УДК 62-50

А.Р. Гайдук

УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ИНВАРИАНТНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Введение. Проблема синтеза абсолютно инвариантных по отношению к внешним воздействиям систем управления энергетическими объектами, как и задача синтеза инвариантных систем общего вида, впервые была поставлена в работах Г.В. Щипанова [1, 2]. Несколько позднее в работах В.С. Кулебакина было введено понятие «избирательной» или селективной инвариантности, т.е. инвариантности с точностью до переходной составляющей, по отношению к внешним воздействиям определенной формы [2, 3]. Работа Г.В. Щипанова вызвала многочисленные, не прекращающиеся до настоящего времени публикации, в которых проведено всестороннее исследование проблемы инвариантности. Краткий обзор, дающий достаточно полное представление об основных этапах развития теории инвариантности, представлен в недавней монографии М. Ш. Мистриханова [2].

С развитием методов анализа на основе понятия состояния динамических систем в работах А. Фрэнсиса, М. Уонэма и других [4] проблема инвариантности систем управления исследована на основе моделей этого типа. При этом предполагалось, что внешние воздействия также описываются уравнениями в переменных состояния. В этих работах, в частности, был сформулирован принцип внутренних моделей. Позднее в работах [5, 6] было установлено, что в системах этого типа фактически достигается инвариантность в смысле В.С. Кулебакина, т.е. инвариантность с точностью до переходной составляющей или селективная инвариантность.

Применение идей и методов технологии вложения для синтеза абсолютно инвариантных систем управления на основе управления по всем переменным состояния, проведено в работе [2].

Проблема существования определённых условий разрешимости задачи синтеза инвариантных систем автоматического управления (ИСАУ), по-видимому, впервые была поставлена Б.Н. Петровым в работе [7]. Предложенный им «критерий реализуемости» ИСАУ сформулирован по отношению к системе в целом и заключается в необходимости наличия в системе, по крайней мере, двух каналов влияния воздействия на ту переменную, инвариантность которой достигается. Однако этот критерий не даёт условий на объект управления, при которых существует решение задачи синтеза ИСАУ, кроме того, он не охватывает случая селективной инвариантности.

Известны также условия инвариантности, предложенные Л.И. Розоноэром [2]. Эти условия сформулированы также по отношению к модели в векторно-матричной форме системы в целом.

В то же время система управления, как известно, обычно состоит из устройства управления (УУ) и объекта управления (ОУ). Причем ОУ – это совокупность функционально необходимых элементов, таких как агрегат, где протекает управляемый процесс, усилитель, исполнительный механизм, датчики.

Задача синтеза САУ, практически всегда, формулируется при заданной модели ОУ, поэтому установление условий непосредственно на уравнения модели ОУ представляет значительный теоретический и, в особенности, практический интерес. Наличие условий на ОУ, при которых задача синтеза ИСАУ имеет физически реализуемое решение, позволяет, в частности, корректно сформулировать задачу синтеза проектируемой системы управления для заданного объекта. При этом представляется более целесообразным сформулировать эти условия на операторы уравнения вход-выход ОУ.

В данной работе определяются условия, при которых может быть достигнута инвариантность того или иного типа ошибки одномерной системы управления по отношению к внешним воздействиям. Предполагается, что регулятор синтезируется аналитическим методом на основе управления по отклонению и по выходу [6, 8] в соответствии с условиями инвариантности в смысле Г.В. Щипанова или В.С. Кулебакина.

Постановка задачи синтеза ИСАУ. Предположим, некоторый объект управления описывается в операторной форме уравнением вида

$$A(p)y = B_0(p)u + \sum_{k=2}^{\mu} B_k(p) f_k\,, \quad p = \frac{d}{dt}\,, \tag{1}$$

где y – выходная управляемая переменная; u – управление; f_k – возмущающие воздействия; $A(p)$; $B_k(p)$ – полиномы с постоянными коэффициентами степеней n и m_k, причём $m_k \le n$. Отметим, что (1), в общем случае, может быть как уравнением одномерного объекта, так и уравнением одного из каналов многомерного объекта управления, после введения декомпозирующего управления [8].

