

УДК 681.3.01

С.Л. Балабаев, И.Ю. Балабаева, В.Г. Радецкий

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОПРЯЖЕННЫХ ТОЧЕК ДЛЯ ЗАДАЧИ  
ВОССТАНОВЛЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ КООРДИНАТ ВЕРХНИХ  
ПЛОСКОСТЕЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ****Введение**

В рамках хозяйственной работы «Разработка и внедрение системы бесконтактного определения разновысотности цилиндрических объектов», проводимой на кафедре по заказу НИИ МВС, для восстановления трехмерных координат точек использовались методы фотограмметрии. Один из ключевых вопросов при использовании такого подхода – это поиск сопряженных точек на изображениях исследуемой сцены, полученных с разных ракурсов. Для решения этого вопроса был разработан специализированный метод определения сопряженных точек на изображениях сцены реактора, полученных одной камерой с разных ракурсов. Метод основан на строгих геометрических закономерностях исследуемой сцены и включает два этапа. На первом этапе производится поиск 14 сопряженных точек (первичных), которые являются центрами эллипсов, образованных верхними гранями внешних и внутренних стенок цилиндров. На втором этапе производится поиск еще 72-х сопряженных точек (вторичных) для уточнения значений разновысотности, определенных по первым 14 точкам.

**Выбор первичных сопряженных точек**

Используя систему параметров, определенных для эллипсов, соответствующих каждой верхней поверхности цилиндров в каждом из изображений серии, и выделив сопряженные точки, можно реконструировать трехмерную сцену.

Сопряженными точками для начала будут являться центры построенных эллипсов. Эти точки (пиксели) проще всего идентифицировать на изображениях, зная ракурс съемки каждого изображения и перемещения каждого цилиндра в изображении при смене ракурса.

Очевидно, что в идеальном случае, при правильно выбранном ракурсе (проекция линии зрения камеры перпендикулярна двум сторонам шестиугольника, образованного центрами крайних цилиндров соты и равной высоте установки цилиндрических объектов) соответствующие стороны, а также не пересекающая их диагональ шестиугольника будут параллельны. Т.е. на изображении центры эллипсов будут иметь только три значения координаты  $y$ : для ближней пары цилиндров, для дальней пары цилиндров, а также трех оставшихся в "соте" цилиндров. При переходе от одного ракурса к другому в этом случае (при соблюдении указанных идеальных условий) центры эллипсов будут иметь тот же набор координат в плоскости изображения.

В реальности высоты установки цилиндров могут отличаться друг от друга. В этом случае формируется 15 пар изображений:

изображение с ракурса 1 ↔ изображение с ракурса 2  
изображение с ракурса 1 ↔ изображение с ракурса 3  
изображение с ракурса 1 ↔ изображение с ракурса 4  
изображение с ракурса 1 ↔ изображение с ракурса 5  
изображение с ракурса 1 ↔ изображение с ракурса 6

изображение с ракурса 2 ↔ изображение с ракурса 3  
 изображение с ракурса 2 ↔ изображение с ракурса 4  
 изображение с ракурса 2 ↔ изображение с ракурса 5  
 изображение с ракурса 2 ↔ изображение с ракурса 6  
 изображение с ракурса 3 ↔ изображение с ракурса 4  
 изображение с ракурса 3 ↔ изображение с ракурса 5  
 изображение с ракурса 3 ↔ изображение с ракурса 6  
 изображение с ракурса 4 ↔ изображение с ракурса 5  
 изображение с ракурса 4 ↔ изображение с ракурса 6  
 изображение с ракурса 5 ↔ изображение с ракурса 6

В каждой паре выбираются сопряженные точки, соответствующие центрам эллипсов. По числу наблюдаемых в "соте" цилиндров их должно быть 7.

### Выбор сопряженных точек

Поиск сопряженных точек иллюстрирует рис. . Точки пересечения линий, соединяющих центры цилиндров одной группы, с верхними эллипсами этих цилиндров являются точками, которые можно однозначно определить на каждом снимке, а значит и легко сопоставить их между снимками.

