

Sapogin Vladimir Georgievich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: sapogin@mail.ru; e-mail: vladsapogin@yandex.ru.

Web-site: egf.tsure.ru.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: 8(8634)37-16-63; 8(8634)312-368.

Department of Physics.

Professor.

УДК 519.6

А.И. Сухинов, О.В. Колгунова, Д.А. Зорина

**ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ГИДРОФИЗИКИ
ВОДОЕМОВ НА ОСНОВЕ СХЕМ РАСЩЕПЛЕНИЯ**

В данной работе построен алгоритм для двумерной модели совместного движения водной среды, транспорта тепла и соли. Данный алгоритм базируется на схемах расщепления и методе поправки к давлению. В случае сильно меняющихся соленостей и (или температур) возникает необходимость организации итерационного процесса, позволяющего согласовать распределение скоростей и плотностей водной среды.

Метод поправки к давлению; принцип максимума; параллельный алгоритм метода циклической редукции.

A.I. Sukhinov, O.V. Kolgunova, D.A. Zorina

**PARALLEL ALGORITHM OF THE SOLUTION OF HYDROPHYSICS
PROBLEM IN BASINS BASED ON SPLITTING SCHEMES**

In this paper the algorithm of two-dimensional model for fluid dynamics, heat and salt transfer is constructed. It based on splitting schemes and Pressure-Correction method. In case of strongly varying salinity and (or) temperatures the necessity of the iterative process creation arises, allowing to coordinate the distribution of velocities and densities of the fluid.

Pressure-Correction method; a principle of the maximum; parallel algorithm of a cyclic reduction method.

Рассмотрим задачу, описывающую в водоеме движение водной среды. Течение жидкости рассматривается в прямоугольной области G . Для простоты под областью G будем подразумевать прямоугольник, боковые границы которого непроницаемы. В области $G = \{0 < x < l_1, 0 < y < l_2, 0 < t < T\}$ требуется найти в $\bar{G} = G \cup \Gamma$ достаточно гладкие функции u, v, ρ, P, S, T , описывающие соответственно распределение скоростей, плотности, давления,

солёности и температуры, рассматриваемые как функции горизонтальных координат (x, y) и времени t и удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u\vec{V}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \operatorname{div}(v\vec{V}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{V}) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}(S\vec{V}) = \mu_s \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(T\vec{V}) = \mu_T \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (5)$$

$$\rho(S, T) = \rho_0 + a_1 S + b_1 T, \quad (6)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) = u_0(x, y); \quad v(x, y, 0) = v_0(x, y); \quad P(x, y, 0) = P_0(x, y); \\ T(x, y, 0) = T_0(x, y); \quad S(x, y, 0) = S_0(x, y); \quad \rho(S_0, T_0) = \rho_0 \end{aligned} \quad (7)$$

и граничными условиями

$$\vec{V}(x, y, t) = \vec{U}_\Gamma(x, y, t), \quad t > 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (8)$$

где $\vec{V}(x, y, t) = (u, v)$ – двумерный вектор скорости водной среды, $\vec{U}_\Gamma(x, y, t)$ – заданная вектор функция граничных условий, Γ – граница области G .

$$\begin{aligned} T(x, y, t) = \mu_T(x, y, t), \quad t > 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \\ S(x, y, t) = \mu_S(x, y, t), \quad t > 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \end{aligned} \quad (9)$$

В приведенных выше соотношениях u, v – компоненты скорости \vec{V} в направлении координатных осей OX, OY соответственно, P – давление, S – солёность, T – температура, $\rho = \rho(S, T)$ – плотность, зависящая от солёности и температуры.

Построим схему расщепления по физическим процессам, которая будет являться основой итерационного алгоритма, в случае сильно изменяющейся плотности.