Задача синтеза состоит в определении порядка и значений всех параметров устройства управления, описываемого уравнением

$$R(p)u = Q_0(p)\varphi - Q_1(p)u - L(p)y + \sum_{k=2}^{\bar{\mu}} Q_k(p) f_k\,, \tag{2}$$

где $\varphi \;\; g - y$ – сигнал ошибки; g – воздействие на основном входе системы. В общем случае $g = f_0 + f_1$; причём f_0 – задающее, а f_1 – возмущающее воздействие; f_2 …, $f_{\bar{\mu}}$ – доступные измерению возмущения, приложенные к объекту, $\bar{\mu} \le \mu$, $R(p)$, $L(p)$, $Q_k(p)$ – полиномы с постоянными коэффициентами. Причём, если степень полинома равна r, то по условиям реализуемости степень остальных полиномов в (2) не более r.

Дополнительные контуры обратной связи, определяемые операторами $Q_1(p)$ и $L(p)$ в устройстве управления (2), являются весьма существенными при синтезе инвариантных систем. Именно они позволяют «развязать» выполнение условий устойчивости и инвариантности. Подчеркнём, что целесообразность поиска решения задачи синтеза инвариантных систем именно в классе многоконтурных систем неоднократно отмечалась в работах Г.В. Щипанова и особенно А.Г. Ивахненко.

Синтез системы (1), (2), рассогласование которой $\varepsilon \;\; f_0 - y$ инвариантно в смысле В.С. Кулебакина к некоторому воздействию f_k, $k \in [0, \mu]$, ведётся на основе динамической модели последнего, которая может быть задана следующими способами:

• с помощью $K_{p f_k}$-изображения воздействия f_k [3, 5], т.е. полинома $F_k(p)$, который фактически является собственным оператором однородного дифференциального уравнения

$$F_k(p) f_k = 0;$$

• отметим, что этот полином равен знаменателю изображения $f_k(p)$ этого воздействия по Лапласу;

• в виде спектра воздействия, т. е. совокупности чисел $\{\sigma_{k1}, \sigma_{k2}, \ldots, \sigma_{k r_k}\}$ – полюсов преобразования этого воздействия по Фурье или Лапласу;

• уравнениями в форме Коши

$$\dot{w}_k = F_k w_k, \qquad f_k = a_k^T w_k.$$

Здесь w_k – r_k-мерный вектор переменных; F_k и a_k соответствующих размерностей матрица и вектор коэффициентов, T – символ операции транспонирования.

Подчеркнём, что все приведенные формы описания воздействий эквивалентны друг другу, поскольку

$$F_k(p) p^{r_k} + \sum_{i=0}^{r_k-1} \eta_{ki} p^i \quad \prod_{i=1}^{r_k} (p - \sigma_{ki}) \quad \det(pE - F_k). \tag{3}$$

Здесь E – единичная матрица.

В отношении воздействий f_k, $k \in [0, \mu]$, модель которых в любой из указанных форм не известна, предполагается лишь, что они ограничены по модулю.

Порядок и параметры регулятора (2), согласно[6, 8] определяются по уравнению замкнутой системы. В данном случае его удобно записать относительно сигнала ошибки $\varepsilon \quad f_0 - y$. Из уравнений (1) и (2) получим

$$H(p)\varepsilon = \sum_{k=0}^{\mu} P_k(p) f_k, \tag{4}$$

где

$$H(p) = A(p)[R(p) + Q_1(p)] + B_0(p)\bar{L}(p), \tag{5}$$

$$P_0(p) = A(p)[R(p) + Q_1(p)] + B_0(p)L(p), \tag{6}$$

$$P_1(p) = -B_0(p)Q_0(p), \quad P_k(p) = -B_k(p)[R(p) + Q_1(p)], \quad k \quad \bar{\mu}+1, \ldots, \mu, \tag{7}$$

$$P_k(p) = -B_0(p)Q_k(p) - B_k(p)[R(p) + Q_1(p)], =k \quad 2, 3, \ldots, \bar{\mu}. \tag{8}$$

