

E-mail: SFilist@gmail.com.
305004, г. Курск, ул. Челюскинцев, 19, тел.: (4712)587098.
Кафедра биомедицинской инженерии, профессор, д.т.н.

Filist Sergey Alexseevich
SEI HVT «Kursk state technical university».
E-mail: SFilist@gmail.com.
19, street of Chelyuskintsev, Kursk, 305004, Russia, Phone (4712)587098.
Department of Biomedical Engineering, professor, Dr. Sci. Tech.

УДК 612.171:536.8

И.С. Лебеденко, Е.С. Новоселова

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАСОСНОЙ ФУНКЦИИ СЕРДЦА

Проведено обоснование построения расчетной схемы насосной функции сердца, составлена система дифференциальных уравнений на основе данных физиологии, получены графики изменения давления в предсердиях, желудочках, графики расхода крови.

Математическая модель; насосная функция сердца.

I.S. Lebedenko, E.S. Novoselova

MATHEMATICAL MODELING PUMP FUNCTION OF HEART

Calculation scheme of pump heart function presents. This scheme used for differential equation system composing, for calculation and physiology parameters based selection of equation coefficients. Solution of equation system allows to plot time diagrams heart volumes pressure, time diagrams of input and output heart volumes flows.

Mathematical Model; Pump Function of Heart.

С технической точки зрения сердце может быть представлено в виде четырехкамерного насоса. В этом насосном агрегате предсердия выполняют функцию насосов низкого давления (подкачки), а желудочки выполняют функции насосов высокого давления. Эти насосы управляются системой авторегуляции. С точки зрения технической аналогии упругость сосудов можно моделировать упругими камерами переменного объема, т. е. цилиндрами с подпружиненными поршнями [1].

В соответствии с вышеизложенным была получена расчетная схема механико-гидравлической системы сердца и рассчитаны коэффициенты модели [2].

При моделировании был принят ряд допущений: жесткость сердечной мышцы считается постоянной во время систолы; площади открытия клапанов постоянны во время систолы (клапаны открываются и закрываются мгновенно); масса жидкости, перемещаемая при открытии клапана, неизменна; вязкость крови постоянна; клапаны считаются безынерционными, а их диаметр – постоянным.

Исходя из известных уравнений динамики [3], составлена система уравнений, описывающая насосную функцию сердца.

Правый желудочек

Уравнение движения верхнего поршня, моделирующего воздействие со стороны электрической системы регуляции, имеет вид:

$$m_1 \cdot \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + h \cdot \frac{dx_1(t)}{dt} + k_1 \cdot x_1(t) = F_1(t) - P_{пж}(t) \cdot S_1. \quad (1)$$

Уравнение движения поршня, описывающее жесткость сосудов:

$$m_2 \cdot \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + h \cdot \frac{dx_2(t)}{dt} + k_2 \cdot x_2(t) = P_{ла}(t) \cdot S_2. \quad (2)$$

Согласно закону сохранения массы можно записать:

$$\sum Q_1 - \sum Q_2 = \frac{dV}{dt} + \frac{V}{B} \frac{dP}{dt}, \quad (3)$$

где $\sum Q_1 - \sum Q_2$ – объемный расход.

Поскольку кровь рассматривается как несжимаемая жидкость, то уравнение, описывающее изменение объема камер сердца, примет вид:

$$\frac{dV}{dt} = \sum Q_1 - \sum Q_2. \quad (4)$$

С другой стороны, уравнение расхода жидкости можно записать следующим образом:

$$G = \rho S v,$$

где ρ – плотность жидкости, S – площадь сечения отверстия, v – скорость течения жидкости.

Скорость v можно выразить через разность давлений:

$$v = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho}}, \text{ тогда } G = S \sqrt{2\rho(P_1 - P_2)}. \quad (5)$$

Таким образом, кровь перекачивается из области высокого давления в область более низкого давления. Кровь по всей системе кровообращения течет лишь в одном направлении, чему способствует наличие клапанов в сердце, препятствующих обратному току крови.

Для разрабатываемой модели уравнение расхода жидкости примет вид:

$$G = \frac{1}{4} \pi d^2 \sqrt{2\rho(P_1 - P_2)}. \quad (6)$$

Уравнение расхода крови через митральный клапан между правым предсердием и правым желудочком:

$$\text{если } P_{пп} > P_{пж}, \text{ то } G_1 = \frac{1}{4} \pi d_1^2 \sqrt{2\rho(P_{пп}(t) - P_{пж}(t))}; \quad (7)$$

$$\text{если } P_{пп} < P_{пж}, \text{ то } G_1 = 0. \quad (8)$$

Уравнение расхода крови через клапан легочной артерии:

$$\text{если } P_{пж} > P_{ла}, \text{ то } G_2 = \frac{1}{4} \pi d_2^2 \sqrt{2\rho(P_{пж}(t) - P_{ла}(t))}; \quad (9)$$

