УДК 528.854.2

А.Н. Каркищенко, А.С. Горбань

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ МЕР СХОДСТВА ПОЛУТОНОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ*

Введение. В последние время все больше стало появляться работ по исследованию симметрии в области компьютерного зрения. Однако существующие работы по данной теме можно условно разделить на два больших практически не пересекающихся класса: сугубо теоретические исследования симметрии как группового свойства изображений [1] и методы, позволяющие количественно определить степень симметричности того или иного объекта [2-5]. Данная работа посвящена исследованию понятия симметрии применительно к цифровым изображениям и может послужить своеобразным «мостом»' между этими двумя классами работ.

В основе определения цифрового изображения лежит определение элемента изображения – пикселя. Каждый пиксель задается своими координатами в пределах изображения и интенсивностью света. Важным является только тот факт, что изображение представимо в виде множества пикселей. Авторами аксиоматически вводится понятие схожести элементов изображения – пикселей, и на его основе для произвольной группы симметрий теоретически строго выводится понятие меры симметричности изображения в целом.

Мера сходства элементов изображения [6] определяется через векторы признаков изображения – некоторые инвариантные относительно действия исследуемой группы симметрий локальные характеристики изображений.

1. Функции признаков изображения.

Определение 1.1. Функцией признаков изображения называется векторная функция $\omega(\mathbf{x})$, ставящая в соответствие точкам плоскости $\boldsymbol{R}^2$ вектор признаков $\omega(\mathbf{x}) = \left(\omega_1(\mathbf{x}),\ldots,\omega_n(\mathbf{x})\right)^T$, где $\omega_i(\mathbf{x})$ – какие-то инвариантные относительно некоторой группы преобразований характеристики изображения I.

Множество всех возможных векторов признаков будем называть пространством признаков и обозначать через W. В дальнейшем будем также считать, что W наделено некоторой метрической структурой. При этом понятие инвариантности характеристик должно быть конкретизировано в зависимости от того, какие преобразования допускаются в используемом методе исследования симметрии. Выбор используемых инвариантных характеристик $\omega(x)$ имеет большое значение для методов обработки изображений и анализа симметрии.

В простейшем случае, в отсутствие каких либо шумов и оптических искажений изображения, в качестве инвариантной характеристики точки изображения можно использовать интенсивность: $\omega(\mathbf{x}) \equiv (I(\mathbf{x}))$.

Однако такой подход плох не только тем, что является неустойчивым к зашумлению, но в большей степени тем, что не учитывает более общий *контекст* изображения, например, цвет, форму изображения в окрестности точки и прочее. В качестве компонент вектор-функции признаков можно также использовать первые и вторые частные производные функции изображения и кривизну:

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 08-07-00129, № 07-07-00067).

$$\omega(\mathbf{x}) \equiv \left(I(\mathbf{x}), I'_{x_1}(\mathbf{x}), I'_{x_2}(\mathbf{x}), I'_{x_2}(\mathbf{x}) I''_{x_1}(\mathbf{x}) - I''_{x_2}(\mathbf{x}) I'_{x_1}(\mathbf{x}) \right)^T .$$

Существует достаточно большое количество различных локальных инвариантов изображений, однако исследование инвариантных характеристик изображений лежит вне рамок данной исследования и описано в работе [7].

2. Определение мер сходства точек изображения

Определение 2.1. Мерой сходства точек изображения $I(\mathbf{x})$ относительно функции признаков ω называется интегрируемая в области $D \times D$ функция $\mu_I : D \times D \to [0,1]$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) для любых $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \in D$ из того, что $\|\omega(\mathbf{x}_1) - \omega(\mathbf{x}_2)\| \geq \|\omega(\mathbf{x}_3) - \omega(\mathbf{x}_4)\|$, где $\|\cdot\|$ – некоторая норма в пространстве векторов признаков, следует, что $\mu(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \leq \mu(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)$, причем $\mu(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mu(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)$ в том и только том случае, если $\|\omega(\mathbf{x}_1) - \omega(\mathbf{x}_2)\| = \|\omega(\mathbf{x}_3) - \omega(\mathbf{x}_4)\|$ (монотонное убывание по расстоянию);

2) если $\|\omega(\mathbf{x}_1) - \omega(\mathbf{x}_2)\| = 0$, то $\mu(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 1$ (нормированность);

3) если $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \notin D \times D$, то $\mu(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ не определена.

