шения задач на кванты. В результате этого упрощается разработка и отладка программного обеспечения.

В завершение еще раз подчеркнем, что на современном уровне конструирования и производства создание интеллектуальных датчиков давления, отличающихся высокими технико-экономическими характеристиками, прежде всего, зависит от результатов комплексного решения совокупности проблем разработки (выбора) методов измерений, оценок состояний физических переменных, синтеза микропроцессорных алгоритмов и разработки программного обеспечения, разработки архитектуры аппаратуры и организации вычислений, определения схемотехнических решений и выбора элементной базы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Измерительные приборы для применения в промышленности.// http://www.honeywell.ru/product/prge3_2_7.shtml.
2. *Пьявченко О.Н.* Проектирование локальных микрокомпьютерных систем. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2005. – 238 с.
3. *Пьявченко О.Н., Пьявченко А.О.* Схемотехнические решения и элементная база интеллектуальных микропроцессорных модулей: Учебное пособие./ Под ред. О.Н.Пьявченко. – Таганрог: Изд-во ТРТУ. 2006. – 230 с.
4. *Голдштейн М.* 16-битные микроконтроллеры: состояние, перспективы и применение. // "Электронные компоненты". – № 11, 2006. – С.89-95.
5. *Годбоул К.* Переход от аналогового управления электроприводом к цифровому. // "Электронные компоненты", № 11, 2006. – С.25-33.
6. *Пьявченко О.Н.* Концептуальное представление о прецизионных микропроцессорных модулях ввода, измерений и обработки аналоговых сигналов. Известия ТРТУ – Таганрог. – №3, 2007. – С.126-132.

Я.Е. Ромм, Л.Н. Аксайская

КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ, ПРОИЗВОДНЫХ И ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ НА ОСНОВЕ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПО НЬЮТОНУ

Ниже конструируются схемы временной оптимизации аппроксимации функций, производных и определенных интегралов на основе интерполяционного полинома Ньютона. Построение основывается на минимизации степени интерполяционного полинома [1, 2], в частности, полинома Ньютона [3] за счет сужения подынтервалов аппроксимации. Рассматривается функция одной действительной переменной вида

$$y=f(x), \quad x\in[a,b], \tag{1}$$

где промежуток $[a,b]$ произвольно фиксирован. Выбирается система непересекающихся подынтервалов равной длины:

$$[a,b]=\bigcup_{i=0}^{P-1}[x_i,x_{i+1}), \tag{2}$$

P предполагается целой степенью по основанию 2. Таким образом,

$$x_{i+1} - x_i = (b-a)/P, \quad i = 0, 1, \ldots, P-1, \quad P = 2^k, \quad k \in \{0, 1, \ldots\}. \tag{3}$$

При априори заданной границе ε погрешности аппроксимации функции (1) для каждого отдельного подынтервала из (2), (3) строится интерполяционный полином Ньютона степени n, где n выбирается минимальным для заданной точности приближения одновременно на всех подынтервалах. Полином Ньютона преобразуется по дистрибутивности так, что принимает канонический вид для каждого подынтервала:

$$P_n(x) = a_{0if} + a_{1if}x + a_{2if}x^2 + \ldots + a_{nif}x^n, \quad x \in [x_i, x_{i+1}),$$
$$n = const, \quad i = 0, 1, \ldots, P-1. \tag{4}$$

Построение (4) выполняется для всех подынтервалов при условии:

$$| f(x) - P_n(x) | \le \varepsilon, \quad x \in [x_i, x_{i+1}), \quad i = 0, 1, \ldots, P-1. \tag{5}$$

Если в (4), (5) минимально возможное n, одинаковое для всех подынтервалов, найдено, то для функции (1) и каждого подынтервала из (2) набор коэффициентов из (4) можно сделать хранимым в памяти компьютера. Для вычисления функции дешифруется значение номера i подынтервала, это значение служит математическим адресом выборки коэффициентов (4), взаимно однозначно соответствующим данному номеру подынтервала. Если оказалось, что $x \in [x_i, x_{i+1})$, то в обозначении $h = x_{i+1} - x_i$, дешифрация индекса осуществляется по формуле $i = int\left(\frac{x-a}{h}\right)$, где int – целая часть числа, a – из (1). Время дешифрации $t=O(1)$. Если для рассматриваемой функции вычислить и хранить коэффициенты для всех 2^k подынтервалов, то время вычисления функции зависит только от степени полинома (4). По схеме Горнера значение этого полинома вычисляется за время $t(1)=n(t_y+t_c)$, где t_y, t_c – время бинарного умножения и сложения. За счет уменьшения длины подынтервала степень n в (4) можно сделать «сколь угодно» малой при соответственном возрастании $P=2^k$ в (3). В рамках интерполяции по Ньютону схема минимизации степени полинома конкретно осуществляется следующим образом [4]. Если границы i-го подынтервала из (2) и (3) обозначить как a_{i0}, b_{i0}, а шаг интерполяции – $w_i = \frac{b_{i0} - a_{i0}}{n}$, то равноотстоящие узлы интерполяции на текущем шаге можно записать в виде

$$x_{ij} = a_{i0} + j w_i, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{6}$$

