количество продуктов (изделий) i-й отрасли нужно произвести, чтобы с учетом прямых и косвенных затрат этих продуктов (изделий) получить единицу конечных продуктов (изделий) j-ой отрасли.

Полезность полученной модели проявляется также и тогда, когда необходимо определить, что изменится в валовом выпуске некоторой отрасли при предполагаемом изменении объемов конечной продукции всех отраслей:

$$\Delta\tilde{X}_i \cong \sum_{j=1}^{n} \tilde{B}_{ij}\Delta\tilde{Y}_j\,;\; i=1,2,\ldots,n, \qquad (11)$$

где $\Delta\tilde{X}_i$ и $\Delta\tilde{Y}_j$ – нечеткие изменения величин валовой и конечной продукции соответственно.

На основе изучения данных таблицы межотраслевых связей можно решить такие существенные для планирования «производства-потребления» задачи, как: определение нечетких величин выпуска на основе межотраслевого анализа; определение нечеткого сбалансированного состояния; определение цен при нечетком равновесии «производство-потребление».

Отличие предложенного метода от широко известной модели Леонтьева, применяемой для расчета межотраслевого баланса, заключается в использовании нечетких оценок, что дает гарантированные значения параметров системы в определенных интервалах. Следовательно, планирование производства-потребления, принятие решений об объемах изделий (продуктов) будут адекватно реальным ситуациям, и позволит избежать непредвиденных потерь элементам производства, а также позволит прогнозировать объемы дефицита для элементов потребления.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Заргарян Е.В.,* Модель нечеткого производственного баланса // Тезисы докладов Международной научной конференции «Проблемы развития естественных, технических и социальных систем». – Таганрог: ТРТУ, 2007.
2. *Глод О.Д., Финаева Е.В.* Model of the ILL-defined Economic Balance//2002 IEEE International Conference on Artificial Intelligence System, Copyright by The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc. – TSURE, 2002.
3. *Федосеев В.В.* Экономико-математические методы и модели в маркетинге. – М.: Финстатинформ, 1996.
4. *Браверман Э.М., Левин М.И.* Неравновесные модели экономических систем. – М.: Наука, 1981.
5. *Solow, R.M.* Competitive Valuation in a Dynamic Input-Output System, Econometrica, XXVII (January, 1959).

УДК 519.17

А.А. Целых

МЕТОД РАСПОЗНАВАНИЯ ИЗОМОРФНОГО ВЛОЖЕНИЯ НЕЧЕТКИХ ГРАФОВ НА ОСНОВЕ НЕЧЕТКОГО МНОЖЕСТВА КЛИК

В работе [1] рассмотрен алгоритм t-вложения нечетких графов. При заданном пороге t алгоритм отвечает на вопрос: существует ли t-вложение нечеткого графа $\tilde{G}_1 = (X, \tilde{E}_1)$ в граф $\tilde{G}_2 = (Y, \tilde{E}_2)$ и если «Да», то находит одно частное решение. Однако известен целый класс задач сопоставления с образцом (pattern matching), в которых необходимо найти все множество или некоторое подмножество решений. Так, частью национальной программы по противодействию коррупции является решение проблемы легализации (отмывания) доходов, полученных преступным путем. При проектировании специализированных информационных систем представляется актуальной задача выявления всех случаев вхождения эталонного шаблона аномальной транзакции в множество операций по перемещению денежных средств. Решение этой задачи предполагает формализацию аномальной транзакции и подмножества финансовых операций для анализа в виде нечетких графов и разработку алгоритмов установления соответствий между нечеткими математическими структурами.

Рассмотрим подход к перечислению всех изоморфных вложений нечетких графов на основе конструкции, близкой к модульному произведению графов [3].

Пусть $\widetilde{G}_1 = (X, \widetilde{E}_1)$ и $\widetilde{G}_2 = (Y, \widetilde{E}_2)$ – два нечетких графа с числом вершин $n = |X|$ и $m = |Y|$, причем $n \le m$.

Определение. Модульным произведением нечетких графов $\widetilde{G}_1 = (X, \widetilde{E}_1)$ и $\widetilde{G}_2 = (Y, \widetilde{E}_2)$ назовем нечеткий граф попарного сходства вершин $\widetilde{G}_\Diamond = \widetilde{G}_1 \Diamond \widetilde{G}_2$, четкое множество вершин которого $X \times Y$ есть декартово произведение множеств вершин X и Y, а нечеткое множество ребер содержит ребра со степенью

$$< \mu /((x_i, y_j), (x_k, y_l)) >= \mu(x_i, x_k) \to \mu(y_j, y_k),\ i \ne k,\ j \ne l.$$

Иными словами, вершины нового графа суть упорядоченные пары $\overrightarrow{xy}$, где $x \in X$, $y \in Y$, и число вершин $\left|\widetilde{G}_1 \Diamond \widetilde{G}_2\right| = n \cdot m$. Никакие две вершины, расположенные в одной и той же строке или в одном и том же столбце, ребром не соединены. Вершины из разных строк и разных столбцов соединены ребром со степенью истинности соответствия $x \to y$, которую устанавливает операция нечеткого следствия, в частности, по Лукасевичу $a \to b = \min(1, 1 - a + b)$.