Дадим поточечную количественную характеристику степени сходства двух точек изображения в терминах связанного с изображением пространства признаков W. Для количественной оценки симметричности изображения необходимо обобщить данное определение так, чтобы оно, с одной стороны, интегрально учитывало сходства в признаковом пространстве совокупности точек и, в частности, некоторых областей изображения, а с другой, учитывало действие группы преобразований соответствующих автоморфных областей. Рассмотрим два возможных варианта обобщения поточечного сходства.

Определение 2.2. Пусть G – некоторая группа, действующая на $\boldsymbol{R}^2$. Область D будем называть G – автоморфной, если для любого $g \in G$ справедливо равенство $gD = D$.

Пусть G – некоторая конечная группа преобразований G-автоморфной области D, $D \subseteq \boldsymbol{R}^2$. Рассмотрим орбиту $G\mathbf{x}$ группы G, порожденную элементом $\mathbf{x} \in D$, то есть $G\mathbf{x} = \{ g\mathbf{x} \mid g \in G \}$. Элементы принадлежащие одной и той же орбиты называются эквивалентными.

Определение 2.3. Мерой сходства точек орбиты $G\mathbf{x}$, $|G\mathbf{x}| \neq 1$, называется функция

$$\mu(G\mathbf{x}) = \frac{1}{|G\mathbf{x}|(|G\mathbf{x}|-1)} \sum_{\substack{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in G\mathbf{x} \\ \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2}} \mu(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2). \quad (1)$$

Данная мера равна усредненному значению всех мер сходства по всем парам точек, принадлежащих орбите $G\mathbf{x}$.

Очевидно, что эта функция удовлетворяет условию $0 \leq \mu(G\mathbf{x}) \leq 1$, $i = 1, 2$, причем $\mu(G\mathbf{x}) = 1$ в том и только том случае, если $\mu(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 1$ для всех точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in G\mathbf{x}$.

Выражению (1) можно придать другой, в некоторых случаях более удобный вид. А именно, меру сходства можно выразить не через элементы орбит, а через элементы группы G. Для этого нам потребуются некоторые определения из теории групп, действующих на множествах.

Пусть G – группа, M – множество, на котором определено действие группы G. Стационарной подгруппой или стабилизатором в G элемента $\mathbf{x}_0 \in M$ называется множество $St(\mathbf{x}_0)$ элементов группы G, которые оставляют $\mathbf{x}_0$ неподвижным, то есть $St(\mathbf{x}_0) = \{g \mid g \in G, g\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0\}$. Множество $St(\mathbf{x}_0)$ является подгруппой группы G.

Пусть теперь $\mathbf{x}_1 \in G\mathbf{x}$. Тогда все элементы группы G, отображающие $\mathbf{x}$ в $\mathbf{x}_1$, образуют левый смежный класс группы G по стабилизатору $St(\mathbf{x})$. Действительно, если $\mathbf{x}_1 = g_1\mathbf{x} = g_2\mathbf{x}_2$, то $\mathbf{x} = g_1^{-1}g_2\mathbf{x}$, и, следовательно, $g_1^{-1}g_2 \in St(\mathbf{x})$. Значит, $g_2 \in g_1St(\mathbf{x})$, то есть g_2 является элементом левого смежного класса $g_1St(\mathbf{x})$. Отсюда сразу следует, что левые смежные классы находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами орбиты $G\mathbf{x}$. Из этого вытекает, в частности, что $|G\mathbf{x}| = |G/St(\mathbf{x})| = ind_G St(\mathbf{x})$, где $ind_G St(\mathbf{x})$ – индекс подгруппы $St(\mathbf{x})$ в группе G, и по теореме Лагранжа индекс $ind_G St(\mathbf{x})$, а значит и длина орбиты $|G\mathbf{x}|$, делят порядок группы $|G|$ нацело. Важно подчеркнуть, что все левые смежные классы будут иметь одну и ту же мощность, совпадающую с порядком стабилизатора $St(\mathbf{x})$.