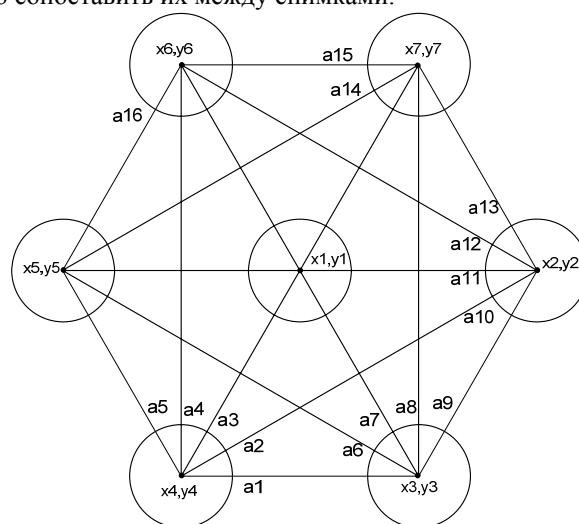


Рис. 1. Построение прямых, соединяющих центры эллипсов

### Построение линий, соединяющих центры эллипсов

Первым этапом является нахождение уравнений прямых, соединяющих центры семи цилиндров, находящихся в "соте". Известно, что уравнение прямой можно получить, зная координаты двух точек, принадлежащей этой прямой. Для шестнадцати прямых, изображенных выше (см.рис.1), такими точками являются:

- $a_1$ :  $(x_3, y_3)$  и  $(x_4, y_4)$ ;
- $a_2$ :  $(x_2, y_2)$  и  $(x_4, y_4)$ ;
- $a_3$ :  $(x_4, y_4)$  и  $(x_7, y_7)$ ;
- $a_4$ :  $(x_4, y_4)$  и  $(x_6, y_6)$ ;
- $a_5$ :  $(x_4, y_4)$  и  $(x_5, y_5)$ ;

$a_6$ :  $(x_3, y_3)$  и  $(x_5, y_5)$ ;  
 $a_7$ :  $(x_3, y_3)$  и  $(x_6, y_6)$ ;  
 $a_8$ :  $(x_3, y_3)$  и  $(x_7, y_7)$ ;  
 $a_9$ :  $(x_2, y_2)$  и  $(x_3, y_3)$ ;  
 $a_{10}$ :  $(x_2, y_2)$  и  $(x_4, y_4)$ ;  
 $a_{11}$ :  $(x_2, y_2)$  и  $(x_5, y_5)$ ;  
 $a_{12}$ :  $(x_2, y_2)$  и  $(x_6, y_6)$ ;  
 $a_{13}$ :  $(x_2, y_2)$  и  $(x_7, y_7)$ ;  
 $a_{14}$ :  $(x_5, y_5)$  и  $(x_7, y_7)$ ;  
 $a_{15}$ :  $(x_6, y_6)$  и  $(x_7, y_7)$ ;  
 $a_{16}$ :  $(x_5, y_5)$  и  $(x_6, y_6)$ .

Уравнение прямой  $a_n$ ,  $n = \overline{1, 16}$  в общем виде выглядит следующим образом:

$$y = k_n x + b_n,$$

где  $k_n$  и  $b_n$  – коэффициенты, определяющие соответственно угол наклона прямой и ее смещение вдоль оси ОУ относительно начала координат. Именно этими коэффициентами и определяется прямая.

Пусть прямая  $a_n$  проходит через точки  $(x_i, y_i)$  и  $(x_j, y_j)$ . Тогда справедлива следующая система уравнений:

$$\begin{cases} y_i = k_n x_i + b_n; \\ y_j = k_n x_j + b_n. \end{cases}$$

Откуда нетрудно выразить  $k_n$  и  $b_n$ :

$$k_n = \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i},$$

$$b_n = \frac{x_j y_i - x_i y_j}{x_j - x_i}.$$

Таким образом, можно найти коэффициенты всех шестнадцати прямых, подставляя вместо  $x_i, y_i, x_j$  и  $y_j$  координаты центров соответствующих эллипсов.