Полином Ньютона на i-м подынтервале записывается в виде $\Psi_{ni}(x) = f(x_{i0}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta^j y_{i0}}{j!\, w_i^j} \prod_{k=0}^{j-1} (x - x_{ik})$, где $\Delta^j y_{i0}$ – конечная разность j-го порядка в точке x_{i0}. Пусть

$$t = \frac{x - x_{i0}}{w_i}, \tag{7}$$

интерполяционную формулу Ньютона можно записать в виде

$$\Psi_{n\,i}(t) = f(x_{i\,0}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta^j y_{i\,0}}{j!} \prod_{k=0}^{j-1} (t-k)\ . \tag{8}$$

Процесс приведения (8) к виду, аналогичному (4), влечет значения коэффициентов $a_{0\,i\,f} = f(x_{i\,0})$, $a_{l\,i\,f} = \sum_{j=l}^{n} b_{i\,j} d_{l\,j}$, где $b_{i\,j} = \frac{\Delta^j y_{i\,0}}{j!}$, d_{lj} – коэффициенты полиномов вида $P_{n\,j}(t) = d_{0\,j} + d_{1j}\,t + d_{2\,j}\,t^2 + \ldots + d_{n\,j}\,t^n$ с натуральными корнями, входящими в состав полинома Ньютона. Эти коэффициенты не зависят от вида аппроксимируемой функции, после вычисления их можно сделать хранимыми для всех использований интерполяции. Процесс построения полинома Ньютона на каждом подынтервале из (2), (3) можно начать с $n=1$, зафиксировав $k=0$. Проверка на заранее заданную соотношением (5) точность аппроксимации $(P_{n\,i}\,(x) = \Psi_{n\,i}(t))$ выполняется на каждом подынтервале во всевозможных проверочных точках. Если в них соотношение (5) не нарушено, то аппроксимация на всех 2^k подынтервалах при данном значении k осуществима полиномом $P_{n\,i}\,(x) = \Psi_{n\,i}(t)$ при выбранном значении n. Нарушение (5) при сохранении того же значения k требует увеличить степень полинома на 1, после чего весь процесс построения ψ_n и проверки его на точность аппроксимации заново повторяется на всех подынтервалах. В проверочных точках преобразованный полином Ньютона вычисляется по схеме Горнера

$$\Psi_n\,(t) = \left(\cdots\left(a_{n\,i\,f}\,t + a_{(n-1)\,i\,f}\right)t + a_{(n-2)\,i\,f}\right)t + \ldots + a_{0\,i\,f}\ . \tag{9}$$

Значение (9) сравнивается непосредственно со значением исходно заданной функции $f(x)$. Результатом работы алгоритма окажется минимальное n для каждого фиксированного $k=0,1,\ldots,k_0$.

Результаты программной реализации схемы даны в табл.1.

Таблица 1

Таблица степеней полинома Ньютона, интерполирующего функцию $y=1/x,\ x\in[1/2,1]$

ε	k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
10^{-4}	7	5	4	3	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10^{-5}	8	6	4	4	3	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10^{-6}	10	7	5	4	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1
10^{-7}	12	8	6	5	4	3	3	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1
10^{-8}		10	7	6	4	4	3	3	3	2	2	2	2	2	1	1	1	1
10^{-9}		11	8	6	5	4	4	3	3	2	2	2	2	2	2	1	1	1
10^{-10}		12	9	7	6	5	4	4	3	3	2	2	2	2	2	2	2	1
10^{-11}			9	8	6	5	4	4	4	3	3	3	2	2	2	2	2	2
10^{-12}			11	8	7	6	5	4	4	4	3	3	3	2	2	2	2	2
10^{-13}			12	9	7	6	6	5	4	4	3	3	3	3	2	2	2	2
10^{-14}			12	10	8	7	6	5	4	4	4	3	3	3	3	2	2	2

