

**Дурягина Валентина Владимировна**

E-mail.: ares@infotecs.ru

Тел. 88634 371-606

**Kamyshnikova Tatyana Vladimirovna**

Taganrog Institute of Technology - Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education "Southern Federal University".

E-mail.: kamyshnata@mail.ru

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928. Phone: 88634-371-689

**Afonin Anatolje Andreevich**

E-mail.: ares@infotecs.ru

Phone. 88634 371-606

**Duriagina Veronika Vladimirovna**

E-mail.: vepanuka@mail.ru

Phone.88634 371-606

УДК 518.5.001.57

**В.В. Ершов**

## **ДВА ПОДХОДА К МОДЕЛИРОВАНИЮ ИНТРУЗИИ В РЕАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ**

*В статье представлены различные подходы к моделированию процессов геомиграции загрязнений в грунтовых водах.*

*Интрузия; модели геофильтрации и геомиграции; зона гидродинамической дисперсии; грунтовые воды.*

**V.V. Ershov**

## **TWO APPROACHES TO MODELING OF SEA INTRUSION IN REAL AREA**

*In article various approaches to modeling of geomigration processes of pollution in groundwater are presented.*

*Intrusion; geofiltration models; geomigration models; a zone of a hydrodynamic dispersion; groundwater.*

Изучение геофильтрации и геомиграции солей в почве и грунтах имеет большое значение при мелиорации земель, при строительстве гидротехнических сооружений, в вопросах экологии. Состав грунтовых вод, питающих водохранилища и пресные озера, сильно зависит от состояния почв и степени их засоления. Примеси и соли, содержащиеся в водоносных слоях, частично растворяются и вымываются и, поступая в водохранилища, снижают качество пресной воды.

Моделирование процессов геофильтрации в подобных областях, граничащих с водохранилищами, позволяет заранее рассчитать форму и положение области гидродинамической дисперсии, степень засоления, и в некоторых случаях уменьшить степень загрязнения водоема.

Похожие процессы возникают при разгрузке грунтовых вод в море, когда возникает зона контакта пресной воды с морской соленой водой. При интенсивной эксплуатации грунтовых вод клин морской воды начинает глубже проникать в водоносный пласт, вызывая засоление грунтовых вод. При некоторых условиях

клин может достигнуть скважин, посредством которых производится откачка грунтовой воды, что приведет к ухудшению ее качества. Поэтому расчет поведения интерфейса при различных условиях в пласте и при различных режимах скважины позволяет выбрать оптимальные условия эксплуатации.

Мощность зоны дисперсии сильно зависит от различия в свойствах жидкостей и от скорости фильтрационного потока. Она может меняться от нескольких метров (например, при разгрузке пресных грунтовых вод в соленое море) до десятков и сотен метров (в случае контакта засоленных грунтов с пресным водоемом). При малых скоростях потока и незначительном различии свойств жидкостей процессы диффузии и конвективного переноса происходят значительной активнее, что приводит к росту мощности зоны дисперсии. Нарастание скорости потока грунтовых вод, наоборот, препятствует диффузии и смещает зону дисперсии, одновременно уменьшая ее ширину (грунтовая вода «скользит» по поверхности клина морской воды).

Поэтому в одних случаях введение поверхности раздела (интерфейса) вполне оправдано, а в других можно говорить только о поверхностях равной концентрации (приближенно), лежащих внутри зоны дисперсии. Выбор модели фильтрации в каждой конкретной ситуации осуществляется чаще всего, исходя из опытных данных.

Так или иначе, при исследовании геофильтрации именно поведение интерфейса (или зоны дисперсии) представляет наибольший интерес. Рассмотрим далее два различных подхода к моделированию этого процесса.

Рассмотрим двухфазную фильтрацию в изотропной пористой среде, то есть движение в поровом пространстве двух различных жидкостей (или фаз). В тех случаях, когда физические характеристики фаз отличаются незначительно, между ними практически отсутствует межфазное натяжение, и флюиды являются смешивающимися. Фактически, можно говорить о движении в области фильтрации не двух различных фаз, а единой неоднородной жидкости с меняющимися от точки к точке физическими характеристиками (плотностью, вязкостью и т.п.). Естественно, в этом случае понятие четкого интерфейса неприменимо, а область фильтрации делится на три зоны: две зоны заполнены соответственно чистыми фазами, а переходная зона между ними – зона дисперсии – заполнена смесью двух фаз, причем концентрация одного флюида в другом плавно меняется от 0 до 1. Модель, описывающую фильтрацию такой неоднородной жидкости, называют моделью смешивающихся жидкостей.

