Vasilenko Sergey Valerevich
Taganrog Institute of Technology - Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”
Email: Salouma1@mail.ru
44, Nekrasovsky, Taganrog, 347928. Phone: 88634-371-689

УДК 518.5.001.57

Т.В. Камышникова, А.А. Афонин, В.В. Дурягина

ВЫВОД ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ПРИМЕСЕЙ В ВОДОХРАНИЛИЩЕ

Изучение гидрохимических характеристик вод водохранилищ является весьма актуальным, так как их изменчивость, как правило, является отражением возможных отклонений в функционировании водоема. И здесь математическое моделирование может оказать неоценимую помощь.

Модель «мелкой воды»; адвективно-диффузионное уравнение.

T.V. Kamyshnikova, A.A. Afonin, V.V. Duryagina

DISTRIBUTION OF CONSUMERS BETWEEN SOURCES OF ELECTRIC ENERGY

Water basin hydro chemical characteristics’ studying is actual problem because of variability as possible deviations’ reflection in water basin functioning. The best method of this problem solving is mathematical modeling.

Shallow water model; the advection-diffusion equation.

В последние десятилетия научные организации все больше внимания стали уделять исследованиям современных и ожидаемых антропогенных изменений гидрологических и гидрохимических условий водоемов, включая химические загрязнения воды. Загрязнение нарушает гидрохимический режим водохранилищ, вызывает в частности снижение концентрации кислорода в воде. Основной источник загрязнения водных бассейнов – сброс недостаточно очищенных промышленных стоков, а также возвратных вод с полей орошения. К наиболее распространенным компонентам загрязнения относятся нефтепродукты, фенольные соединения, пестициды (хлор и фосфорорганические ядохимикаты), детергенты (или СПАВ–синтетические поверхностно-активные вещества).

Процессы самоочищения в водотоках бассейна идут с недостаточной интенсивностью, вследствие чего поступившие со сточными водами органические токсиканты не успевают минерализоваться в пределах водотока и около половины их объема поступает в водоем. Прибрежные воды водоема, в которые непосредственно поступают сточные и речные воды, содержащие вредные вещества, испытывают наиболее сильное влияние загрязнения и отличаются более высокими концентрациями загрязняющих веществ по сравнению с водами открытой части водохранилища. Эти концентрации меняются от года к году, как в зависимости от величин сбросов сточных вод, так и под влиянием течений, весьма изменчивых по времени [1].

Развитие методов расчета поля примесей, позволяющих выполнить анализ эволюции поля при вариации параметров сброса отходов в меняющихся метеорологических условиях, необходимо для оценки экологических последствий функционального режима акватории мелководных водоемов [2].

Если на практике нет необходимости решать полные трехмерные уравнения, то как правило размерность задачи снижают применяя осреднение по глубине и пользуясь определенными предположениями, упрощающими решение гидродинамических уравнений и уравнений переноса и диффузии. Усреднение в двумерных моделях по вертикальной координате, предшествующее дифференцированию по пространственным переменным без соответствующего учета изменения полной глубины. Либо с достижением требуемых свойств «простейшими», зачастую искусственными приемами, приводит к появлению дополнительных источников импульса или энергии, и как следствие, нарушению соответствующих законов сохранения. Горизонтальные размеры водохранилищ существенно превышают вертикальные (модель «мелкой воды»). Модель распространения загрязняющих примесей в мелководном водоеме включает в себя гидродинамическую задачу мелкой воды и задачу переноса примеси. Уравнения мелкой воды составляют самостоятельную задачу расчета гидродинамики мелкого водоема, которая была рассмотрена вне рамок данной работы, и результаты которой используются в данной работе при решении задачи распространения примеси в мелководном водоеме [3], [6]. Рассмотрим пространственно-трехмерную систему уравнений распространения загрязнений:

$$u'_x + v'_y + w'_z = 0, \tag{1}$$

$$u'_t + (u^2)'_x + (uv)'_y + (uw)'_z =$$
$$= -\frac{1}{\rho} p'_x - \varphi'_x + \frac{\eta}{\rho}\left(u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}\right) + 2\Omega\left(v\sin\vartheta - w\sin\vartheta\right), \tag{2}$$

$$v'_t + (uv)'_x + (v^2)'_y + (vw)'_z =$$
$$= -\frac{1}{\rho} p'_y - \varphi'_y + \frac{\eta}{\rho}\left(v''_{xx} + v''_{yy} + v''_{zz}\right) - 2\Omega u\sin\vartheta, \tag{3}$$

$$w'_t + (uw)'_x + (vw)'_y + (w^2)'_z =$$
$$= -\frac{1}{\rho} p'_z - \varphi'_z + \frac{\eta}{\rho}\left(w''_{xx} + w''_{yy} + w''_{zz}\right) + 2\Omega u\cos\vartheta. \tag{4}$$