$$\text{если } P_{пж} < P_{ла}, \text{ то } G_2 = 0. \quad (10)$$

Уравнение Пуазейля для расхода крови через капилляры малого круга кровообращения:

$$\text{если } P_{ла} > P_{лв}, \text{ то } G_3 = \frac{P_{ла}(t) - P_{лв}(t)}{X_1}; \quad (11)$$

$$\text{если } P_{ла} < P_{лв}, \text{ то } G_3 = 0. \quad (12)$$

Согласно закону сохранения энергии, вся полезная работа сердца переходит в энергию крови. Поэтому полную работу сердца за систолу можно рассчитать как сумму потенциальной и кинетической энергии крови. В покое “кинетическая” часть работы сердца составляет лишь 2-5 % от полной работы сердца, поэтому при

расчетах ею можно пренебречь. Тогда уравнения, описывающие изменения давлений в правом желудочке и легочной артерии, примут вид:

– уравнение давления в правом желудочке:

$$\frac{dP_{пж}(t)}{dt} = \frac{P_{пж}(t) \cdot K}{S_1(x_{01} - x_1(t))} \cdot \left(\frac{1}{\rho} (G_1(t) - G_2(t)) + S_1 \cdot \frac{dx_1(t)}{dt} \right). \quad (13)$$

– дополнительное уравнение давления в легочной артерии будет иметь вид:

$$\frac{dP_{ла}(t)}{dt} = \frac{P_{ла}(t) \cdot K}{S_2(x_{02} - x_2(t))} \cdot \left(\frac{1}{\rho} (G_2(t) - G_3(t)) + S_2 \cdot \frac{dx_2(t)}{dt} \right). \quad (14)$$

Воздействие электрической системы авторегуляции преобразуется в механическое. Сила управления задается следующим образом:

$$F_1(t) = \begin{cases} F_1 & \text{при } 0,2c \leq t \leq 0,5c; \\ 0 & \text{при } 0 \leq t < 0,2c \text{ и } 0,5c < t < 0,8c. \end{cases} \quad (15)$$

Левое предсердие

Уравнение движения поршня, описывающее жесткость сосудов:

$$m_3 \cdot \frac{d^2 x_3(t)}{dt^2} + h \cdot \frac{dx_3(t)}{dt} + k_3 \cdot x_3(t) = P_{лв}(t) \cdot S_3. \quad (16)$$

Уравнение движения верхнего поршня, моделирующего воздействие со стороны электрической системы регуляции, имеет вид:

$$m_4 \cdot \frac{d^2 x_4(t)}{dt^2} + h \cdot \frac{dx_4(t)}{dt} + k_4 \cdot x_4(t) = F_2(t) - P_{лп}(t) \cdot S_4. \quad (17)$$

Уравнение расхода крови через клапан между легочной веной и левым предсердием:

$$\text{если } P_{лв} > P_{лп}, \text{ то } G_4 = \frac{1}{4} \pi d_3^2 \sqrt{2\rho(P_{лв}(t) - P_{лп}(t))}; \quad (18)$$

$$\text{если } P_{лв} < P_{лп}, \text{ то } G_4 = 0. \quad (19)$$

Уравнение расхода крови через клапан между левым предсердием и левым желудочком:

$$\text{если } P_{лп} > P_{лж}, \text{ то } G_5 = \frac{1}{4} \pi d_4^2 \sqrt{2\rho(P_{лп}(t) - P_{лж}(t))}; \quad (20)$$

$$\text{если } P_{лп} < P_{лж}, \text{ то } G_5 = 0. \quad (21)$$

Дополнительное уравнение давления в легочной вене:

$$\frac{dP_{лв}(t)}{dt} = \frac{P_{лв}(t) \cdot K}{S_3(x_{03} - x_3(t))} \cdot \left(\frac{1}{\rho} (G_3(t) - G_4(t)) + S_3 \cdot \frac{dx_3(t)}{dt} \right). \quad (22)$$

Уравнение давления в левом предсердии:

$$\frac{dP_{лп}(t)}{dt} = \frac{P_{лп}(t) \cdot K}{S_4(x_{04} - x_4(t))} \cdot \left(\frac{1}{\rho} (G_4(t) - G_5(t)) + S_4 \cdot \frac{dx_4(t)}{dt} \right). \quad (23)$$

Воздействие электрической системы авторегуляции преобразуется в механическое. Сила управления задается следующим образом:

$$F_2(t) = \begin{cases} F_2 & \text{при } 0,1c \leq t \leq 0,2c; \\ 0 & \text{при } 0 \leq t < 0,1c \text{ и } 0,2c < t < 0,8c. \end{cases} \quad (24)$$