В частности, при небольших различиях в солености (при прочих равных условиях) жидкости хорошо смешивается, поэтому применима вышеназванная модель. Заменяем также, что можно рассматривать и более общую задачу о контакте двух жидкостей с незначительно различающимися свойствами. Например, рассмотренные далее соображения применимы и в случае контакта двух областей, одна из которых заполнена некоторой жидкостью, а вторая содержит ту же жидкость, но загрязненную примесью.

Итак, рассмотрим поток неоднородной несжимаемой жидкости (смеси двух фаз) в пористой среде с пористостью  $n$ , не зависящей от времени, считая скорость фильтрации малой. На подобный поток распространяется закон Дарси, причем предполагается, что плотность  $\rho$  и вязкость  $\mu$  неоднородной смеси зависят от концентрации смеси  $c$  (то есть от концентрации одной фазы в другой фазе). Заметим, что применимость закона Дарси к неоднородной жидкости обоснована экспериментально, однако подразумевает рассмотрение потока в больших объемах.

Основными уравнениями модели являются уравнение Дарси и уравнение неразрывности:

$$\frac{1}{n} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho(c)} \nabla p - \frac{\mu(c)}{\rho(c)} \mathbf{k}^{-1} \mathbf{v} - g \nabla x_3,$$

$$n \frac{\partial \rho(c)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho(c) \mathbf{v}) = I.$$

При этом  $\rho(c) = c\rho_1 + (1-c)\rho_2$ ,  $\mu(c) = c\mu_1 + (1-c)\mu_2$ , где  $\rho_1$  и  $\mu_1$  – постоянные плотность и вязкость фазы 1,  $\rho_2$  и  $\mu_2$  – постоянные плотность и вязкость фазы 2.

Для учета гидродинамической дисперсии смеси (то есть для определения функций  $\rho(c)$  и  $\mu(c)$ ) модель необходимо дополнить уравнением конвекции-диффузии, которое связывает концентрацию  $c$  со скоростью фильтрации  $\mathbf{v}$ . Пренебрегая инерционными членами и влиянием температуры на диффузионный поток, запишем уравнение конвекции-диффузии в виде

$$n \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c - \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla c) = S,$$

где  $\mathbf{D}$  – обобщенный коэффициент диффузии (учитывающий конвективную и молекулярную диффузию), который может быть функцией координат, но не зависит от времени, а функция  $S = S(\mathbf{x}, t)$  моделирует внешние источники.

Рассматривая эту модель в некоторой модельной области, необходимо дополнить ее граничными и начальными условиями и, возможно, уравнением свободной поверхности.

Если межфазным натяжением между двумя жидкостями пренебречь нельзя, то более приемлема модель несмешивающихся жидкостей. Проникновение одной фазы в другую обусловлено поверхностными силами натяжения, действующими на границе фаз, и, как следствие, капиллярным давлением на границе. Процесс проникновения, называемый впитыванием, заключается в следующем. Жидкость 1 (относительно смачивающая) самопроизвольно проникает по стенкам пор, вытесняя жидкость 2 (относительно несмачивающую), до тех пор, пока не будет достигнуто равновесие. При этом жидкость 1 скапливается в тех порах, которые обеспечивают наибольшую кривизну поверхности раздела. Очевидно, что это приводит к заполнению в первую очередь наиболее мелких пор.

В частности, данная модель приближенно применима и к фильтрации грунтовых вод, когда пресная вода граничит с морской водой, обладающей значительной соленостью. Несмотря на то, что и в этом случае существует переходная зона, в которой присутствуют обе фазы (из-за сложной формы границы раздела и частичного смешивания), ее мощность невелика, и можно ввести в рассмотрение поверхность раздела, сглаживающую границу между фазами.

Опыт показывает, что при фильтрации через пористую среду двух несмешивающихся жидкостей каждая из них избирает собственные пути, соответствующие степени насыщения. Поэтому качественно можно говорить о независимом движении двух фаз. Учет этого факта позволяет применить концепцию проницаемости, считая, что закон Дарси справедлив для каждой фазы в отдельности:

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{k_1}{\mu_1}(\nabla p_1 + \rho_1 g \nabla x_3), \quad \mathbf{v}_2 = -\frac{k_2}{\mu_2}(\nabla p_2 + \rho_2 g \nabla x_3),$$

где индексы нумеруют фазы, а  $k_1$  и  $k_2$  – так называемые эффективные проницаемости. В первом приближении эффективные проницаемости зависят от геометрии среды, ее смачиваемости и степени насыщения, и не зависят от давления и параметров потока. Удобно ввести относительные проницаемости фаз по формулам

$$k_{r1} = \frac{k_1}{k}, \quad k_{r2} = \frac{k_2}{k},$$

где  $k$  – проницаемость среды при ее насыщении только одной фазой. Тогда закон Дарси примет вид:

