = 10$. Ввиду кратности $b-a$ и hn величина P вычисляется по формуле

$$P = \frac{b-a}{h\,n}\,. \qquad (10)$$

При обозначении границ i-го подынтервала a_i, b_i решение задачи Коши на всем промежутке $[a,b]$ сводится к последовательному её решению на подынтервалах $[a_i,\, b_i]$, $i = 0 \,...\, P-1$, где значение функции в начальной точке на подынтервале равно её значению в конечной точке предыдущего подынтервала $y(a_i) = y(b_{i-1})$.

На i-ом подынтервале кусочно-полиномиальная схема следующим образом встраивается в метод Рунге – Кутта.

На отрезке $[a_i,\, b_i]$ строится интерполяционный полином Ньютона степени n. В соответствии с (9) за шаг интерполяции

$$h = \frac{b_i - a_i}{n} \qquad (11)$$

принимается шаг интегрирования по методу Рунге–Кутта. Отрезок $[a_i,\, b_i]$ разбивается на n равных частей с равноотстоящими узлами

$$x_{i\,p} = a_i + p\,h, \;\; p = 0, 1, \,...,\, n\,. \qquad (12)$$

Полином Ньютона степени n на i-м подынтервале для функции $y(x)$ и для узлов интерполяции (12) записывается в виде

$$\Psi_{ni}(t) = y(x_{i0}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta^j y_{i0}}{j!} \prod_{k=0}^{j-1}(t-k)\,, \qquad t = \frac{x - x_{i0}}{h}\,. \qquad (13)$$

Каждое произведение вида $P_n(t) = \prod_{k=0}^{n-1}(t-k)$ представляет собой разложение полинома с некоторыми постоянными коэффициентами d_{jk}, которые восстанавливаются по корням по удобному для программирования алгоритму[2], который представлен формулами:

$$P_n(t) = d_{n\,0} + d_{n\,1}\,t + d_{n\,2}\,t^2 + ... + d_{n\,n}\,t^n\,, \qquad (14)$$

$$d_{n0} + d_{n1}\,t + ... + d_{nn}\,t^n = (t-0)(t-1)...(t-n+1)\,, \qquad (15)$$

$$\left.\begin{aligned}
&d_{kk} = d_{(k-1)(k-1)},\\
&d_{k(k-1)} = d_{(k-1)(k-2)} - d_{(k-1)(k-1)}\,(k-1),\\
&d_{k(k-2)} = d_{(k-1)(k-3)} - d_{(k-1)(k-2)}\,(k-1),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&d_{k(k-\ell)} = d_{(k-1)(k-\ell-1)} - d_{(k-1)(k-\ell)}\,(k-1),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&d_{k0} = -d_{(k-1)0}\cdot(k-1),
\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

при $\ell = 1, 2, \dots, k-1$ и $k = 2, 3, \dots, n$.

Коэффициенты можно считать априори вычисленными и хранимыми в памяти компьютера вместе со значениями факториалов.

Далее, в отличие от кусочно-полиномиального метода, полином Ньютона приводится к каноническому виду относительно неизвестных конечных разностей и в его выражение подставляется значение t:

$$\Psi_{ni}(x) = y(x_{i0}) + \sum_{j=1}^{n} \Delta^j y_{i0} \left(\frac{\sum_{l=1}^{j} d_{jl} \left(\frac{x - x_{i0}}{h} \right)^l}{j!} \right). \qquad (17)$$

Для вычисления полинома (17) требуется найти значения конечных разностей без знания точных значений функции. Это делается следующим образом. Предполагается, что на i-м подынтервале полином $\Psi_{ni}(x)$, пока с неизвестными коэффициентами, является приближением решения задачи Коши

$$y(x) \approx \Psi_{n\,i}(x), \qquad x \in \left[a_i, b_i \right]. \qquad (18)$$