Левый желудочек

Уравнение движения верхнего поршня, моделирующего воздействие со стороны электрической системы регуляции, имеет вид:

$$m_5 \cdot \frac{d^2 x_5(t)}{dt^2} + h \cdot \frac{dx_5(t)}{dt} + k_5 \cdot x_5(t) = F_3(t) - P_{лж}(t) \cdot S_5. \quad (25)$$

Уравнение движения поршня, описывающее жесткость сосудов:

$$m_6 \cdot \frac{d^2 x_6(t)}{dt^2} + h \cdot \frac{dx_6(t)}{dt} + k_6 \cdot x_6(t) = P_a(t) \cdot S_6. \quad (26)$$

Уравнение расхода крови через клапан между левым желудочком и аортой:

если $P_{лж} > P_a$, то $G_6 = \frac{1}{4} \pi d_5^2 \sqrt{2\rho(P_{лж}(t) - P_a(t))}$; (27)

если $P_{лж} < P_a$, то $G_6 = 0$. (28)

Уравнение Пуазейля для расхода крови через капилляры большого круга кровообращения:

если $P_a > P_{пв}$, то $G_7 = \frac{P_a(t) - P_{пв}(t)}{X_2}$; (29)

если $P_a < P_{пв}$, то $G_7 = 0$. (30)

Уравнение давления в левом желудочке:

$$\frac{dP_{лж}(t)}{dt} = \frac{P_{лж}(t) \cdot K}{S_5(x_{05} - x_5(t))} \cdot \left(\frac{1}{\rho} (G_5(t) - G_6(t)) + S_5 \cdot \frac{dx_5(t)}{dt} \right). \quad (31)$$

Дополнительное уравнение давления в аорте:

$$\frac{dP_a(t)}{dt} = \frac{P_a(t) \cdot K}{S_6(x_{06} - x_6(t))} \cdot \left(\frac{1}{\rho} (G_6(t) - G_7(t)) + S_6 \cdot \frac{dx_6(t)}{dt} \right). \quad (32)$$

Воздействие электрической системы авторегуляции преобразуется в механическое. Сила управления задается следующим образом:

$$F_3(t) = \begin{cases} F_3 & \text{при } 0,2c \leq t \leq 0,5c; \\ 0 & \text{при } 0 \leq t < 0,2c \text{ и } 0,5c < t < 0,8c. \end{cases} \quad (33)$$

Правое предсердие

Уравнение движения поршня, описывающее жесткость сосудов:

$$m_7 \cdot \frac{d^2 x_7(t)}{dt^2} + h \cdot \frac{dx_7(t)}{dt} + k_7 \cdot x_7(t) = P_{пв}(t) \cdot S_7. \quad (34)$$

Уравнение движения верхнего поршня, моделирующего воздействие со стороны электрической системы регуляции, имеет вид:

$$m_8 \cdot \frac{d^2 x_8(t)}{dt^2} + h \cdot \frac{dx_8(t)}{dt} + k_8 \cdot x_8(t) = F_4(t) - P_{пн}(t) \cdot S_8. \quad (35)$$

Уравнение расхода крови через клапан между полую вену и правым предсердием:

если $P_{пв} > P_{пн}$, то $G_8 = \frac{1}{4} \pi d_6^2 \sqrt{2\rho(P_{пв}(t) - P_{пн}(t))}$; (36)

если $P_{пв} < P_{пн}$, то $G_8 = 0$. (37)

Дополнительное уравнение давления в полой вене:

$$\frac{dP_{пв}(t)}{dt} = \frac{P_{пв}(t) \cdot K}{S_7(x_{07} - x_7(t))} \cdot \left(\frac{1}{\rho} (G_7(t) - G_8(t)) + S_7 \cdot \frac{dx_7(t)}{dt} \right); \quad (38)$$

Уравнение давления в правом предсердии:

$$\frac{dP_{пн}(t)}{dt} = \frac{P_{пн}(t) \cdot K}{S_8(x_{08} - x_8(t))} \cdot \left(\frac{1}{\rho} (G_8(t) - G_1(t)) + S_8 \cdot \frac{dx_8(t)}{dt} \right). \quad (39)$$

Воздействие электрической системы авторегуляции преобразуется в механическое. Сила управления задается следующим образом:

$$F_4(t) = \begin{cases} F_4 & \text{при } 0,1c \leq t \leq 0,2c; \\ 0 & \text{при } 0 \leq t < 0,1c \text{ и } 0,2c < t < 0,8c. \end{cases} \quad (40)$$

По разработанной модели (1)-(2), (7)-(40) в среде Maple был реализован алгоритм решения данной системы уравнений. Результаты моделирования приведены на рис. 1.