Окончание табл. 1

10^{-15}				10	9	7	6	6	5	4	4	4	3	3	3	3	2	2
10^{-16}				12	10	8	7	6	5	5	4	4	3	3	3	3	3	2
10^{-17}				12	10	8	7	6	5	5	4	4	4	4	3	3	3	3
10^{-18}				12		9		8	6	5	5	4	4	4	4	3	3	3

Во входном столбце таблицы $\varepsilon = 10^{-4}, 10^{-5}, \ldots$ обозначает априори задаваемую границу погрешности. Во входной строке k задает показатель степени $P=2^k$ количества подынтервалов из (2), (3). На пересечении строки, содержащей ε, и столбца, содержащего k, указывается минимальное значение степени n полинома Ньютона, при которой функция аппроксимируется полиномом данной степени с точностью до ε на каждом из 2^k подынтервалов. Пустующая клетка означает, что в используемой версии языка программирования граница погрешности ε оказалась недостижимой для данного числа подынтервалов ни при одном значении n.

Численный эксперимент показывает преимущественную точность аппроксимации на основе полинома Ньютона по сравнению с точностью аппроксимации на основе полинома Лагранжа на 7, 8 десятичных порядков в рамках предложенной таблично-алгоритмической схемы. Данное преимущество сохраняется для набора различных функций независимо от промежутка интерполирования.

Описанная выше схема минимизации степени полинома Ньютона, интерполирующего функцию одной действительной переменной, позволяет построить схему приближенного вычисления определенного интеграла.

Пусть имеют место соотношения (1) – (3). По свойству аддитивности

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{P-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx. \tag{10}$$

Для i-го подынтервала из (2), (3) справедливо соотношение

$$f(x) \approx P_{ni}(x), \quad \forall\, x \in \left[x_i, x_{i+1}\right), \tag{11}$$

где $P_{ni}(x)$ из (5). Интегрируя обе части (11) и используя (10), получаем

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{P-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{ni}(x)\,dx. \tag{12}$$

С учетом (7) правая часть (12) принимает вид

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{ni}(x)\,dx = w_i \int_0^n \Psi_{ni}(t)\,dt.$$

В свою очередь,

$$w_i \int_0^n \Psi_{ni}(t)\,dt = w_i\, \tilde{\Psi}_{(n+1)i}(t)\Big|_0^n, \tag{13}$$

где

$$\widetilde{\Psi}_{(n+1)\,i}(t) = c + \frac{a_{0if}}{1}t + \frac{a_{1if}}{2}t^2 + \frac{a_{2if}}{3}t^3 + \ldots + \frac{a_{nif}}{n+1}t^{n+1}. \qquad (14)$$

Соотношение (14) используется для построения формул приближенного вычисления интеграла. Для минимальной степени n интерполирующего функцию полинома и соответствующего значения k строится приближение определенного интеграла функции с помощью определенного интеграла от интерполирующего полинома. Если функция наперед известна, то коэффициенты в (14) можно рассчитать априори для постоянного хранения, при этом вычисление интеграла в дальнейшем будет осуществляться путем выборки коэффициентов, соответствующих заданной функции, в полной аналогии с таблично-алгоритмической схемой аппроксимации функций.

Подставляя верхние и нижние пределы интегрирования в правую часть (13), получаем $w_i \int_0^n \Psi_{n\,i}(t)dt = w_i \widetilde{\Psi}_{(n+1)\,i}(n)$, где значения $\widetilde{\Psi}_{(n+1)\,i}(n)$ вычисляются по схеме Горнера:

$$\widetilde{\Psi}_{(n+1)i}(n) = \left(\ldots\left(\left(\frac{a_{nif}}{n+1}n + \frac{a_{(n-1)if}}{n}\right)n + \frac{a_{(n-2)if}}{n-1}\right)n + \cdots + \frac{a_{0\,if}}{1}\right)n. \quad (15)$$

Из (15) следует

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{P-1} w_i \widetilde{\Psi}_{(n+1)\,i}(n). \qquad (16)$$

Существенно, что (16) строится для минимизирующего значения показателя n алгоритма кусочно-полиномиальной аппроксимации. Как показывает эксперимент, этого достаточно для вычисления определенного интеграла с точностью аппроксимации подынтегральной функции.

Проверка точности вычисления определенных интегралов осуществлялась путем сравнения с точными значениями интегралов для функций, имеющих первообразные. В случае существования первообразной $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$. Точность приближенного вычисления интеграла от этой же функции оценивается из разности $\delta = |F(b) - F(a) - \sum_{i=0}^{n} w_i \widetilde{\Psi}_{(n+1)\,i}(n)|$. Аналогичные разности составлялись для формул трапеций и метода Симпсона с целью сопоставления точности приближения (16) с известными схемами.