Здесь обозначено

$$\bar{L}(p) = Q_0(p) + L(p). \tag{9}$$

Для большей конкретности приведём также условия инвариантности систем управления. Согласно [1, 2, 6] ошибка системы (4) по отношению к воздействию f_k будет инвариантной в смысле Г.В. Щипанова, если

$$P_k(p) \equiv 0, \tag{10}$$

а в смысле В.С. Кулебакина, если только

$$P_k(p) \equiv \tilde{P}_k(p)F_k(p)\,, \qquad \text{НОД}\{F_k(p), H(p)\} = 1\,. \tag{11}$$

Здесь $\tilde{P}_k(p)$ – некоторый полином от p; *НОД* – наибольший общий делитель.

Условия устойчивости с учётом требований к качеству системы примем в виде

$$H(p) \in \Omega\,. \tag{12}$$

Здесь Ω – множество полиномов, нули которых расположены в области, допустимой с точки зрения качества синтезируемой системы; $\in$ – знак принадлежности. Кроме того, будем предполагать, что

$$\text{НОД}\{F_k(p), B_k(p)\} = 1\,, \tag{13}$$

т.е. если часть полюсов возмущения $\overline{f}_k$, приложенного к объекту (1), совпадает с нулями полинома $B_k(p)$, то эти полюсы можно не учитывать в полиноме $F_k(p)$, так как влияние соответствующих составляющих возмущения $\overline{f}_k$ будет полностью подавлено объектом и без управления.

Условия разрешимости задачи синтеза ИСАУ. В соответствии с аналитическим, полиномиальным методом синтеза [5, 8] полиномы $H(p)$ и $P_k(p), \quad k = 0, 1, \ldots, \mu$ назначаются в соответствии с желаемым качеством проектируемой системы и условиями физической реализуемости УУ, а выражения (5) – (8) рассматриваются как уравнения относительно неизвестных параметров регулятора (2).

Практически это означает, что для решения задачи синтеза ИСАУ необходимо иметь возможность назначить полином $H(p)$, так чтобы он относился к множеству Ω, а полиномы $P_k(p), \quad k = 0, 1, \ldots, \mu$ в соответствии с условиями (10) или (11). Тогда условия, при которых возможны такие назначения, а уравнения (5) – (8) разрешимы относительно параметров регулятора (2), и будут условиями разрешимости задачи синтеза системы (1), (2) инвариантной в смысле Г.В. Щипанова или В.С. Кулебакина к тому или иному воздействию $f_k, \quad k \in [0, \mu]$.

В частности, если $m_0 = n$ и $B_0(p) \in \Omega$, то полагая $Q_1(p) = -R(p)$, $L(p) \in \Omega$, $\deg L(p) = \deg R(p)$ и $Q_k(p) \equiv 0, \quad k = 2, \ldots, \overline{\mu}$, получим абсолютно инвариантную САУ ко всем воздействиям $f_k, \quad k \in [0, \mu]$ кроме $f_1(t)$.

Абсолютная инвариантность ошибки $\varepsilon \quad f_0 - y$ системы (1), (2) по отношению к возмущению $f_1(t)$, приложенному к системе в одной точке с задающим воздействием f_0, достигается лишь при $Q_0(p) \equiv 0$, что равносильно отключению входного сигнала системы. Это условие, очевидно, заведомо невыполнимо, и поэтому решения соответствующей задачи синтеза не существует.

Аналогично на основе соотношений (5) – (8) с учётом условий (10) и (12) или (11), (3) и (12) определяются условия достижимости инвариантности системы (1), (2) в том или ином смысле в рамках принятых моделей описания объекта (1), устройства управления (2) и (в случае селективной инвариантности) воздействий (3). Эти условия представлены в таблице 1. Дадим некоторые пояснения к ней.