Утверждение 2.1. *Мера сходства точек орбиты* $G\mathbf{x}$, $|G\mathbf{x}| \neq 1$, *выражается формулой*

$$\mu(G\mathbf{x}) = \frac{1}{|G|\left(|G| - |St(\mathbf{x})|\right)} \sum_{h,g\in G} \mu(g\mathbf{x}, h\mathbf{x}) - \frac{|St(\mathbf{x})|}{|G| - |St(\mathbf{x})|}.$$

Доказательство. Пусть $g_1St(\mathbf{x})$ – левый смежный класс, соответствующий элементу $\mathbf{x}_1$ орбиты $G\mathbf{x}$, а $g_2St(\mathbf{x})$ – левый смежный класс, соответствующий элементу $\mathbf{x}_2$ орбиты $G\mathbf{x}$. Тогда для любых $g \in g_1St(\mathbf{x})$ и $h \in g_2St(\mathbf{x})$ будет выполняться равенство $\mu(g\mathbf{x}, h\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. Таким образом, значения меры сходства $\mu(g\mathbf{x}, h\mathbf{x})$ полностью определяется выбором левых смежных классов, из которых берутся элементы g и h, и не зависят от того, каким образом сами элементы выбираются из соответствующих классов. Поэтому

$$\sum_{g\in g_1St(\mathbf{x})} \sum_{h\in g_2St(\mathbf{x})} \mu(g\mathbf{x}, h\mathbf{x}) = \left|g_1St(\mathbf{x})\right|\left|g_2St(\mathbf{x})\right| \mu(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \left|St(\mathbf{x})\right|^2 \mu(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2).$$

Просуммируем последнее равенство по всем различным парам точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in G\mathbf{x}$:

$$\left|St(\mathbf{x})\right|^2 \sum_{\substack{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\in G\mathbf{x}\\ \mathbf{x}_1\neq\mathbf{x}_2}} \mu(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sum_{\substack{\mathbf{x}_1\in G\mathbf{x}\\ }} \sum_{\substack{\mathbf{x}_2\in G\mathbf{x}\\ \mathbf{x}_1\neq\mathbf{x}_2}} \left(\sum_{g\in g_1St(\mathbf{x})} \sum_{h\in g_2St(\mathbf{x})} \mu(g\mathbf{x}, h\mathbf{x}) \right) =$$

$$= \sum_{\mathbf{x}_1 \in G\mathbf{x}} \sum_{g \in g_1 St(\mathbf{x})} \left(\sum_{\mathbf{x}_2 \in G\mathbf{x}} \sum_{h \in g_2 St(\mathbf{x})} \mu(g\mathbf{x}, h\mathbf{x}) \right) - \sum_{\mathbf{x}_1 \in G\mathbf{x}} \left(\sum_{g \in g_1 St(\mathbf{x})} \sum_{h \in g_1 St(\mathbf{x})} \mu(g\mathbf{x}, h\mathbf{x}) \right).$$

Заметим, что двойные суммы в первом слагаемом эквивалентны суммированию по всем элементам группы G. Действительно, внутренние суммы пробегают по всем элементам смежных классов, а внешние – по всем смежным классам и, таким образом, осуществляется суммирование по всей группе G.

Рассмотрим теперь вторую круглую скобку. Поскольку суммирование осуществляется по всем $g, h \in g_1 St(\mathbf{x})$, то $g\mathbf{x} = h\mathbf{x} = \mathbf{x}_1$, следовательно, $\mu(g\mathbf{x}, h\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) = 1$. Поэтому выражение в скобке равно

$$\sum_{g \in g_1 St(\mathbf{x})} \sum_{h \in g_1 St(\mathbf{x})} 1 = \left| g_1 St(\mathbf{x}) \right|^2 = \left| St(\mathbf{x}) \right|^2.$$

С учетом сделанных замечаний, получаем

$$\left| St(\mathbf{x}) \right|^2 \sum_{\substack{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in G\mathbf{x} \\ \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2}} \mu(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sum_{g, h \in G} \mu(g\mathbf{x}, h\mathbf{x}) - \left| G\mathbf{x} \right| \left| St(\mathbf{x}) \right|^2.$$