Взятие производной по независимой переменной x от обеих частей (18) в рассматриваемых ограничениях влечет

$$y'(x) \approx \Psi'_{n\,i}(x). \qquad (19)$$

Вычисление правой части данного равенства как производной степенной функции и приравнивание правой части (7) влечёт

$$f(x, y) \approx \sum_{j=1}^{n} \Delta^j y_{i0} \left(\frac{\sum_{l=1}^{j} l \cdot d_{jl} \left(\frac{x - x_{i0}}{h} \right)^{l-1}}{j!h} \right). \qquad (20)$$

При подстановке в обе части равенства (20) узлов интерполяции x_{ip} из (12) получается система n линейных уравнений относительно n неизвестных вида $\Delta^j y_{i0}$, $j = \overline{1, n}$,

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta^j y_{i0} \cdot A_{pj} = B_p, \qquad p = \overline{0, n-1}, \qquad (21)$$

где

$$A_{pj} = \frac{\sum_{l=1}^{j} l \cdot d_{jl} \left(\frac{x_{ip} - x_{i0}}{h} \right)^{l-1}}{j!h}, \qquad B_p = f(x_{ip}, y_{ip}). \qquad (22)$$

Значения y_{ip} в (22) находятся путем решения задачи Коши на подынтервале $[a_i, b_i]$ методом Рунге–Кутта.

Решение системы (21) по методу Гаусса даст значения $\Delta^j y_{i0}$, $j = \overline{1,n}$. Таким образом, согласно (20) выполнена полиномиальная аппроксимация решения задачи Коши на подынтервале $[a_i, b_i]$. Значения искомой функции в узловых точках восстанавливаются через значения конечных разностей высших порядков по известной формуле

$$y_{ik} = y_{i0} + k\,\Delta y_{i0} + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_{i0} + \ldots + \Delta^k y_{i0}. \qquad (23)$$

Полученные значения y_{ik}, $k = \overline{1,n}$ представляют собой уточненное разностное решение в новом по отношению к методу Рунге–Кутта смысле. Вследствие того, что производная в узловых точках взята точно, полученное решение на практике оказывается более точным, чем решение, получаемое непосредственно по методу Рунге–Кутта.

Предложенный метод существенно уточняется путем неоднократного решения задачи на подынтервале, где в формулу для подсчёта правой части системы (21) подставляются значения функции, полученные уже на предыдущей итерации из формулы (23). С помощью численного эксперимента выяснено, что оптимальное число таких итераций – 10.

Метод реализуется в единой стандартной программе на языке Object Pascal системы Delphi 7.0, пользователю повторять данные выкладки и численный эксперимент не требуется. На вход программы подается правая часть системы, начальные данные, отрезок и шаг интегрирования.

Был проведен численный эксперимент с 20-ю дифференциальными уравнениями с нелинейной правой частью. Ниже приводится пример дифференциального уравнения с типичными результатами программы. Для сравнения брались уравнения с известными аналитическими решениями, с которыми сравнивались и метод Рунге–Кутта и предложенное уточнение.

Шаг метода Рунге–Кутта уменьшался до тех пор, пока дальнейшее уменьшение не ухудшало точности. По результатам эксперимента составлены таблицы сравнения абсолютных погрешностей в проверочных точках.

Пример. Рассматривается задача Коши

$$\begin{cases} y' = \cos(x+y), \\ y(0) = 0, \end{cases} \qquad (24)$$

и требуется решить её на отрезке $[0,10]$. Задача (24) при взятых начальных данных имеет точное аналитическое решение $y = -x + 2arctg(x)$, которое используется для нахождения абсолютной погрешности вычисления.