Таблица 1

Условия разрешимости задачи синтеза инвариантных систем управления

<table>
<tr><td colspan="3">Модель воздействия</td><td colspan="2">Не используется</td><td colspan="2">Используется</td></tr>
<tr><td colspan="3">Полюсы системы</td><td>независимые $НОД\{A(p), B_0(p)\}=1$</td><td>согласованные $D(p)=B_0(p)\tilde{D}(p)$</td><td>независимые $НОД\{A(p), B_0(p)\}=1$</td><td>согласованные $D(p)=M(p)\overline{D}(p)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Задающее воздействие</td><td>Нет решения</td><td>$B_0(p)\in\Omega$
$m_0=n$</td><td>$НОД\{F_0(p),F_1(p)\}=1$
$НОД\{B_0(p),F_0(p)\}=1$</td><td>$НОД\{F_0(p),F_1(p)\}=1$
$НОД\{B_{\overline{\Omega}}(p),F_0(p)\}=1$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Возмущение приложено</td><td colspan="2">ко входу системы</td><td>Нет решения</td><td>Нет решения</td><td>$НОД\{F_0(p),F_1(p)\}=1$</td><td>Нет ограничений</td></tr>
<tr><td rowspan="2">к объекту</td><td>доп. связь есть</td><td>$m_0=m_k=0$</td><td>$B_0(p)\in\Omega$
$m_k\le m_0$</td><td>$НОД\{B_0(p),F_k(p)\}=1$</td><td>$НОД\{B_{\overline{\Omega}}(p),F_k(p)\}=1$</td></tr>
<tr><td>доп. связи нет</td><td>Нет решения</td><td>$B_0(p)\in\Omega$
$m_0=n$</td><td>$НОД\{B_0(p),F_k(p)\}=1$</td><td>$НОД\{B_{\overline{\Omega}}(p),F_k(p)\}=1$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Тип инвариантности</td><td colspan="2">Абсолютная (в смысле Г.В. Щипанова)</td><td colspan="2">Селективная (в смысле В.С. Кулебакина)</td></tr>
</table>

Как видно, существенную роль при синтезе инвариантных систем играет характер полюсов замкнутой системы (4). Отметим, что полюсы системы считаются «независимыми» в тех случаях, когда все они назначаются согласно условию (12), но независимо от свойств заданного объекта. Как известно [2, 6], это возможно, если только полиномы $A(p)$ и $B_0(p)$ в уравнении объекта (1) не имеют общих нулей, что и указано в таблице. Или, другими словами, если ОУ полностью управляемый и полностью наблюдаемый.

В тех случаях, когда часть множителей полиномов $A(p)$ или $B_0(p)$ принадлежит множеству Ω рассматриваемой задачи, то эти нули можно включить в число нулей полинома $H(p)$, т.е. выбрать часть полюсов системы «согласованными» с объектом. Это позволяет существенно ослабить условия разрешимости задачи синтеза абсолютно инвариантных систем. В таблице полюсы, совпадающие с нулями полинома $B_0(p)$, фигурируют как нули полинома $M(p)$, т.е. предполагается, что полином $B_0(p)$ представим в виде

$$B_0(p) \equiv M(p)\tilde{B}_0(p)\,,\; M(p) \in \Omega\,,$$

где $\tilde{B}_0(p)$ – полином степени $\tilde{m}_0 \le m_0$ или число β_{m_0}.

Отметим, что в соответствии с уравнением (2) абсолютная инвариантность по отношению к измеряемым возмущениям f_k достигается здесь на основе принципа двухканальности Б.Н. Петрова. При этом обеспечение абсолютной инвариантности возможно лишь при определённых дополнительных условиях, также указанных в таблице.

Практически, по условию Г.В. Щипанова (10) во всех случаях реализуется инвариантность с точностью до ε, что обусловлено невозможностью точно оценить параметры объекта (1) и реализовать расчетные параметры устройства управления (2).