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{kk_{r1}}{\mu_1}(\nabla p_1 + \rho_1 g \nabla x_3), \quad \mathbf{v}_2 = -\frac{kk_{r2}}{\mu_2}(\nabla p_2 + \rho_2 g \nabla x_3).$$

Вводя насыщенности фаз  $s_1 = s_1(\mathbf{x}, t)$ ,  $s_2 = s_2(\mathbf{x}, t)$ , давления компонент  $p_1 = p_1(s_1)$ ,  $p_2 = p_2(s_2)$  и полагая, что  $k_{r1} = k_{r1}(s_1)$ ,  $k_{r2} = k_{r2}(s_2)$ , основные уравнения фильтрации запишем в виде:

$$\frac{1}{n} \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_1} \nabla p_1 - \frac{\mu_1}{k_{r1} k \rho_1} \mathbf{v}_1 - g \nabla x_3,$$

$$\frac{\partial(\rho_1 n s_1)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_1 \mathbf{v}_1) = \rho_1 I_1,$$

$$\frac{1}{n} \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_2} \nabla p_2 - \frac{\mu_2}{k_{r2} k \rho_2} \mathbf{v}_2 - g \nabla x_3,$$

$$\frac{\partial(\rho_2 n s_2)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_2 \mathbf{v}_2) = \rho_2 I_2.$$

Эти уравнения решаются в областях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , заполненных разными фазами. Насыщенности связаны очевидным соотношением

$$s_1 + s_2 = 1,$$

а давление на интерфейсе, вообще говоря, испытывает скачок

$$p_1 - p_2 = P_c,$$

где  $P_c$  – капиллярное давление между двумя фазами.

Отметим принципиальную трудность при реализации данной модели. Положение интерфейса известно только в начальный момент времени, поэтому уравнение интерфейса  $F(\mathbf{x}, t) = 0$  содержит неизвестную функцию  $F$ , подлежащую определению, то есть положение интерфейса является частью искомого решения задачи фильтрации.

На интерфейсе выполняются условия

$$\frac{dF}{dt} \equiv \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v}_{f1} \cdot \nabla F = 0 \quad \text{в } \Omega_1,$$
$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v}_{f2} \cdot \nabla F = 0 \quad \text{в } \Omega_2.$$

Заметим, что модель смешивающихся жидкостей более универсальна по следующим соображениям. Во-первых, в большинстве практических задач свойства жидкостей отличаются незначительно. Это верно и для солончаковых грунтовых вод, и для водоносных пластов, граничащих с морем. Поэтому в подавляющем большинстве случаев ширина зоны дисперсии достаточно велика, что не позволяет аппроксимировать ее поверхностью интерфейса. Во-вторых, экспериментальные данные позволяют утверждать, что даже в случае значительных концентраций соли в морской воде зона дисперсии существует и имеет некоторую ширину (порядка нескольких метров). Наконец, ввиду сложных условий на поверхности интерфейса в модели несмешивающихся жидкостей необходимо, как правило, прибегать к ее упрощению, что не может не влиять на результаты моделирования. Однако вторая модель, несмотря на сложность ее реализации, становится более точной при значительных различиях в свойствах жидкостей (например, при прохождении грунтовых вод через сильно засоленные участки почвы).

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Bear J., Verruijt A.* Modeling Groundwater Flow and Pollution. D.Reidel Publishing Company, 1987.
2. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Аддитивные схемы для задач математической физики. – М.: Наука, 1999.
3. *Васильев В.С., Целых А.Н.* Принятие прогнозных решений в экологических задачах на основе методов численного моделирования. – Ростов-на-Дону: Изд-во Северо-Кавказского научного центра высшей школы, 1999.
4. *Колдоба А.В., Повецenco Ю.А., Самарская Е.А., Тишкин В.Ф.* Методы математического моделирования окружающей среды. – М.: Наука, 2000.

#### **Ершов Виталий Владимирович**

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге  
E-mail.: [vetalfish@rambler.ru](mailto:vetalfish@rambler.ru)  
347928, Таганрог, ГСП 17А, Некрасовский, 44. Тел: 88634-371-689

#### **Ershov Vitaliy Vladimirovich**

Taganrog Institute of Technology - Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education "Southern Federal University"  
E-mail.: [vetalfish@rambler.ru](mailto:vetalfish@rambler.ru)  
44, Nekrasovsky, Taganrog, 347928. Phone: 88634-371-689