

УДК 519.622

**В.Н. Бирюков**

**КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМ  
ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

*Рассматриваются свойства численного метода решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, полученного комбинацией полностью неявного метода Рунге-Кутты 2-го порядка и метода трапеций. Показано, что комбинированный метод имеет 3-й порядок точности, A- и L2-устойчив. Рунге-Кутта; A-устойчивость; L-устойчивость.*

**V.N. Biryukov**

**SINGLE-STEP METHOD FOR TIME-DOMAIN SIMULATION OF RF  
CIRCUITS**

*This paper presents an approach to the accurate time-domain simulation of nonlinear circuits that employs a novel miscellaneous 3-d-order implicit Runge–Kutta formula composed of trapezoidal rule and 2-d-order fully implicit Runge–Kutta formula. The properties of stability and accuracy of this RK method are reviewed.*

*Index Terms – Time-domain simulation; RF-circuits; implicit Runge–Kutta.*

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) радиотехнических цепей в ряде случаев обладают настолько высокой жесткостью, что для численного их решения становится целесообразным использование полностью неявных методов Рунге–Кутты, обладающих высокой L-устойчивостью [1, 2]. Основным недостатком последних является их высокая арифметическая сложность, поскольку размерность системы разностных (алгебраических) уравнений этих методов, определяющая время решения, превосходит размерность СОДУ. Известно, что в многошаговых методах решения СОДУ, используемых практически во всех симуляторах электронных цепей, можно получить весьма полезные результаты, если в классические разностные схемы ввести избыточность [3]. Очевидно, что подобную избыточность можно ввести и в одношаговые методы. Ниже анализируются основные свойства – точность, устойчивость и сложность – нового A-устойчивого метода, основанного на комбинации двух известных методов второго порядка точности: неявного метода трапеций (НМТ) и полностью неявного метода Рунге-Кутты (НМРК). Показано, что комбинация НМТ и НМРК 2-го порядка позволяет в ряде случаев получить решение с более высокой точностью, чем каждый из вложенных методов в отдельности, фактически без увеличения арифметической сложности.

Представим разностную схему метода, состоящего из 2-х частичных шагов, первый из которых соответствует НМТ, а второй – НМРК2 в виде

$$x_{n+\alpha} = x_n + (\alpha h/2)[f(x, t_n) + f(x_{n+\alpha}, t_n + \alpha)],$$

$$x_{n+1} = x_{n+\alpha} + h f(x_{(n+\alpha)/2}, t_n + (1 + \alpha) h/2), \quad (1)$$

$$x_{n+1} = x_{(n+\alpha)/2} + [(1 - \alpha) h/2] f(x_{n+1}, t_n + h),$$

где  $0 \leq \alpha \leq 1$  – весовой коэффициент. Поскольку оба исходных метода  $A$ -устойчивы, то и комбинированный метод  $A$ -устойчив. В то же время, благодаря разному знаку главного члена асимптотической погрешности НМТ и НМРК, локальная погрешность комбинированного метода (1) оказывается меньше, чем у НМТ, обладающего минимальной погрешностью среди всех известных методов второго порядка. Отметим, что асимптотическая локальная погрешность комбинированного двухстадийного  $L1$ -устойчивого метода НМТ-ФДН, используемая в программе MATLAB (процедура *ode23tb*), превышает на порядок соответствующую погрешность НМТ.

Высокая арифметическая сложность  $L$ -устойчивых полностью неявных методов Рунге-Кутты позволяет рекомендовать их для анализа только особо жестких задач. При плотно-заполненной матрице Якоби арифметическая сложность НМРК в (1) пропорциональна квадрату размерности СОДУ, а та же сложность НМТ – только первой степени. Следовательно, при высокой сложности анализируемых цепей сложность (1) несущественно отличается от сложности НМРК. Метод (1) обладает такой же асимптотической устойчивостью, как и НМРК, но позволяет получить новые свойства по сравнению с каждым из вложенных методов в отдельности. На рис. 1 приведена зависимость от шага локальной погрешности  $\Delta = |x_1 - x(h)|$  задачи  $dy/dt = \sigma y$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $y(0) = 1$  для НМРК (кривые 1) и комбинированного метода НМТ-НМРК (1) при  $\alpha = 0,5$  (кривые 2). Штриховыми линиями показаны зависимости при двух равных частичных шагах. Из рисунка следует, что комбинированный метод является экспоненциально-подогнанным и обладает не только существенно малой по сравнению с НМРК2 асимптотической погрешностью, но и более низким максимальным значением локальной погрешности по сравнению с НМРК. Таким образом, предложенный метод более эффективен, чем НМРК 2-го порядка по соотношению точность/арифметическая сложность для СОДУ с малой и средней жесткостью, незначительно уступая последнему в случае особо высокой жесткости, поскольку порядок  $L$ -устойчивости методов одинаков.