Введем временную сетку $\bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, k; k\tau = T\}$, предполагая, что смешанная задача Коши рассматривается на конечном временном промежутке. Для $t_n < t \leq t_{n+1}, n = 0, 1, \dots, k-1$, заменим исходную задачу следующей задачей вида:

$$\frac{\tilde{u}-u}{\tau} + \frac{1}{2} \left(\operatorname{div}(u\vec{V}) + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\tilde{v}-v}{\tau} + \frac{1}{2} \left(\operatorname{div}(v\vec{V}) + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\tilde{u}-\bar{u}}{\tau} = \frac{\mu}{\hat{\rho}} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right) \quad (12)$$

$$\frac{\tilde{v}-\bar{v}}{\tau} = \frac{\mu}{\hat{\rho}} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} \right) \quad (13)$$

$$\frac{\hat{u}-\tilde{u}}{\tau} = -\frac{1}{\hat{\rho}} \frac{\partial \hat{P}}{\partial x} \quad (14)$$

$$\frac{\hat{v}-\tilde{v}}{\tau} = -\frac{1}{\hat{\rho}} \frac{\partial \hat{P}}{\partial y} \quad (15)$$

$$\frac{\tilde{T}-T}{\tau} + \frac{1}{2} \left(\operatorname{div}(T\vec{V}) + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\hat{T}-\tilde{T}}{\tau} = \mu_T \left(\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial y^2} \right) \quad (17)$$

$$\frac{\tilde{S}-S}{\tau} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{div}(S\vec{V}) + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} \right) \quad (18)$$

$$\frac{\hat{S}-\tilde{S}}{\tau} = \mu_s \left(\frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial y^2} \right) \quad (19)$$

$$\hat{\rho} = \rho_0 + a_1 \hat{S} + b_1 \hat{T} \quad (20)$$

Граничные условия для системы (10) – (20) аналогичны граничным условиям исходной задачи (1) – (6). Начальные условия на каждом временном интервале $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ ставятся дополнительно. Если $q \in \{u, v, S, T, \rho\}$, то $q(t_n) \equiv \hat{q}(t) \quad t = t_{n-1} + \tau$. Здесь $\hat{q}(t)$ - значение соответствующей функции, полученное на предыдущем временном шаге $t_{n-1} < t \leq t_n$ для $t = t_n$, $n = 1, 2, \dots, k-2$ или начальное условие, если $n = 0$.

Далее будем предполагать, что в области \bar{G} построена равномерная сетка с шагом h по направлениям осей OX и OY . Базируясь на расщепленной цепочке задач (10–20), которая является нелинейной системой уравнений с частными производными, опираясь на идею метода поправки к давлению, построим линейную итерационно-разностную схему. В выражениях, приводимых ниже, верхний индекс « k » или « $k+1$ » обозначают номер итерации на текущем временном слое.

$$\frac{\tilde{u}-u}{\tau} + \frac{1}{2} \left((u \cdot u)_{\circ x} + (u \cdot v)_{\circ y} + u \cdot u_{\circ x} + v \cdot u_{\circ y} \right) = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\tilde{v}-v}{\tau} + \frac{1}{2} \left((v \cdot u)_{\circ x} + (v \cdot v)_{\circ y} + u \cdot v_{\circ x} + v \cdot v_{\circ y} \right) = 0 \quad (22)$$

$$\frac{\tilde{u}-\bar{u}}{\tau} = \frac{\mu}{\hat{\rho}^k} \left(\tilde{u}_{\bar{xx}} + \tilde{u}_{\bar{yy}} \right) \quad (23)$$

$$\frac{\tilde{v}-\bar{v}}{\tau} = \frac{\mu}{\hat{\rho}^k} \left(\tilde{v}_{\bar{xx}} + \tilde{v}_{\bar{yy}} \right) \quad (24)$$

$$\hat{P}_{\bar{xx}}^{k+1} + \hat{P}_{\bar{yy}}^{k+1} = \frac{\hat{\rho}^k - \rho}{\tau^2} + \frac{1}{\tau} \left((\hat{\rho}^k \tilde{u})_{\circ x} + (\hat{\rho}^k \tilde{v})_{\circ y} \right) \quad (25)$$

$$\frac{\hat{u}^{k+1} - \tilde{u}}{\tau} = -\frac{1}{\hat{\rho}^k} \hat{P}_{\circ x}^{k+1} \quad (26)$$