С учетом этого получаем

$$\mu(G\mathbf{x}) = \frac{1}{\left| G\mathbf{x} \right| \left(\left| G\mathbf{x} \right| - 1 \right)} \sum_{\substack{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in G\mathbf{x} \\ \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2}} \mu(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) =$$

$$= \frac{1}{\left| St(\mathbf{x}) \right|^2 \left| G\mathbf{x} \right| \left(\left| G\mathbf{x} \right| - 1 \right)} \sum_{g, h \in G} \mu(g\mathbf{x}, h\mathbf{x}) - \frac{1}{\left| G\mathbf{x} \right| - 1},$$

что с учетом равенства $\left| St(\mathbf{x}) \right| \left| G\mathbf{x} \right| = \left| G \right|$ и доказывает утверждение.

Пусть теперь $X, X \subseteq D$ – произвольное подмножество G-автоморфной области. По аналогии с орбитой рассмотрим множество

$$GX = \left\{ g\mathbf{x} \mid g \in G, \mathbf{x} \in X \right\}.$$

Распространим понятие меры на множества такого вида. Для этого, прежде всего, заметим, что множество GX можно выразить через орбиты входящих в X элементов следующим образом:

$$GX = \bigcup_{\mathbf{x} \in X} \left\{ g\mathbf{x} \mid g \in G \right\} = \bigcup_{\mathbf{x} \in X} GX.$$

При этом очевидно, что две произвольные орбиты либо не пересекаются, либо совпадают. Для более детального описания множества X введем вспомогательные подмножества

$$X_k = \left\{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in X, \left| G\mathbf{x} \cap X \right| = k, k = 1, 2, \ldots, n \right\}.$$

Множество X_k состоит, таким образом, из тех элементов множества X, которые представлены в X в точности k элементами своей орбиты. Очевидно, что $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$ – разбиение множества X, с той лишь особенностью, что среди $X_1, X_2, \ldots, X_n$ могут быть пустые множества.

Как и раньше, через $m(A)$ будем обозначать меру множества A.

Определение 2.4. *Мерой сходства множества* GX *называется функция*

$$\mu(GX) = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}m(X_k)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\iint_{X_k}\mu(G\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Нетрудно видеть, что введенная мера удовлетворяют условию $0 \le \mu(GX) \le 1$, причем равенство $\mu(GX) = 1$ достигается в том и только том случае, если $\mu(G\mathbf{x}) = 1$ для всех точек $\mathbf{x} \in X$.

Важный частный случай введенной меры сходства получается в том случае, если в множестве X каждая точка $\mathbf{x}$ является единственным представителем её орбиты относительно группы G. Действительно, если для любой точки $\mathbf{x} \in X$ имеет место $|G\mathbf{x} \cap X| = 1$, то $X_2 = X_3 = \ldots = X_n = \varnothing$ и $X_1 = X$, поэтому

$$\mu(GX) = \frac{1}{m(X)}\iint_{X}\mu(G\mathbf{x})d\mathbf{x}, i = 1,2.$$

Перечислим некоторые простые свойства, которым удовлетворяет введенная мера сходства.

Утверждение 2.2. *Введённая мера удовлетворяют условию нормировки* $0 \le \mu(GX) \le 1, i = 1,2$, *причем* $\mu(GX) = 1$ *в том и только в том случае, если* $\mu(G\mathbf{x}) = 1$ *для всех точек* $\mathbf{x} \in X$.

Утверждение 2.3. *Пусть* X_1 *и* X_2 *– два подмножества из автоморфной относительно группы* G *области, причем* $X_1 \cap X_2 = \varnothing$. *Кроме того, предположим, что множество* $X = X_1 \cup X_2$ *не содержит различных элементов, принадлежащих одной и той же орбите. Тогда*

$$\mu(GX) = \frac{m(X_1)}{m(X)}\mu(GX_1) + \frac{m(X_2)}{m(X)}\mu(GX_2), \quad i = 1,2.$$