Уравнение (1) − уравнение неразрывности, уравнения (2) - (4) – уравнения Навье–Стокса для вязкой (в линейном приближении) несжимаемой (плотность $\rho = const$) жидкости во вращающейся с угловой скоростью $\vec{\Omega} = \Omega\left(\cos\vartheta\cdot\vec{j} + \sin\vartheta\cdot\vec{k}\right)$, где $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ − единичные орты, ρ − полное гидростатическое давление; φ − гравитационный потенциал; η − первый коэффициент вязкости в одном поле тяжести данной математической стстемы. $\nabla\varphi = -\vec{g} = -g\vec{k} = const$; $\rho_0 = \rho_0(x,y,z,t)$; $\rho = \rho_0 + \rho g(\varsigma - z)$; $\nabla p = g\left(\varsigma'_x\vec{i} + \varsigma'_y\vec{j} - \vec{k}\right)$, $-h \le z \le \varsigma$, где $\varsigma(x,y,t)$ – поднятие уровня свободной поверхности жидкости по отношению к невозмущенному состоянию; $h(x,y,t)$ – высота столба жидкости под невозмущенной поверхностью.

Граничные условия:

$$\eta\frac{\partial u}{\partial z}=-\tau_x,\quad \eta\frac{\partial v}{\partial z}=-\tau_y \text{ на } z(x,y,t), \tag{5}$$

где τ_x,τ_y – составляющие касательного трения ветра. На дне и боковых границах условия прилипания:

$$u=v=w=0. \tag{6}$$

Начальные условия:

$$\begin{gathered}u(x,y,z,0)=u_0,\quad v(x,y,z,0)=v_0,\\ w(x,y,z,0)=w_0,\quad \rho(x,y,z,0)=\rho_0,\end{gathered} \tag{7}$$

Интегрированием уравнений неразрывности и НавьеСтокса (1) – (4) по вертикальной координате z от $-h$ до ς получены уравнения гидродинамической модели, учитывающей испарение жидкости и выпадение осадков ((w/ρ) – испаряющийся – выпадающий в виде осадков в единицу времени слой) [4].

$$H_x'+U_x+V_y+\frac{w}{\rho}=0, \tag{8}$$

$$\begin{gathered}U_t'+\left(\frac{UU}{H}\right)_x'+\left(\frac{VU}{H}\right)_y'+C\frac{wU}{\rho H}+gH\varsigma_x'=\\ =\frac{\eta}{\rho}\left(U_{xx}''+U_{yy}''\right)-k\frac{U}{H}+H(f_s)_x+2\Omega V\sin\vartheta,\end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered}V_t'+\left(\frac{UV}{H}\right)_x'+\left(\frac{VV}{H}\right)_y'+C\frac{wV}{\rho H}+gH\varsigma_y'=\\ =\frac{\eta}{\rho}\left(V_{xx}''+V_{yy}''\right)-k\frac{V}{H}+H(f_s)_y+2\Omega V\sin\vartheta,\end{gathered} \tag{10}$$

где слагаемые, имеющие вид и размерность граничных вязких напряжений на поверхности жидкости отнесены на счет обобщенной силы ветра о поверхность f_s, а на дне – на счет обобщенной силы трения о дно $-\frac{k}{H^2}\left(U_i+V_j\right)$, $U=\int_{-h}^{\varsigma}udz$, $V=\int_{-h}^{\varsigma}vdz$, $u=u(x,y,z,t)$ и $v=v(x,y,z,t)$ – горизонтальные компоненты вектора скорости жидкости в точке (x,y,z) в момент времени t. $H=h+\varsigma$ – полная глубина. Для описания поля некоторой субстанции обычно используется трехмерное адвективно-диффузионное уравнение [4]:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\overline{v}\nabla S-\sigma S=\mu\nabla^2 S+\frac{\partial}{\partial z}\left(v\frac{\partial S}{\partial z}\right)+f, \quad (11)$$

где S – концентрация субстанции; $\overline{v}=(u,v,w)$ – вектор скорости водного потока; μ, v коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной диффузии; σS характеризует взаимодействие вещества с водой; $f=f(x,y,z,t)$ – функция источников (стоков) веществ. Примесь предполагается пассивной, тоесть задаваемое поле скорости (u,v,w) не зависит от S. Рассмотрим краевую задачу для уравнения (11) в области $Q=\left\{\overline{\Omega}(x,y,z),-h\le z\le\varsigma,t>0\right\}$, где боковая поверхность Ω является объединением двух частей: $\overline{\Omega}=\Omega_1\bigcup\Omega;$ $\Omega_1(x,y,z)$ поверхность дна, $\Omega(x,y,z)$ боковая цилиндрическая поверхность.