Только в классе систем с согласованными полюсами, как видно из таблицы, возможен синтез абсолютно инвариантной системы управления без введения связей по возмущениям. Это возможно, когда полином $B_0(p)$ имеет степень, равную порядку объекта, и принадлежит множеству Ω. Это довольно жёсткое условие. Ему могут удовлетворять только объекты, содержащие безынерционный канал связи между управлением и выходом. Подчеркнём, что свойства абсолютно инвариантной системы данного типа особенно чувствительны к свойствам математической модели объекта. Тем не менее пока модель объекта, использованная при синтезе, будет соответствовать реальному объекту управления, система будет устойчивой, а её ошибка «инвариантной до ε» к задающему воздействию. Отметим, что УУ в этом случае относится к системам, которые в [9] называются вырожденными, а в [10] сингулярными.

Условия синтеза по В.С. Кулебакину, как видно из таблицы, имеют ярко выраженный «частотный» характер. Состоят они, прежде всего, в том, чтобы полюсы воздействий, приложенных к системе, не совпадали с нулями передачи объекта по управлению, т.е. с нулями полинома $B_0(p)$. Если же возмущение приложено к системе в одной точке с задающим воздействием, то для достижения инвариантности в смысле В.С. Кулебакина по обоим этим воздействиям дополнительно требуется, чтобы эти воздействия не имели общих полюсов.

Физически смысл этих условий достаточно очевиден. Например, если задающее и возмущающее воздействия приложены в одной точке, то в системе эти воздействия сначала должны быть разделены с тем, чтобы одно воспроизвести на выходе, а другое подавить. Физической основой разделения таких сигналов могут быть только различные полюсы, что и обеспечивается условием НОД $\{F_0(p), F_1(p)\} = 1$.

В общем случае синтез инвариантных систем, как отмечалось выше, может проводиться согласно [5, 8]. Поэтому здесь не приводятся расчётные соотношения, определяющие параметры устройства управления, а рассматриваются лишь условия разрешимости задачи синтеза инвариантных систем управления.

Отметим также, что условия селективной инвариантности (11) можно обеспечить либо выбором полиномов $Q_k(p)$, либо введением нулей полиномов $F_k(p)$ в число нулей полинома $R(p)$. В первом случае порядок замкнутой системы получается ниже, однако свойство селективной инвариантности будет не грубым [5]. Во втором случае в структуре УУ реализуются физические модели источников компенсируемых воздействий, поэтому свойство селективной инвариантности оказывается грубым ко всем параметрам объекта и ко всем параметрам УУ (кроме полюсозадающих). Практически, в этом случае свойство селективной инвариантности сохраняется при отклонениях всех параметров объекта и регулятора (кроме полюсозадающих) до тех пор, пока сохраняется свойство асимптотической устойчивости замкнутой системы.

Заключение. Приведённые выше условия разрешимости задачи синтеза инвариантных систем управления позволяют установить возможность реализации инвариантности проектируемой замкнутой системы управления на основе полных уравнений вход-выход стабилизируемого объекта, т.е. до начала расчета УУ.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Щипанов Г.В.* Теория инвариантности: Составители З.М. Лезина, В.И. Лезин. – М.: Физматлит, 2004.
2. *Мисриханов М.Ш.* Инвариантное управление многомерными системами. – М.: Энергоатомиздат, 2003.
3. *Кулебакин В.С.* Операторное *K*(*D*)-изображение функций и его практическое применение // Труды ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1958.
4. *Уонэм М.* Линейные многомерные системы управления. Геометрический подход. – М.: Наука, 1980.
5. *Гайдук А.Р.* Оценивание воздействий и инвариантность / Автоматика и телемеханика, 1984. № 3. – С. – 20-29.
6. *Гайдук А.Р.* О синтезе систем автоматического управления при заданной форме воздействий / Автоматика и телемеханика, 1984. № 6. – С. – 13-20.
7. *Петров Б.Н.* Теория автоматического управления. Избранные труды. Т. 1. – М.: Наука, 1983.
8. *Гайдук А.Р.* Об ограничениях, обусловленных заданной частью системы и управляющим устройством // Изв. вузов. Приборостроение, 1987. № 5. – С. 11-16.
9. *Солнечный Э.М.* Вырожденные системы и их использование в задаче синтеза заданного поведения. – М.: Наука, 1989.
10. *Подчукаев В.А.* Аналитические методы теории автоматического управления. – М.: Физматлит, 2002.