$$\frac{\hat{v}^{k+1} - \tilde{v}}{\tau} = -\frac{1}{\hat{\rho}^k} \hat{P}_{\circ y}^{k+1} \quad (27)$$

$$\frac{\tilde{T}-T}{\tau} + \frac{1}{2} \left((\hat{u}^{k+1} T)_{\circ x} + (\hat{v}^{k+1} T)_{\circ y} + \hat{u}^{k+1} T_{\circ x} + \hat{v}^{k+1} T_{\circ y} \right) = 0 \quad (28)$$

$$\frac{\hat{T}^{k+1} - \tilde{T}}{\tau} = \mu_T \left(\hat{T}_{\bar{xx}}^{k+1} + \hat{T}_{\bar{yy}}^{k+1} \right) \quad (29)$$

$$\frac{\tilde{S}-S}{\tau} + \frac{1}{2} \left((\hat{u}^{k+1} S)_{\circ x} + (\hat{v}^{k+1} S)_{\circ y} + \hat{u}^{k+1} S_{\circ x} + \hat{v}^{k+1} S_{\circ y} \right) = 0 \quad (30)$$

$$\frac{\hat{S}^{k+1} - \tilde{S}}{\tau} = \mu_S \left(\hat{S}_{xx}^{k+1} + \hat{S}_{yy}^{k+1} \right) \quad (31)$$

$$\hat{\rho}^{k+1} = \hat{\rho}^k + a_1 (\hat{S}^{k+1} - \hat{S}^k) + b_1 (\hat{T}^{k+1} - \hat{T}^k) \quad (32)$$

Применяя к полученной итерационной схеме принцип максимума и следствия из него [1], после небольших преобразований, получим, что достаточным условием сходимости итерационного процесса является выполнение неравенства:

$$\left(a_1 \|S^{k-1}\| + b_1 \|T^{k-1}\| \right) \frac{4M}{\frac{h}{\tau} - \|u^k + v^k\|} < 1, \quad (33)$$

где

$$M = \frac{1}{h} \left\| \frac{1}{\rho^{k-1}} \left\| \left(\frac{l_1^2 + l_2^2}{2} \right) \left(\frac{1}{\tau} + \frac{2\|u\| + 2\|v\|}{h} + \frac{16\mu\tau}{h^3} \left\| \frac{1}{\rho} \left(\|u\| + \|v\| \right) + \frac{4\tau}{h^2} (\|u\| + \|v\|)^2 \right) + \tau \|P^{k-1}\| \cdot \left\| \frac{1}{\rho^{k-2}} \right\| \right\| \right\|$$

Будем принимать во внимание, что для устойчивости явных разностных уравнений (21-22) достаточно потребовать следующие ограничения на временной шаг τ :

$$\tau \leq \frac{h}{2(\|u\| + \|v\|)}, \quad \tau \leq \frac{h}{2(\|u^k\| + \|v^k\|)} \quad (34)$$

Нетрудно видеть, что из неравенств (34) следует

$$\frac{4M}{\frac{h}{\tau} - \|u^k + v^k\|} \leq \frac{4M}{\frac{h}{\tau} - \frac{h}{2\tau}} = \frac{8M\tau}{h} \quad (35)$$

Поэтому, если выполняется неравенство

$$\left(a_1 \|S^{k-1}\| + b_1 \|T^{k-1}\| \right) \frac{8K\tau}{h} < 1, \quad (36)$$