Запишем граничные условия по вертикали:

$$v\frac{\partial S}{\partial n}=0, \quad z=\varsigma(x,y,t), \quad 12)$$

$$v\frac{\partial S}{\partial n}=0, \quad z=-h(x,y,t), \quad (13)$$

где n – внешняя нормаль. На боковой поверхности:

$$\mu\frac{\partial S}{\partial n}=0. \quad (14)$$

Начальное состояние характеризуется фоном:

$$S\big|_{t=0}=S_0. \quad (15)$$

Остановимся на двумерном случае. В области $\Omega_2=\left\{x,y\in\Omega,t\ge 0\right\}$ поле концентрации примеси описывается уравнением [4].

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle S\rangle+\frac{\partial}{\partial x}\langle uS\rangle+\frac{\partial}{\partial y}\langle vS\rangle+\sigma\langle S\rangle=\mu\nabla^2\langle S\rangle+\langle f\rangle, \quad (16)$$

$\langle S\rangle=\int\limits_{-h}^{\varsigma}S(x,y,z,t)dz=\overline{S}H,$ $\langle f\rangle=\int\limits_{-h}^{\varsigma}f(x,y,z,t)dz,$ которое получается интегрированием по вертикали трехмерного уравнения (11) по вертикальной координате z от $-h$ до ς с условием $\left.\frac{\partial S}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0.$

Недивергентная форма этого уравнения:

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial \bar{S}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{S}}{\partial y}-\sigma \bar{S}=\mu H^{-1}\nabla^{2}(\bar{S}H)+f, \quad (17)$$

где $H = h + \varsigma$. Иногда его используют в виде

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial \bar{S}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{S}}{\partial y}-\sigma \bar{S}=\mu H^{-1}\nabla^{2}(\bar{S}H)+f, \quad (18)$$

где $S=\bar{S}$, $v=(u,v)=\bar{V}$. Действительно, интегрируя слагаемые уравнения (11) по вертикали почленно будем иметь:

$$\int_{-h}^{\varsigma}\frac{\partial S}{\partial t}dz=\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{-h}^{\varsigma}Sdz\right)-\frac{\partial \xi}{\partial t}(S)\Big|_{z=\varsigma}-\frac{\partial h}{\partial t}(S)\Big|_{z=-h},$$

$$\int_{-h}^{\varsigma}\frac{\partial Su}{\partial x}dz=\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{-h}^{\varsigma}uSdz\right)-\frac{\partial \xi}{\partial x}(uS)\Big|_{z=\varsigma}-\frac{\partial h}{\partial x}(uS)\Big|_{z=-h},$$

$$\int_{-h}^{\varsigma}\frac{\partial Sv}{\partial y}dz=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{-h}^{\varsigma}vSdz\right)-\frac{\partial \xi}{\partial y}(vS)\Big|_{z=\varsigma}-\frac{\partial h}{\partial y}(vS)\Big|_{z=-h},$$

$$\int_{-h}^{\varsigma}\frac{\partial Sw}{\partial y}dz=\frac{\partial}{\partial z}\left(\int_{-h}^{\varsigma}vwdz\right)=-(wS)\big|_{z=\varsigma}-(wS)\big|_{z=-h},$$

$$\int_{-h}^{\varsigma}\frac{\partial^{2} S}{\partial x^{2}}dz=\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{-h}^{\varsigma}\frac{\partial S}{\partial x}dz\right)-\frac{\partial \xi}{\partial x}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)\Big|_{z=\varsigma}-\frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)\Big|_{z=-h},$$

$$\int_{-h}^{\varsigma}\frac{\partial^{2} S}{\partial y^{2}}dz=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{-h}^{\varsigma}\frac{\partial S}{\partial y}dz\right)-\frac{\partial \xi}{\partial y}\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)\Big|_{z=\varsigma}-\frac{\partial h}{\partial y}\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)\Big|_{z=-h},$$

$$\int_{-h}^{\varsigma}\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial S}{\partial z}\right)dz=\frac{\partial}{\partial z}\left(\int_{-h}^{\varsigma}v\frac{\partial S}{\partial z}dz\right)=v\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)\Big|_{z=\varsigma}-v\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)\Big|_{z=-h},$$

$$\int_{-h}^{\varsigma}\sigma Sdz=\sigma\int_{-h}^{\varsigma}Sdz; \quad \int_{-h}^{\varsigma}fdz=f.$$

С учетом граничных условий для компонентов скоростей задачи (1) – (4) и задачи (11) – (14) получим двумерное уравнение (18). Решение уравнения (18) для однородной несжимаемой жидкости ищется в области Ω с границей $\partial\Omega$ на участке $\partial\Omega_1$ – которой жидкость втекает, $\partial\Omega_2$ – вытекает, $\partial\Omega_0$ – непроницаемая часть границы [5], [6]. Имеют место граничные условия: на твердой границе $\partial\Omega_0$ ставится условие непротекания:

$$\frac{\partial S}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega_0}=0, \quad (19)$$