Модульное произведение нечетких графов можно получить, используя матрицы смежности вершин. Пусть $\widetilde{R}_1$ и $\widetilde{R}_2$ – матрицы смежности вершин нечетких графов $\widetilde{G}_1$ и $\widetilde{G}_2$, соответственно. Тогда матрицу смежности вершин нечеткого графа модульного произведения $\widetilde{G}_\Diamond = \widetilde{G}_1 \Diamond \widetilde{G}_2$, обозначаемую $\widetilde{R}_\Diamond$, можно определить как $\widetilde{R}_\Diamond = \widetilde{R}_1 \Diamond \widetilde{R}_2$, где знаком $\Diamond$ обозначается произведение матриц, которое заключается в том, что каждый элемент первой матрицы умножается на вторую матрицу, используя операцию нечеткого следствия.

В нечетком графе попарного сходства вершин $\widetilde{G}_\Diamond$ степень δ нечеткой клики отражает степень близости подграфа к полному подграфу с $(X \times Y)'$ вершинами. Отсюда, все максимальные нечеткие *n*-клики в графе $\widetilde{G}_\Diamond = \widetilde{G}_1 \Diamond \widetilde{G}_2$ взаимнооднозначно соответствуют всевозможным изоморфным δ-вложениям нечеткого графа $\widetilde{G}_1$ в качестве подграфа в $\widetilde{G}_2$.

Для нахождения всех максимальных нечетких клик по матрице смежности $\tilde{G}_{\Diamond}$ воспользуемся методом, основанным на методе Магу [4].

Пример. Найдем модульное произведение нечетких неориентированных графов $\tilde{G}_1$ и $\tilde{G}_2$, показанных на рис. 1.

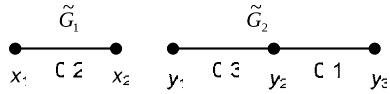

Рис. 1. Исходные нечеткие графы

Матрицы смежности $\tilde{R}_1$ и $\tilde{R}_2$ имеют вид:

$$\tilde{R}_1 = \begin{array}{c|cc|} & x_1 & x_2 \\ x_1 & 0 & 0.2 \\ x_2 & 0.2 & 0 \end{array} \qquad \tilde{R}_2 = \begin{array}{c|ccc|} & y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1 & 0 & 0.3 & 0 \\ y_2 & 0.3 & 0 & 0.1 \\ y_3 & 0 & 0.1 & 0 \end{array}$$

Матрица смежности $\tilde{R}_{\Diamond}$ нечеткого графа модульного произведения будет иметь следующий вид:

$$\tilde{R}_1 \Diamond \tilde{R}_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.9 & 0 \\ 0 & 1 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Нечеткий граф модульного произведения $\tilde{G}_{\Diamond} = \tilde{G}_1 \Diamond \tilde{G}_2$ показан на рис. 2.

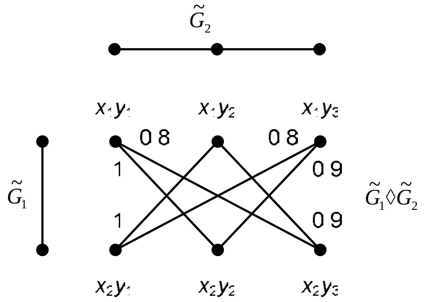

Рис. 2. Нечеткий граф попарного сходства вершин

Рассматриваемый нечеткий граф $\tilde{G}_{\Diamond}$ имеет шесть максимальных нечетких 2-клик: $\Psi_1 = \{x_1 y_2, x_2 y_1\}$, $\Psi_2 = \{x_1 y_1, x_2 y_2\}$ со степенью 1, $\Psi_3 = \{x_1 y_2, x_2 y_3\}$, $\Psi_4 = \{x_1 y_3, x_2 y_2\}$ со степенью 0.9 и $\Psi_5 = \{x_1 y_3, x_2 y_1\}$, $\Psi_6 = \{x_1 y_1, x_2 y_3\}$ со степенью 0.8, которые взаимнооднозначно соответствуют изоморфным δ-вложениям нечеткого графа $\tilde{G}_1$ в качестве подграфа в $\tilde{G}_2$:

$$\varphi_1^{1.0} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix}, \ \varphi_2^{1.0} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}, \ \varphi_3^{0.9} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_2 & y_3 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_4^{0.9} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_3 & y_2 \end{pmatrix}, \ \varphi_5^{0.8} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_3 & y_1 \end{pmatrix}, \ \varphi_6^{0.8} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_3 \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем представляет интерес применение метода распознавания изоморфного вложения нечетких графов к ориентированным нечетким графам с петлями, которые в контексте противодействия легализации (отмыванию) доходов, полученных преступным путем, соответствуют пополнению банковского счета его владельцем.

Если по условию задачи требуется найти все изоморфные вложения со степенью не менее некоторого порогового значения t^*, можно вычеркнуть в матрице смежности $\tilde{R}_\Diamond$ нечеткого графа модульного произведения все элементы $r_\Diamond < t^*$.

Для распознавания t-изоморфизма нечетких графов при $n = m$ необходимо вместо операции нечеткого следствия использовать операцию нечеткой эквивалентности $x \leftrightarrow y = (x \to y) \,\&\, (y \to x)$. Получим обобщение конструкции Визинга [3] на случай нечетких графов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Мелихов А.Н., Карелин В.П.* Методы распознавания изоморфизма и изоморфного вложения четких и нечетких графов. – Таганрог: ТРТУ, 1995. – 90 с.
2. Money Laundering Detection: Preserving the Integrity of Financial Institutions // Insight, August 2002.
3. *Зыков А.А.* Основы теории графов. – М.: Наука, 1987. – 382 с.
4. *Берштейн Л.С., Боженюк А.В.* Нечеткие графы и гиперграфы. – М.: Научный мир, 2005. – 256 с.