#### Определение точек пересечения прямых и эллипсов

Каноническое уравнение эллипса с центром в точке  $M(x_c, y_c)$  имеет следующий вид:

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1.$$

Однако, в более общем случае, эллипс может быть повернут на некоторый угол  $\varphi$  относительно оси ОХ. Для получения уравнения, учитывающего такой по-

ворот, необходимо провести преобразование координат  $x$  и  $y$  по следующему закону:

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos \varphi + y \cdot \sin \varphi; \\ y' = y \cdot \cos \varphi - x \cdot \sin \varphi. \end{cases}$$

Таким образом, уравнение эллипса с центром в точке  $M(x_c, y_c)$  и повернутого относительно оси  $OX$  на угол  $\varphi$  принимает вид

$$\frac{(x \cdot \cos \varphi + y \cdot \sin \varphi - x_c)^2}{a^2} + \frac{(y \cdot \cos \varphi - x \cdot \sin \varphi - y_c)^2}{b^2} = 1. \quad (1)$$

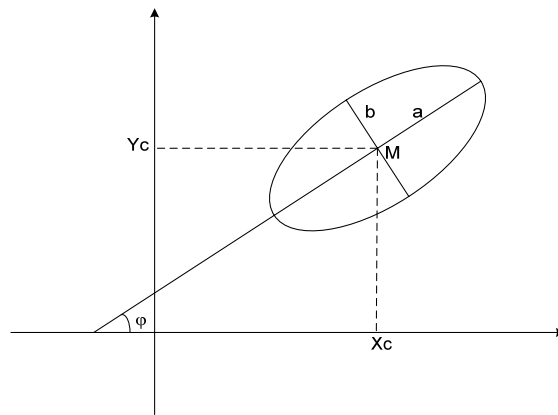


Рис. 2. Пять параметров произвольного эллипса

В общем случае существуют две точки пересечения прямой и эллипса. В случае касательной эти точки совпадают и являются точкой касания. Для нахождения точек пересечения эллипса, представленного уравнением (1), с прямой, представленной уравнением

$$y = k_0 \cdot x + b_0, \quad (2)$$

подставляем в уравнение (1) вместо  $y$  правую часть выражения (2). Откуда

$$\frac{(x \cos \varphi + (k_0 x + b_0) \sin \varphi - x_c)^2}{a^2} + \frac{((k_0 x + b_0) \cos \varphi - x \sin \varphi - y_c)^2}{b^2} = 1. \quad (3)$$

Теперь, решив уравнение (3) относительно  $x$ , находим  $x$ -координаты точек пересечения:

$$\begin{aligned} \frac{(x \cos \varphi + k_0 x \sin \varphi + b_0 \sin \varphi - x_c)^2}{a^2} + \frac{(-x \sin \varphi + k_0 x \cos \varphi + b_0 \cos \varphi - y_c)^2}{b^2} &= 1; \\ \frac{(x(\cos \varphi + k_0 \sin \varphi) + b_0 \sin \varphi - x_c)^2}{a^2} + \frac{(x(-\sin \varphi + k_0 \cos \varphi) + b_0 \cos \varphi - y_c)^2}{b^2} &= 1. \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{x^2(\cos \varphi + k_0 \sin \varphi)^2 + 2x(\cos \varphi + k_0 \sin \varphi)(b_0 \sin \varphi - x_c) + (b_0 \sin \varphi - x_c)^2}{a^2} + \frac{x^2(k_0 \cos \varphi - \sin \varphi)^2 + 2x(k_0 \cos \varphi - \sin \varphi)(b_0 \cos \varphi - y_c) + (b_0 \cos \varphi - y_c)^2}{b^2} = 1;$$