Результаты сравнения сведены в табл.2.

Таблица 2

Погрешности интегрирования для функции

$$f(x)=sin(x), \quad [a,\ b]=\left[1,\frac{3}{2}\right], \quad \varepsilon=10^{-10}$$

n	k	δ для метода на основе полинома Ньютона степени *n*	δ для метода трапеции	δ для метода Симпсона
7	0	$7{,}24*10^{-13}$	$9{,}82*10^{-3}$	$1{,}03*10^{-5}$
6	1	$4{,}58*10^{-15}$	$2{,}45*10^{-3}$	$6{,}38*10^{-7}$
5	2	$5{,}22*10^{-13}$	$6{,}12*10^{-4}$	$3{,}98*10^{-8}$
4	3	$1{,}45*10^{-14}$	$1{,}53*10^{-4}$	$2{,}49*10^{-9}$
3	4	$2{,}26*10^{-16}$	$3{,}82*10^{-5}$	$1{,}55*10^{-10}$
3	5	$4{,}32*10^{-12}$	$9{,}55*10^{-6}$	$9{,}72*10^{-12}$
3	6	$2{,}7*10^{-13}$	$2{,}39*10^{-6}$	$6{,}07*10^{-13}$
3	7	$1{,}69*10^{-14}$	$5{,}97*10^{-7}$	$3{,}8*10^{-14}$
2	8	$2{,}37*10^{-15}$	$1{,}49*10^{-7}$	$2{,}37*10^{-15}$
2	9	$1{,}48*10^{-16}$	$3{,}73*10^{-8}$	$1{,}47*10^{-16}$
2	10	$9{,}57*10^{-18}$	$9{,}33*10^{-9}$	$9{,}57*10^{-18}$
2	11	$4{,}88*10^{-19}$	$2{,}33*10^{-9}$	$4{,}88*10^{-19}$
2	12	$3{,}25*10^{-19}$	$5{,}83*10^{-10}$	$2{,}98*10^{-19}$
2	13	$4{,}07*10^{-19}$	$1{,}46*10^{-10}$	$6{,}23*10^{-19}$
2	14	$6{,}51*10^{-19}$	$3{,}64*10^{-11}$	$6{,}23*10^{-19}$
1	15	$9{,}11*10^{-12}$	$9{,}11*10^{-12}$	$6{,}78*10^{-19}$
1	16	$2{,}28*10^{-12}$	$2{,}28*10^{-12}$	$1{,}52*10^{-18}$
1	17	$5{,}69*10^{-13}$	$5{,}69*10^{-13}$	$1{,}17*10^{-18}$

Из таблицы видно, что метод на основе полинома Ньютона осуществляет приближенное вычисление определенного интеграла с большей точностью, чем метод Симпсона или формула трапеций.

Помимо достижения высокой точности достигается еще одна отличительная особенность – быстродействие вычисления определенного интеграла, если наперед известен вид подынтегральной функции и промежуток интегрирования, то в этом случае коэффициенты $\frac{a_{0if}}{1}, \frac{a_{1if}}{2}, \frac{a_{2if}}{3}, \ldots, \frac{a_{nif}}{n+1}$ из (14) являются хранимыми.

Метод применим в случае, когда нахождение первообразной затруднительно, например, для функций $E_i(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{e^x}{x}dx,\ (x<0)$ – интегральная показательная функция, $l_i(x)=\int\limits_{0}^{x}\frac{dx}{ln\,x},\ (x>0)$ – интегральный логарифм, $C(x)=\int\limits_{0}^{x}cos\frac{\pi}{2}x^2dx$, $S(x)=\int\limits_{0}^{x}sin\frac{\pi}{2}x^2dx$ – интегралы Френеля.

Возможна аппроксимация не подынтегральных функций и интегралов, а специальных функций рассматриваемого вида, с помощью кусочно-полиномиальной аппроксимации на основе интерполяционного полинома Ньютона на конкретно заданных промежутках. При этом значения функций в узлах интерполяции можно приблизить с помощью описанной схемы численного интегрирования.