где

$$K = \frac{1}{h} \left\| \frac{1}{\rho^{k-1}} \left\| \left(\frac{l_1^2 + l_2^2}{2} \right) \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau} + \frac{4\tau}{h\tau} (\|u\| + \|v\|) + \frac{\tau}{\tau^2} \right) + \tau \|P^{k-1}\| \cdot \left\| \frac{1}{\rho^{k-2}} \right\| \right\| = \quad (37)$$

$$\frac{1}{h} \left\| \frac{1}{\rho^{k-1}} \left\| \left(\frac{l_1^2 + l_2^2}{2} \right) \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau} + \frac{2}{\tau} + \frac{1}{\tau} \right) + \tau \|P^{k-1}\| \cdot \left\| \frac{1}{\rho^{k-2}} \right\| \right\| = \frac{1}{h} \left\| \frac{1}{\rho^{k-1}} \left\| \left(\frac{5(l_1^2 + l_2^2)}{2\tau} + \tau \|P^{k-1}\| \cdot \left\| \frac{1}{\rho^{k-2}} \right\| \right) \right\| \right\|$$

то выполняется и исходное неравенство (33).

С учетом этого из (36) и (37) приходим к следующему условию сходимости итерационного процесса:

$$\left(a_1 \|S^{k-1}\| + b_1 \|T^{k-1}\| \right) \frac{8L\tau}{h} < 1,$$

где

$$L = \frac{1}{h} \left\| \frac{1}{\rho^{k-1}} \left\| \left(\frac{5(l_1^2 + l_2^2)}{2\tau} \right) \right\| \right\|.$$

Учитывая два последних соотношения и, проводя очевидные преобразования, получим

$$N < \frac{1}{2\sqrt{5} \left\| (\rho^{k-1})^{-1} \left\| \left(a_1 \|S^{k-1}\| + b_1 \|T^{k-1}\| \right) \right\| \right\|}. \quad (38)$$

Таким образом, одновременное выполнение неравенств (33), (34), (38) является достаточным условием сходимости итерационного процесса.

Данный итерационный процесс целесообразно использовать в водоемах с существенно меняющейся плотностью водной среды. В частности, к таким водоемам относятся устьевые районы крупных рек (Дон, Кубань, Волга), впадающих в море.

Другое возможное применение связано с моделированием гидрофизических процессов в стратифицированной водной среде. Например, когда более «легкие» (нагретые или распресненные) слои расположены снизу, а более «тяжелые» – сверху. Следует отметить, что в этом случае необходимо использовать негидростатическое приближение и перейти к пространственно-трехмерной постановке задачи.

Для численного решения вычислительно трудоемкие сеточные уравнения параболического типа (23), (24), (29), (31) и эллиптического типа (25) решаются параллельным алгоритмом метода циклической редукции [2], который был реализован с использованием библиотеки MPI на кластере распределенных вычислений со следующими техническими характеристиками: топология связей между процессорами - полный граф, пакетный способ передачи, используемая сеть – Gigabit Ethernet. Процессор, расположенный в каждом узле имеет тактовую частоту 3ГГц и объем оперативной памяти 1Гб. Кластер работает под управлением операционной системы ASPLinux на ядре 2.4.20-9asp. Накладные временные расходы, связанные с организацией взаимодействия между узлами составляют $t > 100 \text{ мкс}$, время осуществления коммуникации не зависит от номеров взаимодействующих узлов (связи равноценны) и возможны одновременно две пары обменов.

Другие сеточные уравнения являются явными и не требуют усилий для распараллеливания. При параллельной реализации алгоритма входная информация, разрезается на «вертикальные» полосы и распределяется по узлам кластера (рис. 1). В процессор с номером m , $1 \leq m \leq p$ загружаются элементы исходных массивов размерностью N со значениями индексов $\left[\frac{N}{p} \right] \cdot (m-1) + 1 \leq i \leq \left[\frac{N}{p} \right] \cdot m$ [3]. Максимальный объем передаваемой информации между узлами на текущем уровне редукции составляет $2N$, тогда

общий объем переданных данных составит $V = 2N * l$, где l – показатель размерности входных данных, $N = 2^l$.