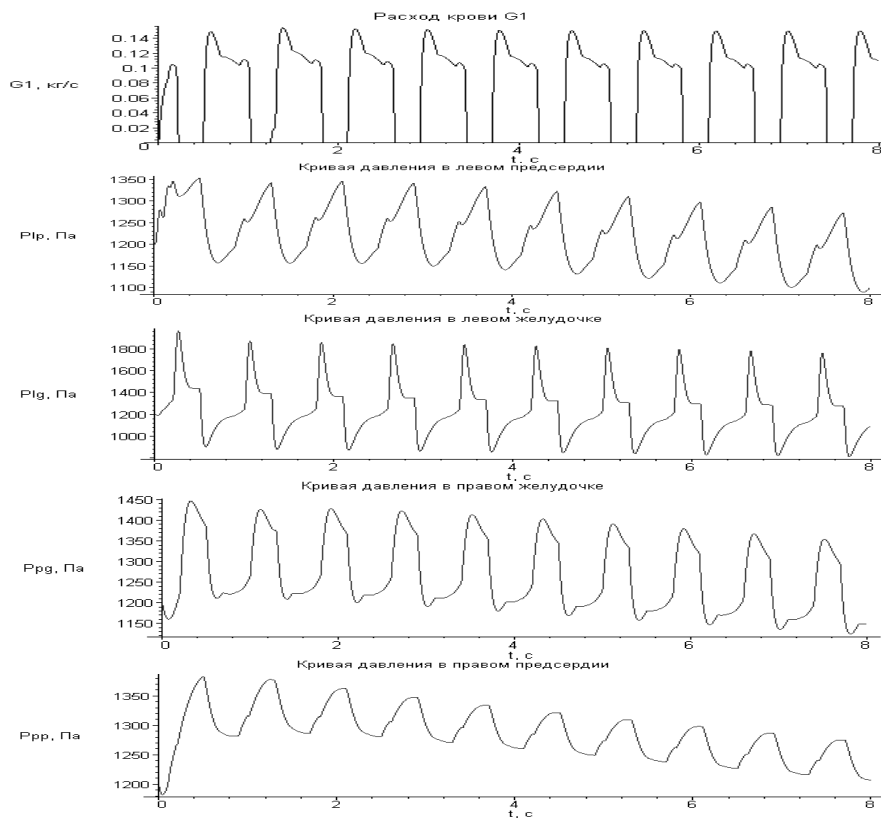


Рис. 1. Результаты моделирования по разработанной модели

Сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными, полученными из физиологии, показывают, что разработанная модель достаточно достоверно отражает качественный характер насосной деятельности сердца.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бегун П.И., Шукейло Ю.А.* Биомеханика: Уч. для вузов. – СПб.: Политехника, 2000. – 463 с.
2. *Лебеденко И.С., Новоселова Е.С., Ефимцева Ю.А., Ракитянская А.С.* Математическая модель насосной функции сердца/ Биотехносфера. – №3. – Санкт-Петербург, 2009. – С. 24-31.
3. *Подчуфаров Б.М.* Тепломеханика: Уч. пособие. – Тула: ГПИ, 1983. – 100 с.

Лебеденко Игорь Сергеевич

Тульский государственный университет.
E-mail: tsk@tsu.tula.ru.
300600, г. Тула, пр. Ленина, 92, тел.: (4872)350552.
Доцент, к.т.н.

Lebedenko Igor Sergeevich

Tula State University.
E-mail: tsk@tsu.tula.ru.
92, Lenin avenue, Tula, 300600, Russia, Phone: (4872)350552.
Assistant professor, Cand. Eng. Sc.

Новоселова Елена Сергеевна

Тульский государственный университет.
E-mail: tsk@tsu.tula.ru.
300600, г. Тула, пр. Ленина, 92, тел.: (4872)350552.
Доцент, к.т.н.

Novoselova Elena Sergeevna

Tula State University.
E-mail: tsk@tsu.tula.ru.
92, Lenin avenue, Tula, 300600, Russia, Phone: (4872)350552.
Assistant professor, Cand. Eng. Sc.

УДК 621.396.1.001.24, 681.323:621.391

И.В. Разин

**О МОДЕЛЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ
ПОДЧЕРКИВАНИЯ И ЛОКАЛИЗАЦИИ ПЕРЕПАДОВ ЯРКОСТИ
ИЗОБРАЖЕНИЯ**

В работе приведена методика синтеза дифференциальных операторов и локализации перепада яркости изображения.

Модель перепада; дифференциальный оператор; гладкая функция; среднеквадратическая частота.

I.V. Razin

**ABOUT MODELS OF DIFFERENTIATION OPERATORS FOR
ACCENTUATING AND LOCALIZATION OF DIFFERENCES OF BRIGHTNESS
OF THE IMAGE**

In the work are given the methods of synthesis of differentiation operators and localization of difference of brightness of the image.

Model of the brightness image; differentiation operator; continuously differentiable function; standard deviation of the frequency.