Или при  $a^2 \cdot b^2 \neq 0$ :

$$x^2 b^2 (\cos \varphi + k_0 \sin \varphi)^2 + 2x b^2 (\cos \varphi + k_0 \sin \varphi)(b_0 \sin \varphi - x_c) - 2x_c b^2 b_0 \sin \varphi + b_0^2 b^2 \sin^2 \varphi + b^2 x_c^2 + x^2 a^2 (k_0 \cos \varphi - \sin \varphi)^2 + 2x a^2 (k_0 \cos \varphi - \sin \varphi)(b_0 \cos \varphi - y_c) - 2y_c a^2 b_0 \cos \varphi + b_0^2 a^2 \cos^2 \varphi + a^2 y_c^2 - a^2 b^2 = 0.$$

Преобразуем уравнение к виду

$$x^2 (b^2 (\cos \varphi + k_0 \sin \varphi)^2 + a^2 (k_0 \cos \varphi - \sin \varphi)^2) + x (2b^2 (\cos \varphi + k_0 \sin \varphi)(b_0 \sin \varphi - x_c) + 2a^2 (k_0 \cos \varphi - \sin \varphi)(b_0 \cos \varphi - y_c)) - 2x_c b^2 b_0 \sin \varphi + b_0^2 b^2 \sin^2 \varphi + b^2 x_c^2 - 2y_c a^2 b_0 \cos \varphi + b_0^2 a^2 \cos^2 \varphi + a^2 y_c^2 - a^2 b^2 = 0.$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} (b^2 (\cos \varphi + k_0 \sin \varphi)^2 + a^2 (k_0 \cos \varphi - \sin \varphi)^2) &= a_1; \\ (2b^2 (\cos \varphi + k_0 \sin \varphi)(b_0 \sin \varphi - x_c) + 2a^2 (k_0 \cos \varphi - \sin \varphi)(b_0 \cos \varphi - y_c)) &= b_1; \\ -2x_c b^2 b_0 \sin \varphi + b_0^2 b^2 \sin^2 \varphi + b^2 x_c^2 - 2y_c a^2 b_0 \cos \varphi + b_0^2 a^2 \cos^2 \varphi + a^2 y_c^2 - a^2 b^2 &= c_1. \end{aligned}$$

Тогда получаем обычное квадратное уравнение

$$x^2 a_1 + x b_1 + c_1 = 0,$$

решение которого

$$x_{1,2} = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4a_1 c_1}}{2a_1}$$

дает x-координаты искомых точек пересечения эллипса, заданного уравнением (1) и прямой, заданной уравнением (2).

Для нахождения y-координат этих точек подставим их x-координаты в уравнение (2). Откуда

$$\begin{aligned} y_1 = k_0 x_1 + b_0 &= k_0 \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4a_1 c_1}}{2a_1} + b_0, \\ y_2 = k_0 x_2 + b_0 &= k_0 \frac{-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4a_1 c_1}}{2a_1} + b_0. \end{aligned}$$

В рамках решаемой задачи необходимо найти точки пересечения каждого периферийного эллипса с пятью прямыми. Это дает по десять точек на каждом из периферийных эллипсов. Для центрального эллипса необходимо найти точки его пересечения с тремя прямыми, что даст на нем шесть точек.