На той же основе можно строить схему приближенного вычисления производной от функции, приближая ее производной от интерполирующего эту функцию полинома. Как отмечалось, для i-го подынтервала из (2), (3) выполнено $f(x) \approx P_{ni}(x), \quad \forall x \in \lfloor x_i, x_{i+1} \rfloor$, где $P_{ni}(x)$ из (5). При интерполяции по Ньютону

$$f(x) \approx \Psi_{ni}(t). \tag{17}$$

Взятие производной по x от обеих частей (18) влечет к

$$(f(x))'_x \approx (\Psi_{ni}(t))'_x.$$

При условии (7), получится $f'(x) \approx (\Psi_{ni}(t))'_t t'_x$, где $(\Psi_{ni}(t))'_t = a_{1if} + 2a_{2if}t + 3a_{3if}t^2 + \ldots + n\, a_{nif}t^{(n-1)}$, $t'_x = \dfrac{1}{w_i}$.

Значение $\Psi'_{ni}(t)$ вычисляется по схеме Горнера:

$$\Psi'_{ni}(t) = \left(\left(\cdots\left(na_{nif}t + (n-1)a_{(n-1)if}\right)t + \cdots + 2a_{(n-2)if}\right)t + a_{1if}\right)\frac{1}{w_i}. \tag{18}$$

Соотношение (18) дает формулу приближенного вычисления производных.

На каждом подынтервале из (2), (3) в проверочных точках производилось сравнение (18) с аналитическим значением производной функции, дифференцируемой в аналитическом виде. Результаты сравнения приведены ниже в табл.3.

Таблица 3

Погрешность вычисления производной функции $f(x) = sinf(x)$, $[a, b] = \left[1, \frac{3}{2}\right]$, $\varepsilon = 10^{-19}$, на основе полинома Ньютона степени n

n	k	погрешность вычисления производной
11	0	$9{,}048 \cdot 10^{-17}$
10	1	$-5{,}421 \cdot 10^{-20}$
10	2	0
8	3	$9{,}926 \cdot 10^{-17}$
7	4	$9{,}758 \cdot 10^{-19}$
7	5	0
10	6	$-5{,}963 \cdot 10^{-19}$
5	7	$7{,}589 \cdot 10^{-19}$
5	8	$-2{,}602 \cdot 10^{-18}$

Окончание табл. 2

4	9	$-2{,}711*10^{-19}$
4	10	$5{,}421*10^{-19}$
4	11	$-2{,}873*10^{-18}$
4	12	$-7{,}589*10^{-19}$
4	13	$-3{,}524*10^{-19}$
4	14	$-9{,}487*10^{-19}$
4	15	$-2{,}927*10^{-18}$

Таким образом, с помощью предложенной схемы производная элементарной функции вычисляется с точностью аппроксимации функции. Для наперед известной функции коэффициенты аппроксимирующего производную полинома могут быть хранимыми для каждого подынтервала, производная будет вычисляться за время нескольких сложений и умножений. В результате кусочно-полиномиальную аппроксимацию можно оценить временной сложностью $T = O(1)$ для вычисления стандартного вида функции, производной от нее и одновременно определенного интеграла от такой функции.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ромм Я.Е., Фирсова С.А.* Устойчивое распараллеливаемое вычисление функций на основе таблично-алгоритмической аппроксимации с приложениями в численном анализе. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 1999. –86 с.
2. *Ромм Я.Е.* Бесконфликтные и устойчивые методы детерминированной параллельной обработки. / Диссертация на соискание степени д – ра техн. наук. – Таганрог: ТРТУ, 1998. – 546 с.; ВНТИ Центр. – № 05.990.001006.
3. *Ромм Я.Е., Аксайская Л.Н.* Схема кусочно-полиномиальной аппроксимации с минимальной временной сложностью на основе интерполяционного полинома Ньютона. – Таганрог. 2007. – 17 с.
4. *Березин И.С., Жидков Н.Г.* Методы вычислений. – Т.1. –М.: Наука, 1970. – 464 с.

А.В. Попов, В.Э. Жумай

ОЦЕНКА ПРОЧНОСТИ НА ОСНОВЕ ИНВАРИАНТОВ АМПЛИТУД СИГНАЛОВ АКУСТИЧЕСКОЙ ЭМИССИИ

Акустико-эмиссионный (АЭ) контроль основывается на анализе информации, содержащейся в нестационарном случайном потоке импульсов эмиссии [1].

Предлагается метод оценки динамики развития процессов АЭ на основе их феноменологических моделей и экспериментальных данных, позволяющий устанавливать факт нарушения пуассоновского характера возникновения импульсов АЭ, являющийся сигналом начала развития процесса разрушения конструкции.

В отличие от метода инвариантов [2-4] основанного на обработке случайных временных интервалов между импульсами АЭ, описанный под-