Таблица

Абсолютная погрешность приближенного решения уравнения $y' = \cos(x + y)$, $x \in [0,10]$ методом Рунге–Кутта и его кусочно-полиномиальным уточнением

x	Runge-Kutt	Newton
	h = $1{,}03.10^{-4}$	h = $1{,}03.10^{-4}$
1,0300	1,98951098651090E-**0017**	0,00000000000000E+**0000**
2,0600	1,96511643762998E-**0017**	1,35525271560688E-**0019**
3,0900	6,39679281766448E-**0017**	5,42101086242752E-**0020**
4,1200	1,13732807893729E-**0016**	0,00000000000000E+**0000**
5,1500	1,61567807743790E-**0015**	0,00000000000000E+**0000**
6,1800	2,78401433850828E-**0015**	4,33680868994202E-**0019**
7,2100	3,76781938982163E-**0015**	8,67361737988404E-**0019**
8,2400	4,65426308604577E-**0015**	8,67361737988404E-**0019**
9,2700	5,49733869537050E-**0015**	2,16840434497101E-**0018**

В левом столбце таблицы представлена абсолютная погрешность метода Рунге–Кутта, а в правом – предложенного уточнения.

Как видно из таблицы для данного примера максимальное значение абсолютной погрешности метода Рунге–Кутта составляет порядок 10^{-15}, а предложенного уточнения – 10^{-18}.

По результатам эксперимента можно заключить, что предложенная схема уточняет метод Рунге–Кутта, как правило, на 3 десятичных порядка.

Схема соединяет аналитическое и разностное приближение, позволяя вычислять решение как в узловых точках с разностным шагом, так и в промежутках между ними в силу интерполяции.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Аксайская Л.Н.* Разработка и исследование параллельных схем цифровой обработки сигналов на основе минимизации временной сложности вычисления функций / Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. – Таганрог, 2008. – 18 с.
2. *Ромм Я.Е.* Бесконфликтные и устойчивые методы детерминированной параллельной обработки / Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. – Таганрог: ТРТУ, 1998. – 546 с.; ВНТИ Центр. – № 05.990.001006.

Ромм Яков Евсеевич

Таганрогский государственный педагогический институт

E-mail: romm@List.ru

347936, г. Таганрог, ул. Инициативная, д. 48. Тел: 88634 60-18-99

Джанунц Гарик Апетович
E-mail: janunts@inbox.ru
Тел: 8- 918-506-90-24

Romm Yakov Evseevich
Taganrog State Pedagogical Institute
E-mail: romm@List.ru
48, Initsiativnaia, Taganrog, 347936. Phone: 88634 60-18-99

Dzhanunts Garik Apetovich
E-mail: janunts@inbox.ru
Phone: 8- 918-506-90-24

УДК 517.91: 518.1

Я.Е. Ромм, С.Г. Буланов

КОМПЬЮТЕРНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРИЛОЖЕНИЕМ К ОЦЕНКЕУСТОЙЧИВОСТИ СИНХРОННОГО ГЕНЕРАТОРА

Изложен метод компьютерного анализа устойчивости систем линейных ОДУ, определяющий необходимые и достаточные условия устойчивости при ограничениях общего вида на основе разностных схем. Представлены результаты компьютерного моделирования устойчивости систем и численный эксперимент применительно к анализу устойчивости синхронного генератора, работающего на сеть большой мощности. Анализ реализуется на персональном компьютере в режиме реального времени.

Метод; анализа; время.

Ya.E. Romm, S.G. Bulanov

THE COMPUTER ANALYSIS OF A STABILITY OF SYSTEMS OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH APPLICATION TO AN ESTIMATION STABILITIES OF THE SYNCHRONOUS GENERATOR

The method of the computer analysis of a stability of an ODE linear systems, defining necessary and sufficient conditions for stability is stated at restrictions of a general view on the basis of difference schemes. Outcomes of computer modelling of a stability of systems and numerical experiment with reference to the analysis of a stability of the synchronous generator working on a web of the big potency are presented. The analysis is realised on the personal computer in a condition of real time.

Method; analysis; time.

Рассматривается задача Коши для линейной однородной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{dt} = A(t)Y, \\ Y(t_0) = Y_0, \end{cases} \tag{1}$$