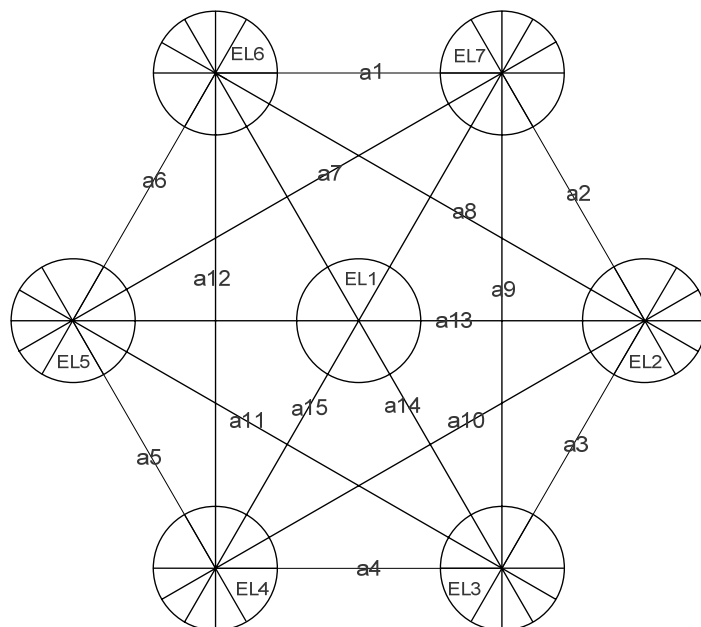


Рис. 3. Пересечение эллипсов и прямых

Таким образом, на каждом изображении необходимо найти точки пересечения эллипсов с прямыми, как это показывает рис.3:

- эллипса EL1 с прямыми a13, a14 и a15;
- эллипса EL2 с прямыми a2, a3, a8, a10 и a13;
- эллипса EL3 с прямыми a3, a4, a9, a10 и a11;
- эллипса EL4 с прямыми a4, a5, a10, a11 и a15;
- эллипса EL5 с прямыми a5, a6, a11, a12 и a13;
- эллипса EL6 с прямыми a1, a6, a8, a12 и a14;
- эллипса EL7 с прямыми a1, a2, a7, a8 и a9.

#### Выбор сопряженных точек в двух изображениях

В результате нахождения точек пересечения прямых, соединяющих центры периферийных эллипсов со всеми эллипсами “соты”, получаем 66 точек (рис.4). Дополнительные шесть точек дают нам сами центры цилиндров.

Следующее изображение сцены формируется с ракурса, как показано ниже (рис.5рис. ):

Тогда, на снимке, полученном с ракурса 2, эллипсы EL1-EL7 преобразуются следующим образом:

- EL1 → EL1'
- EL2 → EL2'
- EL3 → EL3'

EL4 → EL4'  
 EL5 → EL5'  
 EL6 → EL6'  
 EL7 → EL7'.