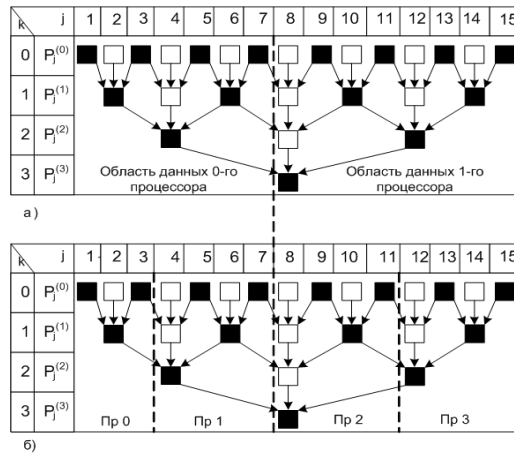


Рис. 1. Схема выполнения прямого хода метода редукции на кластере: а) с двумя процессорами, б) с четырьмя процессорами

Введем параметр системы $k = \frac{t_o}{t_a}$, где t_o, t_a – численные временные ха-

рактеристики производительности процессора и каналов связи, соответственно, t_o – время передачи одного мегабайта данных между двумя узлами, t_a – характерное время выполнения усредненной арифметической операции. Анализ количества арифметических действий параллельного алгоритма и значение параметра k показывают, что временные затраты на передачу данных много меньше, чем на выполнение вычислительных операций, что и объясняет экономичность параллельного решения. Методы FA, FACR показали меньшую эффективность для данной задачи. На размерности входных данных $2^5 - 2^{12}$ эффективность используемого метода (рис. 2) является приемлемой (0.5-0.95), что говорит о целесообразности его использования.

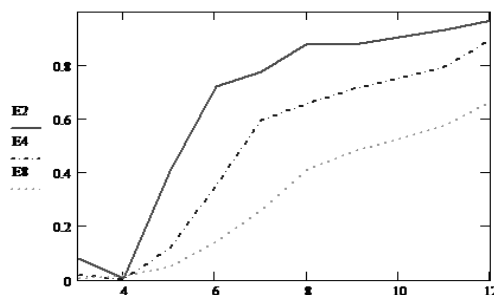


Рис. 2. Эффективность решения задачи гидрофизики водоемов методом циклической редукции, где $E2$ – эффективность алгоритма, выполняемого на двух вычислителях, соответственно, $E4$ – на четырех вычислителях, $E8$ – на восьми вычислителях

Таким образом, в данной работе построен алгоритм численной реализации двумерной модели совместного движения водной среды, транспорта тепла и соли, базирующийся на схемах расщепления и методе поправки к давлению [4]. Построен эффективный параллельный алгоритм метода циклической редукции решения вычислительно трудоемких сеточных уравнений эллиптического типа и неявных сеточных уравнений, аппроксимирующих уравнения диффузии тепла и соли.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. – М.: Наука, 1973. – 344 с.
2. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 592 с.
3. Сухинов А.И. Двумерные схемы расщепления и некоторые их приложения. – М.: МАКС Пресс, 2005. – 408 с.
4. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 298 с.

Сухинов Александр Иванович

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: sukhinov@gmail.com.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 8(8634)315-638; +7(928)102-11-06.

Руководитель ТТИ ЮФУ.

Колгунова Олеся Владимировна

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Северо-Осетинский государственный университет им. К.Л. Хетагурова».

E-mail: kolev2003@mail.ru.

362040, г. Владикавказ, ул. Ватутина, 46.

Тел.: 8(8672)53-35-20; +7(928)235-72-96.

Информационно-вычислительный центр.

Инженер-программист.

Зорина Дарья Алексеевна

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: dashenka80@mail.ru.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: (8634)315-638; +7(918)510-72-77.

Ассистент.

Sukhinov Alexander Ivanovich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: sukhinov@gmail.com.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone.: 8(8634)315-638; +7(928)102-11-06.
Chief of TIT SFedU.

Kolgunova Olesya Vladimirovna
The North-Ossetian State University.
E-mail: kolev2003@mail.ru.
46, Vatutin str, Vladikavkaz, 362040, Russia.
Phone: 8(8672)53-35-20; +7(928)235-72-96.
The information-calculating center.
Part-programming engineer.

Zorina Darya Alekseevna
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Estab-
lishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.
E-mail: dashenka80@mail.ru.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: 8(8634)315-638; +7(918)510-72-77.
Assistant.