где n – нормаль к границе $\partial\Omega_0$. На участке $\partial\Omega_1$ стока в водоем задается значение

$$S\big|_{\partial\Omega_1} = S_1, \tag{20}$$

На участке выпуска воды, или на открытой границе $\partial\Omega_2$ ставится условие III рода:

$$\left.\frac{\partial S}{\partial n} + gS\right|_{\partial\Omega_2} = 0, \quad g = \begin{cases} v_n, v_n \geq 0 \\ 0, v_n \leq 0 \end{cases}, \tag{21}$$

где v_n – скорость течения по нормали $\overline{n}$ к $\partial\Omega_2$. Решение ищется при начальных данных:

$$S\big|_{t=0} = S_0(x, y). \tag{22}$$

Входящие в уравнение (18) и в граничные условия (19) – (21) компоненты вектора скорости и форму свободной границы можно считать известными функциями [6].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гидрометеорология и гидрохимия морей СССР. – СПб.: Гидрометеоиздат, 1991. – Т. 5. – 236 с.

2. *Вольцингер Н.Е., Клеванный К.А., Пеликовский Е.Н.* Длиноволновая динамика прибрежной зоны. – Л.: Гидрометеоиздат, 1989 – 271 с.

3. *Васильев В.С., Сухинов А.И.* О моделировании ветровых течений в Таганрогском заливе с использованием квазиоптимальных сеток// Областная научно-техническая конференция, посвященная дню радио. – Ростов-на-Дону, 1993. – 26 с.

4. *Васильев В.С., Целых А.Н.* Принятие прогнозных решений в экологических задачах на основе методов численного моделирования. – Ростов-на-Дону: Изд-во Северо-Кавказского научного центра высшей школы, 1999. – 48 с.

5. *Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Самарская Е.А., Тишкин В.Ф.* Методы математического моделирования окружающей среды. – М.: Наука, 2000. – 391 с.

6. Камышникова Т.В. Математическое моделирование движения воздушной среды и загрязняющих примесей от автотранспорта в условиях городской застройки: дис. на соискание ученой степени канд тех наук. – Таганрог, 2003. – С. 182-191.

Камышникова Татьяна Владимировна

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г.Таганроге

E-mail.: kamyshtata@mail.ru

347928, Таганрог, ГСП 17А, Некрасовский, 44. Тел: 88634-371-689

Афонин Анатолий Андреевич

E-mail.: ares@infotecs.ru

Тел. 88634 371-606

Дурягина Валентина Владимировна
E-mail.: ares@infotecs.ru
Тел. 88634 371-606

Kamyshnikova Tatyana Vladimirovna
Taganrog Institute of Technology - Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.
E-mail.: kamyshtata@mail.ru
44, Nekrasovsky, Taganrog, 347928. Phone: 88634-371-689

Afonin Anatolje Andreevich
E-mail.: ares@infotecs.ru
Phone. 88634 371-606

Duriagina Veronika Vladimirovna
E-mail.: vepanuka@mail.ru
Phone.88634 371-606

УДК 518.5.001.57

В.В. Ершов

ДВА ПОДХОДА К МОДЕЛИРОВАНИЮ ИНТРУЗИИ В РЕАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

В статье представлены различные подходы к моделированию процессов геомиграции загрязнений в грунтовых водах.

Интрузия; модели геофильтрации и геомиграции; зона гидродинамической дисперсии; грунтовые воды.

V.V. Ershov

TWO APPROACHES TO MODELING OF SEA INTRUSION IN REAL AREA

In article various approaches to modeling of geomigration processes of pollution in groundwater are presented.

Intrusion; geofiltration models; geomigration models; a zone of a hydrodynamic dispersion; groundwater.

Изучение геофильтрации и геомиграции солей в почве и грунтах имеет большое значение при мелиорации земель, при строительстве гидротехнических сооружений, в вопросах экологии. Состав грунтовых вод, питающих водохранилища и пресные озера, сильно зависит от состояния почв и степени их засоления. Примеси и соли, содержащиеся в водоносных слоях, частично растворяются и вымываются и, поступая в водохранилища, снижают качество пресной воды.

Моделирование процессов геофильтрации в подобных областях, граничащих с водохранилищами, позволяет заранее рассчитать форму и положение области гидродинамической дисперсии, степень засоления, и в некоторых случаях уменьшить степень загрязнения водоема.

Похожие процессы возникают при разгрузке грунтовых вод в море, когда возникает зона контакта пресной воды с морской соленой водой. При интенсивной эксплуатации грунтовых вод клин морской воды начинает глубже проникать в водоносный пласт, вызывая засоление грунтовых вод. При некоторых условиях