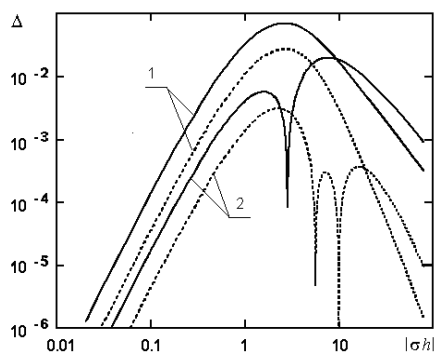


Рис. 1

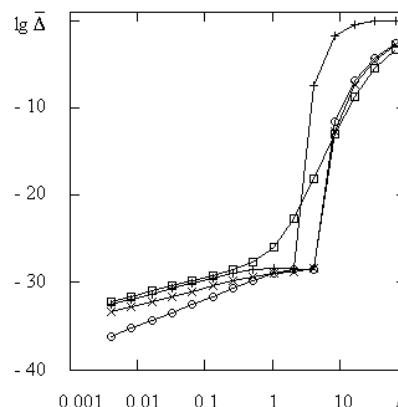


Рис. 2

В классическом методе локальной подгонки, комбинирующем неявные методы Эйлера и трапеций [4], но не обладающем в отличие от (1) избыточностью, весовой коэффициент выбирается из условий компромисса между точностью и устойчивостью численного решения и поэтому может варьироваться в широком диапазоне значений. Свойства метода (1) с изменением весового коэффициента  $\alpha$  также меняются слабо, однако одно значение  $\alpha$  является особенным: при  $\alpha = 0,557506665975$  главные члены локальных погрешностей НМТ и НМРК2, имеющие разный знак, оказываются равными по модулю и метод (1) становится методом 3-го порядка (естественно, только для однородных задач).

Для подтверждения высокой устойчивости комбинированного метода в области больших шагов на рис. 2 приведены зависимости от шага глобальной (интервальной) погрешности  $\bar{\Delta} = |x_N - x(t_N)|$  сравниваемых методов для задачи  $dy/dt = -y$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $y(t_0) = 1$ ,  $T = t_N = 2^{16}$ . Знаком + на рисунке отмечены результаты, полученные для НМТ, □ – для НМРК 2-го порядка, × и ○ – для метода (1) при  $\alpha = 0,5$  и  $\alpha = 0,557506665975$  соответственно. Из рисунка следует, что устойчивость (1) при больших шагах решения несущественно отличается от устойчивости НМРК2, а в области малых шагов порядок асимптотической погрешности (1) в зависимости от величины весового коэффициента может быть равным как двум, так и трем.

Область устойчивости (1) слабо зависит от весового коэффициента при  $\alpha > 0,1$ . На рис. 3 приведена граница области устойчивости в верхней комплексной полуплоскости (область симметрична относительно вещественной оси) при  $\alpha \approx 0,5575$ . Отметим, что граница области метода (1) расположена ближе к мнимой оси, чем соответствующая граница НМРК2, что важно при моделировании автономных осцилляторов.

Таким образом, предлагаемый метод является  $A$ -устойчивым и в области больших шагов близок по своим свойствам к  $L2$ -устойчивому полностью неявному методу Рунге-Кутты 2-го порядка, а в области малых шагов его погрешность настолько мала, что позволяет сравнивать его по производительности с диагональными  $L1$ -устойчивыми методами Рунге-Кутты. Отметим, что неклассические методы Рунге-Кутты могут быть получены и путем создания нелинейных разностных схем на основе методов разных порядков точности [5].

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Maffezoni P., D'Amore D. Time-domain simulation of nonlinear circuits through implicit Runge-Kutta methods // IEEE transactions on circuits and systems. – 2007. – Vol. 54. – № 2. – P. 391-400.
2. Калиткин Н. Н. Численные методы решения жестких систем // Математическое моделирование. – 1995. – Т. 7. № 5. – С. 8-11.
3. Булатов М.В. Построение неклассических многошаговых схем для линейных ОДУ // Доклады академии наук. – 2005. – Т. 404. № 1. – С. 11-13.
4. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Дж. Холл и Дж. Уатт. – М.: Мир, 1979. – 312 с.
5. Бирюков В.Н. Алгоритм решения обыкновенных дифференциальных уравнений, комбинирующий  $A$ - и  $L$ -устойчивые методы различных порядков точности // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2008. № 6. – С. 36-38.

Бирюков Вадим Николаевич

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: biryukov@users.tsure.ru.

347922, г. Таганрог, пер. 1-й Крепостной, 34-162.

Тел.: 8(8634)360-204.

Кафедра теоретических основ радиотехники.

Biryukov Vadim Nikolaevich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: biryukov@users.tsure.ru.

34-162, 1-st Krepostnoi street, Taganrog, 347922, Russia.

Phone: 8(8634)360-204.

Department of Radio Engineering.

УДК 681.518.54

**Г.Г. Галустов, Д.В. Мирвода**

### **ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ПРИ СТОХАСТИЧЕСКОМ КОДИРОВАНИИ СИГНАЛОВ**

*Приведена оценка погрешности представления случайной величины в результате реализации алгоритма одnorазрядного квантования, ориентированного на классификацию сложных сигналов с непараметрической априорной неопределенностью.*

*Случайная величина; математическое ожидание; дисперсия; стохастическое кодирование; погрешность; опорный процесс.*

**G.G. Galustov, D.V. Mirvoda**

### **ERROR ESTIMATION AT STOCHASTIC CODING OF SIGNALS**

*The estimation of an error of representation of a random variable as a result of realisation of algorithm of the one-digit quantization focused on classification of difficult signals with nonparametric aprioristic uncertainty is resulted.*

*A random variable; a population mean; a dispersion; stochastic coding; an error; basic process.*

При реализации алгоритма стохастического кодирования сигналов [1, 2], ориентированного на классификацию сложных сигналов с непараметрической априорной неопределенностью особый интерес представляет связь статистических характеристик классифицируемого процесса  $X(t)$  с процессом  $z(t)$ , полученного в результате сравнения с опорным процессом (сигналом)  $\eta(t)$ . При этом наибольший интерес представляет случай, когда процесс  $\eta(t)$  имеет