Доказательство. Заметим, что $G(X_1 \cup X_2) = G(X_1) \cup G(X_2)$ и $G(X_1) \cap G(X_2) = \varnothing$. Действительно, предположим противное, что $G(X_1) \cap G(X_2) \ne \varnothing$. Пусть $\mathbf{z} \in GX_1 \cap X_2$. Следовательно, найдутся такие элементы $\mathbf{x}_1 \in X_1$, $\mathbf{x}_2 \in X_2$ и $g,h \in G$, что $g\mathbf{x}_1 = h\mathbf{x}_2 = \mathbf{z}$. Отсюда следует, что $\mathbf{x}_2 = h^{-1}g\mathbf{x}_1$, значит в $X = X_1 \cup X_2$ содержатся элементы, принадлежащие одной орбите, что противоречит предположению. Тогда

$$\mu(GX) = \frac{1}{m(X)}\iint_{X_1 \cup X_2}\mu(G\mathbf{x})d\mathbf{x} = \frac{1}{m(X)}\left(\iint_{X_1}\mu(G\mathbf{x})d\mathbf{x} + \iint_{X_1}\mu(G\mathbf{x})d\mathbf{x}\right) =$$

$$= \frac{m(X_1)}{m(X)}\mu(GX_1) + \frac{m(X_2)}{m(X)}\mu(GX_2).$$

Из этого утверждения, в частности, вытекает, что, если X удовлетворяет указанному выше свойству, то для любого разбиения $X = X_1 \cup X_2$ справедливо

$$\min\{\mu(GX_1), \mu(GX_2)\} \le \mu(GX) \le \max\{\mu(GX_1), \mu(GX_2)\}.$$

Заключение. Основным результатом данной работы является определение меры сходства множества элементов изображения, параметризованное группой преобразований. Выбирая в качестве группы группу отражений или вращений изображений, мы получаем определение для соответствующего типа симметрий.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Henk J. A.M.* Heijmans and Alexander Tuzikov. Similarity and Symmetry Measures for Convex Shapes Using Minkowski Addition. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 20(9):980-993, 1998.
2. *D. Geiger and T. Liu and A. Yuille.* Segmenting by seeking the symmetry axis. 1998.
3. *Stephane Derrode and Faouzi Ghorbel.* Shape Distance For Rotation Estimation And Rotational Symmetry Detection In Gray-Level Images.
4. *Tat-Jen Cham and Roberto Cipolla.* Skewed symmetry detection through local skewed symmetries. *BMVC 94: Proceedings of the conference on British machine vision (vol. 2)*, pages 549--558, Surrey, UK, UK, 1994. BMVA Press.
5. *V. Di Gesu and C. Valenti.* The Discrete Symmetry Transform in computer vision. 1995.
6. *Ming Li and Xin Chen and Xin Li and Bin Ma and Paul Vitбnyi.* The similarity metric. *SODA '03: Proceedings of the fourteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, pages 863-872, Philadelphia, PA, USA, 2003. Society for Industrial and Applied Mathematics.
7. Горбань А.С., Каркищенко А.Н. Инвариантные характеристики в задачах обнаружения симметрии изображений // Вторая Международная конференция «Системный анализ и информационные технологии» САИТ-2007 (10-14 сентября 2007г., Обнинск, Россия): Труды конференции. 2:210-212, 2007.

УДК 519.712.2

Л.А. Гладков, Н.В. Гладкова

НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ АНАЛИЗА И ИЗВЛЕЧЕНИЯ ДАННЫХ НА ОСНОВЕ НЕЧЕТКИХ ГИБРИДНЫХ МЕТОДОВ*

В настоящее время проблемы повышения качества и сложности создаваемых автоматизированных устройств и систем в различных областях науки и техники связывают с возможностью их интеллектуализации, т.е. придания создаваемым техническим объектам и системам ряда функций обычно выполняемых человеком. Такими функциями можно считать работу по анализу и принятию решений в условиях неполной, нечеткой или противоречивой входной информации, поиск и выделение в массивах входной информации ранее неизвестных, нетривиальных, но практически полезных закономерностей, их оценка и интерпретация. В этом смысле одной из важнейших задач является создание эффективных средств обработки и интеллектуального анализа данных, извлечения знаний, а также средств поиска закономерностей для использования их в системах принятия решений.

Проблема интеллектуального анализа и извлечения знаний (Data Mining) из имеющихся массивов данных сегодня чрезвычайно актуальна. Data Mining – это

* Работа выполнена при поддержке: РФФИ (грант № 07-01-00174), РНП 2.1.2.3193, РНП 2.1.2.2238, г/б № Т.12.8.08.