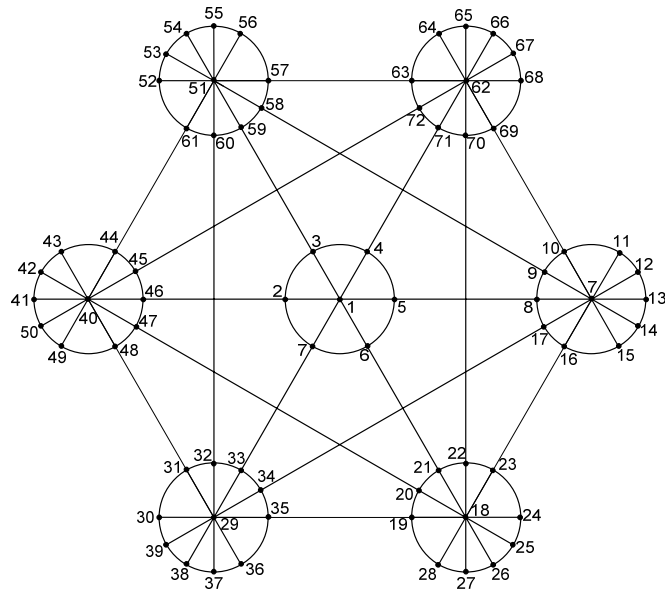


Рис.4. Точки пересечения эллипсов и прямых

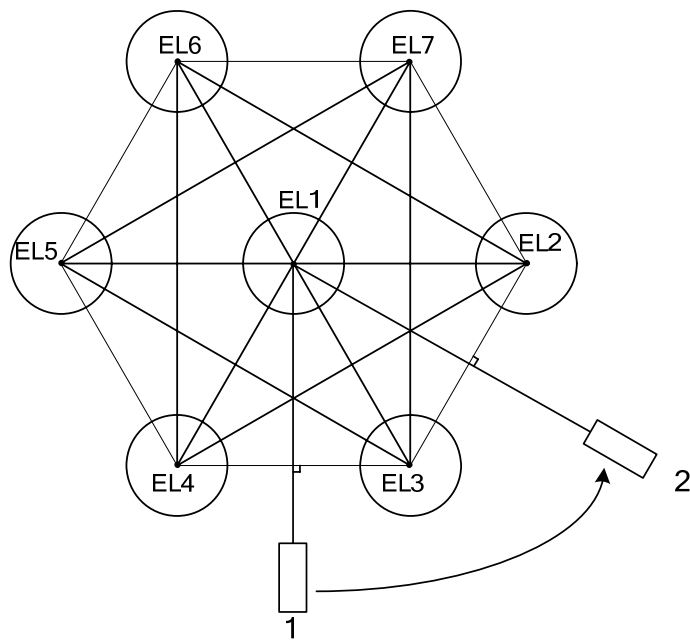


Рис. 5. Ракурсы съемки сцены

точки, пронумерованные выше (рис.6  
рис), будут расположены на новом изображении следующим образом:

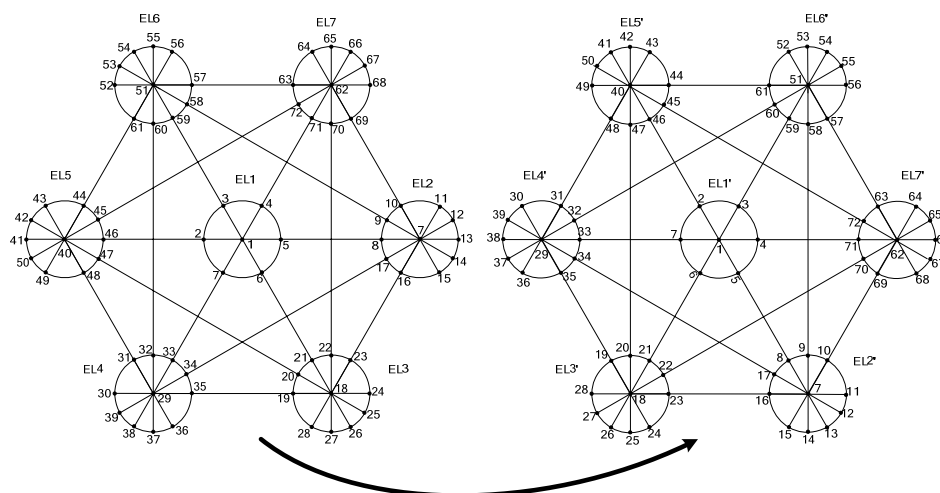


Рис. 6. Соответствие точек центров эллипсов и точек пересечения эллипсов и прямых

### Заключение

В результате использования этого метода получается два набора сопряженных точек. По первому из них производится первичная приближительная оценка разноразности, дающая общее представление о разбросе высот цилиндрических объектов в «соте». В случае сильного разброса результатов измерения высоты корректируются, и оценка разноразности начинается сначала. В случае же если обработка первого набора сопряженных точек покажет равенство высот всех цилиндрических объектов в «соте», производится уточнение результатов при помощи обработки второго набора сопряженных точек. Предложенная двухэтапная методика контроля разноразности позволяет избежать вычислительно - емкого процесса обработки 72-х точек для «сот» со значительным разбросом высот цилиндрических объектов.

УДК 621.398.6

С.Л. Балабаев, В.Г. Радецкий, К.Е. Румянцев

### ТЕЛЕМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД КОНТРОЛЯ РАЗНОВЫСОТНОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

#### Введение

Одним из приоритетных направлений в области бесконтактного определения и измерения геометрических параметров объектов является создание телеметрических систем контроля, позволяющих получать изображение измеряемых объектов